

DUE DATE SLIP**GOVT. COLLEGE, LIBRARY**

KOTA (Raj)

Students can retain library books only for two weeks at the most

BORROWER'S No	DUE DATE	SIGNATURE

सांख्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग

सांख्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग

डॉ वी एल. अग्रवाल
एम एससी, एम. स्टैट., पीएच डी.
सांख्यिकी विभाग,
उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर



राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
जयपुर

शिक्षा तथा समाज-कल्याण मंत्रालय, भारत सरकार की विश्वविद्यालय स्तरीय ग्रन्थ-निर्माण योजना के अन्तर्गत, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी द्वारा प्रकाशित ।

प्रथम संस्करण : 1977

प्रथमावृत्ति : 1983

Sankhyiki Ke Sidhanta Aur Anuprayoga

भारत सरकार द्वारा रियायती मूल्य पर उपलब्ध कराये गये कागज से निर्मित ।

मूल्य : 45.00

© राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर

प्रकाशक :

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी
ए-26/2, विद्यालय मार्ग, तिलक नगर
जयपुर-302004

मुद्रक :

गायत्री ऑफसेट प्रेस
नई दिल्ली

माता-पिता

की

पुण्य स्मृति में

प्राक्कथन

विश्व विभिन्न भाषाओं तथा सस्कृतियों का रगस्थल है। यह रग-बिरगे कूलों का उपवन है। विविधता ही इसका सौंदर्य है। भाषाएँ प्रौर सस्कृतियाँ प्रदेश विशेष के भूगोल तथा इतिहास की देन हैं। एक देश या प्रदेश की जलवायु से ही मनुष्य का शरीर और मानस बनता है, उसका रहन-सहन, भाषा-बोली भी जलवायु से प्रभावित होती है। फिर अनेक वर्षों से एक विशिष्ट प्रकार की सस्कृति चलती है, अतः इतिहास का भी बड़ा महत्त्व है। दूसरी ओर मातृ-भाषा जीवन की एक स्वामाविक प्रक्रिया है, जिसके माध्यम से सस्कृति और इतिहास की परम्परा प्रबहमान होती है। इसके अतिरिक्त मातृ-भाषा में ही मनुष्य का व्यक्तित्व सर्वांग रूप से निखरता है। अतः सर्वत्र यह स्वीकार किया गया है कि मनुष्य की सारी शिक्षा-दीक्षा, सर्वोच्च स्तर तक उसकी मातृ-भाषा के माध्यम से ही होनी चाहिए।

इसके अतिरिक्त विश्व का समस्त ज्ञान अनेक भाषाओं में समृद्धित है और सभी लोग समस्त ज्ञान की प्राप्ति के लिए अनेक भाषाओं का अध्ययन नहीं कर सकते हैं। ऐसा करने से वे केवल भाषा-विज्ञ ही रह जायेंगे, न कि विषय-विज्ञ। भाषा तो एक साधन मात्र है। अतः यह आवश्यक है कि सभी भाषाओं में लिपिवद्ध ज्ञान सबको शीघ्रता एव सुलभता से अपनी भाषा में ही उपलब्ध हो अर्थात् ज्ञान के आदान-प्रदान का माध्यम मातृ-भाषा हो।

स्वतन्त्रता प्राप्ति के पश्चात् जब इस दिशा में केन्द्र सरकार के शिक्षा-मन्त्रालय ने कार्य करने का विचार किया तो यह तथ्य सामने आया कि माध्यम-परिवर्तन के मार्ग में बहुत बड़ा अवरोध है सम्बद्ध भाषाओं में विभिन्न विषयों के मानक ग्रन्थों का अभाव, जिसे यथाशीघ्र पूरा किया जाना चाहिए। इसी उद्देश्य की पूर्ति के लिए भिन्न-भिन्न राज्यों में अकादमियों/बोर्डों की स्थापना की गई। राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी इसी योजना के अन्तर्गत पिछले दस वर्षों से मानक ग्रन्थ प्रकाशन का कार्य कर रही है और अब तक इसने विभिन्न विषयों (कला, वाणिज्य, विज्ञान, कृषि आदि) के लगभग 285 ग्रन्थ प्रकाशित किये हैं जो विश्वविद्यालय के बरिष्ठ प्राध्यापकों द्वारा लिखे गये हैं।

“साहित्यिकी के सिद्धान्त और अनुप्रयोग” पुस्तक की पुनरावृत्ति प्रस्तुत करते हुए हमें प्रसन्नता है। इस पुस्तक में साहित्यिकी सिद्धान्तों और उनके व्यावहारिक अनुप्रयोगों का वर्णन/विवेचन सरल रीति से किया गया है। साहित्यिकीय प्रविधियों की प्रयोग-विधि एवं सम्प्राप्त सख्यात्मक मानों का निर्वचन भी संतोदाहरण दिया गया है। कृषि विज्ञान, धातुविज्ञान, अर्थशास्त्र, वाणिज्य, समाजशास्त्र आदि विषयों के छात्रों के लिए यह पुस्तक उपयोगी है।

हम इसके लेखक श्री डॉ. बसन्तलाल भ्रमवाल, दुर्गापुरा तथा समीक्षक डॉ. वी. के. सेठी के प्रति प्रदत्त सहयोग हेतु आभारी हैं ।



(श्रीमती कमला)

शिक्षा मन्त्री, राजस्थान सरकार

एवम्

अध्यक्ष, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ प्रकाशनी

जयपुर



(डॉ. पुरुषोत्तम नागर)

निदेशक

राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ प्रकाशनी

जयपुर

भूमिका

सांख्यिकी वर्तमान युग में एक अति महत्व का विषय है क्योंकि अनुसंधान, योजना एवं सामान्य जानकारी के लिए सांख्यिकीय विधियाँ अत्यंत उपयोगी सिद्ध हुई हैं। साथ ही, भारत में हिंदी का प्रयोग दिन प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है और भाषा की जाती है कि कुछ वर्षों में हिन्दी ही पठन पाठन का एक मात्र माध्यम रह जायेगी। अतः भुके हिन्दी में सांख्यिकी की एक ऐसी पुस्तक लिखने की इच्छा हुई जो अधिकतम व्यक्तियों की आवश्यकता को पूरा कर सके, जो पढ़ने व समझने में सुगम हो, सांख्यिकीय दृष्टि से पूर्णतया परिशुद्ध हो तथा सांख्यिकी के उच्च-स्तरीय विषयों का समुचित ज्ञान करा सके। साथ ही जटिल गणितीय व्युत्पत्तियों को इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा जाय जिससे सामान्य व्यक्ति भी इसका पूरा पूरा लाभ उठा सके। इसी भावनाओं से प्रेरित होकर यह पुस्तक लिखी गयी है। (गणितीय सांख्यिकी के विद्यार्थी अध्याय 19 व 20 को छोड़ सकते हैं।) लेखक अपने प्रयास में यहाँ तक सफल हुआ है, इसका निर्णय तो पाठक ही कर सकते हैं, अतः पुस्तक के सम्बन्ध में पाठकों एवं अध्यापकों से उनके विचार तथा सुभाव सादर आमन्त्रित हैं।

मैं इस पुस्तक को पूर्ण करने में सहयोग देने के लिए सांख्यिकी विभाग, कृषि महा-विद्यालय, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर के कुछ सदस्यों—डा. बी. ज. श्रीलण्डे (रीडर व विभागाध्यक्ष) श्री एच. सी. मायूर (रीडर) श्री आर. पी. गुप्ता श्री एच. एन. शर्मा व श्री एस. डी. शर्मा के प्रति अत्यधिक आभार प्रकट करता हूँ। इनके अतिरिक्त मैं डॉ. पी. के. सेठी का विशेष रूप से आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की समीक्षा करके मुझे प्रोत्साहित किया। कृषि महाविद्यालय, उदयपुर के डॉ. श्री पी. गुप्ता को भी लेखन कार्य में सहयोग के लिए धन्यवाद देना हूँ। श्री कानिचन्द्र मायूर तथा अन्य सभी जो इस पुस्तक के लेखन कार्य में किसी भी रूप में सहायक रहे हैं उन्हें धन्यवाद देना अपना कर्तव्य समझता हूँ।

मैं अपने भाई डॉ. एम. पी. अग्रवाल तथा अपनी पत्नी बनन अग्रवाल द्वारा दिये गये प्रोत्साहन एवं सहायता के लिए उनके प्रति विशेष आभार प्रकट करता हूँ।

इस आवृत्ति को पूर्णतया परिशुद्ध करके छपा गया है। भाषा है कि पाठन इसकी और अधिक उपयोगी पायेगे।

I am indebted to the Literary Executor of the late Sir Ronald A. Fisher, F R S, to Dr Frank Yates, F R S, and to Long nan Group Ltd.,

London, for permission to reprint Tables 1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 16 and 17 from their book *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*.

I am also indebted to all other publishers and writers for permission to reprint their original Tables.

—वसन्तलाल अग्रवाल

विषय-सूची

अध्याय	विवरण	पृष्ठ
1.	सांख्यिकी का परिचय	1- 2
2.	बारम्बारता और उसका निरूपण	3- 23
3.	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	24- 43
4.	विक्षेपण-माप	44- 68
5.	प्रारम्भिक प्रायिकता सिद्धान्त	69- 89
6.	कुछ मुख्य असतत प्रायिकता बटन	90-102
7.	कुछ मुख्य सतत प्रायिकता बटन	103-129
8.	सीमा प्रमेय	130-138
9.	सांख्यिकीय परिकल्पना-परीक्षा	139-194
10.	अप्राचल विधियाँ	195-215
11.	आकलन सिद्धान्त और अधिष्ठतम समाविता परीक्षा	216-232
12.	प्रतिचयन सिद्धान्त	233-273
13.	सामाश्रयण सामान्य विवेचन तथा गणितीय फलन	274-322
14.	सहसम्बन्ध	323-367
15.	सूचकांक	368-389
16.	ज्ञान-श्रेणी विश्लेषण	390-425
17.	घन्तवर्षण और बहुवर्षण	426-450
18.	बहुचर बटन और बहुचर परीक्षाएँ	451-470
19.	विविक्तकर फलन	471-485
20.	प्रॉबिट विश्लेषण	486-511
21.	प्रसरण-विश्लेषण	512-597
22.	रूपान्तरण	598-605
23.	सहप्रसरण-विश्लेषण	606-622
	-रिशिष्ट	
	:- आधुनिक सिद्धान्त का परिचय	623-632

ख—कुछ उपयोगी सूत्र	633-635
ग—समुच्चय सिद्धान्त का परिचय	636-637
घ—सांख्यिकीय सारणियाँ	638-681
Further Read In	682-684
ग्रन्थमणिका	685-690
पारिभाषिक शब्दावली	691-694
शुद्धि-पत्र	695-698

सांख्यिकी विज्ञान का एक अंग है जिसका प्रयोग प्राचीन काल में हुआ था रहा है किन्तु इसका विभाग मुख्यतः बीसवीं शताब्दी में ही हुआ है। प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग जनगणना राजस्व या अन्य आवश्यक वस्तुओं की गणना तक ही सीमित था किन्तु अब यह विषय आधुनिक अनुसंधान का अभिन्न अंग बन गया है। अधिकांश अध्ययन एक प्रयोग सांख्यिकी को बिना उपयोग में लाये अर्थात् तथा कम विश्वसनीय समझे जाते हैं। उदाहरण के लिए येलो में उपज का प्रभाव दर्शाना ही किसी कारखाने में मशीनों की क्षमता की तुलना करती है। जनसमुदाय के विषय में किसी प्रकार की जानकारी प्राप्त करती है। किसी उत्पादित वस्तु की गुणात्मक परिशुद्धि की परीक्षा करती है या किसी औषधि का किसी रोग पर प्रभाव कारनामा है तो इन सभी प्रयोगों में सांख्यिकीय विधि का महत्वपूर्ण स्थान है।

समाज पर सांख्यिकीय स्थितियों का प्रत्यक्ष प्रभाव पड़ता है और अर्थशास्त्र इसका मार्ग दर्शन करता है। वर्तमान समय में सांख्यिकी समाजशास्त्र व अर्थशास्त्र में एक मुख्य स्थान प्राप्त कर चुकी है। इसके अतिरिक्त भावी योजनाओं को स्वरूप देने या योजना का आर्थिक एवं सामाजिक पहलुओं पर प्रभाव दर्शाने के लिए सांख्यिकी ही एक उपयुक्त विज्ञान है।

सांख्यिकी को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है सांख्यिकीय विज्ञान उन विधियाँ या प्रविधियाँ का एक निष्ठा है जिसका उपयोग किसी विषय का आर्थिक ज्ञान होने की स्थिति में यथासिद्ध जानकारी और नियम के हेतु किया जाता है। इसका उपयोग विभिन्न अनुसंधानों में एक सहायक उपकरण के रूप में होता है।

सांख्यिकी से बहुत से विद्वानों ने परिभाषित करने के प्रयत्न किये हैं किन्तु किसी भी एक परिभाषा को आदर्श परिभाषा नहीं माना जा सकता है। फिर भी आर० ए० फिशर (R A Fisher) द्वारा दी गई परिभाषा का सर्वोत्तम माना जाता है जो निम्न प्रकार है —

सांख्यिकी मूलतः सांख्यिकीय गणित की एक शाखा है और इसे प्रेरण सामग्री हेतु प्रयोग में लिये जाने वाले गणित की गणना भी दी जा सकती है। *

किसी जानकारी को प्राप्त अनुसंधान के लिए सांख्यिकी का प्रयोग करने में निम्न चार मुख्य क्रियाएँ करनी पड़ती हैं —

- (1) आधात सामग्री (साम) का संग्रह करना।
- (2) उक्त सामग्री का उचित रीति में मासिकीकरण (Tabulation) करना।

* (The science of statistics is essentially a branch of applied mathematics and may be regarded as mathematics applied to observational data)

(3) आवश्यकतानुसार उसका विस्तार करना।

(4) घत में जो सख्यात्मक परिणाम प्राप्त हो, उनका निर्बचन करना।

उपर्युक्त चार क्रियाओं का यथोचित रूप से प्रयोग करने के लिए विभिन्न प्रविधियों और साधनों को अपनाया पड़ता है जिनका पर्याप्त वर्णन इस पुस्तक में दिया गया है।

सांख्यिकी की सहायता से किसी पूरे जनसमुदाय (Population) के विषय में पूर्ण या आंशिक जानकारी प्राप्त की जाती है। इसके लिए या तो पूरे जनसमूह (समग्र) के प्रत्येक एकक (unit) का माप लेना होता है या प्रतिदर्श (sample) में सम्मिलित एकको के माप लेकर जानकारी प्राप्त कर ली जाती है। प्रयोजन विशेष के अनुसार निर्धारित एकको के किसी भी पूर्णयोग को समग्र कहते हैं। प्रतिवर्ष से अभिप्राय समय के कुछ एकको से है जो किसी प्रतिचयन विधि द्वारा नमूने के तौर पर समग्र में से चयन किये जाते हैं। प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त जानकारी का समग्र के प्रति जानकारी के रूप में उपयोग किया जाता है। जैसे किसी औषधि का प्रभाव जानने के लिए, एक रोग के कुछ रोगियों (प्रतिदर्श) को ही यह औषधि दी जाती है और जो परिणाम प्राप्त होते हैं, उन्हें इस रोग के सब रोगियों (समग्र) के प्रति सत्य माना जाता है।

ऐसी दशा में समग्र के विषय में जो परिवर्तनएँ हैं उनकी जाँच प्रतिदर्श पर लिये गये प्रेक्षणों के आधार पर की जाती है। समग्र के विभिन्न प्राचलों का अनुमान भी प्रतिदर्श के आधार पर ही लगाया जाता है। (समग्र के किसी अंश को प्राचल कहते हैं।)

इन दोनों समस्याओं में सांख्यिकी का उपयोग कैसे किया जाता है यह इस पुस्तक के अध्यायों 9, 10, 11 में दिया गया है। प्रतिदर्श किस प्रकार लिया जाय या प्रयोग-अभिनवना किस प्रकार की हो जिससे कि कम खर्च और कम श्रुति हो—ये भी सांख्यिकी के ही विषय हैं। इनका वर्णन अध्याय 12 में दिया गया है।

सांख्यिकी एक गूढ़ विषय है। इसको अच्छी तरह पढ़ना और समझना चाहिये धन्यथा इसका उपयोग उचित रूप में नहीं हो सकेगा और उस स्थिति में हानिकारक परिणाम भी प्राप्त हो सकते हैं। घत पाठकों से अनुरोध है कि इस विषय का कम ज्ञान होने की स्थिति में, इसका प्रयोग करने से पूर्व वे किसी सांख्यिकी विद् से परामर्श कर लें।

किसी समग्र में एकक के विशेष गुण या लक्षण की पूर्ण या प्राग्जित जानकारी प्राप्त करने के लिए समग्र के घटो का मापन किया जाता है। इस प्रकार जो माप प्राप्त होते हैं, उनको विशिष्ट एवं निश्चित रूप में व्यवस्थित करके सारणीबद्ध करना एवं उनका निरूपण करना आवश्यक है।

परिभाषाएँ

किसी लक्षण के लिए समान मान वाले एकको की संख्या को उस मान की बारम्बारता कहते हैं।

विभिन्न मानों की बारम्बारता को व्यवस्थित रूप देने की क्रिया को बारम्बारता बटन (Frequency distribution) कहा जाता है, जैसा कि उदाहरण (21) में दिखाया गया है।

हम सैद्धान्तिक रूप में बारम्बारता बटन को इस प्रकार समझ सकते हैं —

माना कि वर के विभिन्न मान $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ हैं और प्रेक्षण x_1, f_1 बार घटित होता है; अर्थात् x_1 की बारम्बारता f_1 है। इसी प्रकार प्रेक्षणों $x_2, x_3, x_4, \dots, x_k$ की तबनुसार बारम्बारताएँ $f_2, f_3, f_4, \dots, f_k$ हुईं। इस बारम्बारता-बटन को निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर सकते हैं —

प्रेक्षण (x)	बारम्बारता (f)
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
\vdots	\vdots
x_k	f_k
\vdots	\vdots
x_k	f_k

बारम्बारता बटन के रूप में प्रेक्षणों को प्रस्तुत करने से किन्हीं मानों की बारम्बारता गणना-विह्वो द्वारा सुगमता से ज्ञात की जा सकती है। गणना विह्व लगाने की विधि इस प्रकार है —

पहले-ग्यास के प्रत्येक मान को क्रम में लिख लिया जाता है। फिर एक-एक करके प्रेषित मान को देख कर क्रम में दिये गये मानों में से उन्ने खोज कर उन्के सामने एक

छोटा या दण्ड गणना चिह्न के रूप में लगा दिया जाता है। जब किसी मान के सम्मुख चार चिह्न लग चुके होते हैं और पाँचवाँ चिह्न लगाना होता है तो प्रथम चार चिह्नों को बाधता हुआ एक चिह्न घोर लगा देते हैं। इस प्रकार यह एक पाँच गणना चिह्नों का समूह बन जाता है। यदि छठा चिह्न इसी मान के सम्मुख लगाना हो तो इसे प्रथम से लगाते हैं। यह प्रथम तब तक चमता रहता है जब तक कि सब प्रेक्षित मानों के लिए चिह्न न लग जाएँ। इस प्रकार पाँच चिह्नों के समूह या समूहों को बनाने से प्रत्येक मान के लिए गणना-चिह्नों की संख्या सुगमता से ज्ञात हो जाती है। इसी विधि का उपयोग उदाहरण (2.1) में किया गया है।

सचयी बारम्बारता

प्रायः यह जानने की आवश्यकता होती है कि उन प्रेक्षणों की संख्या क्या है जिनका मान एक निश्चित प्रेक्षण-मान के समान या इससे कम है। इन प्रेक्षणों की संख्या को सचयी बारम्बारता कहते हैं। सचयी बारम्बारता को बारम्बारता-बटन की सहायता से सुगमता से ज्ञात कर सकते हैं। क्रमित बारम्बारता-बटन-सारणी के किसी प्रेक्षित मान की सचयी बारम्बारता, उसकी अपनी बारम्बारता में पूर्ववर्ती बारम्बारताओं का योग जोड़ देने से ज्ञात हो जाती है। क्रमित प्रेक्षित मान $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ और उनकी तदनुसार बारम्बारता $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ होने का स्थिति में सचयी बारम्बारता (स० बार०) निम्न रीति से ज्ञात कर सकते हैं —

प्रेक्षित मान (x)	बारम्बारता (f)	स० बार० (F)
x_1	f_1	$f_1 = F_1$
x_2	f_2	$f_1 + f_2 = F_1 + f_2 = F_2$
x_3	f_3	$f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3 = F_3$
\vdots	\vdots	\vdots
x_k	f_k	$f_1 + f_2 + \dots + f_k = F_{k-1} + f_k = F_k$

इस विधि का प्रयोग करके उदाहरण (2.1) में सचयी बारम्बारताएँ चौथे स्तम्भ में दिखाई गई हैं।

उदाहरण 2.1 एक अस्पताल में जन्म के समय 50 बच्चा के भार लिये गये थे। ये भार किलोग्राम में निम्न प्रकार थे

31, 28, 32, 26, 28, 34, 26, 30, 31, 32,
 35, 37, 28, 31, 20, 27, 31, 30, 29, 26,
 30, 31, 23, 27, 32, 24, 36, 28, 30, 38,

25, 36, 38, 29, 34, 23 25, 29, 34, 26,
30, 24, 25, 34, 28, 23, 32, 31, 22, 22

इस ग्याम को बारम्बारता बटन के रूप में लिखने के लिए गणना चिह्न (tally marks) को प्रत्येक भार के सामने लगा कर बारम्बारता ज्ञात की जा सकती है और निम्न सारणी के अनुसार बारम्बारता बटन लिखा जा सकता है —

भार (X) कि. ग्राम	गणना चिह्न	बारम्बारता (f)	सं. बार० (F)
20	I	1	1
22	I	1	2 (1+1)
23	III	3	5 (2+3)
24	I	1	6 (5+1)
25	III	3	9 (6+3)
26	IIII	4	13 (9+4)
27	II	2	15 (13+2)
28	IIII	5	20 (15+5)
29	III	3	23 (20+3)
30	IIII	5	28 (23+5)
31	IIII I	6	34 (28+6)
32	IIII	5	39 (34+5)
34	IIII	5	44 (39+5)
35	I	1	45 (44+1)
36	II	2	47 (45+2)
37	I	1	48 (47+1)
38	II	2	50 (48+2)
योग		50	

वर्ग-बारम्बारता का उपयोग

प्रायः बारम्बारता-बटन में प्रत्येक मान को अलग अलग लिन में इन मानों की संख्या प्रत्यक्ष हो जाती है। अतः इस बटन को संक्षिप्त रूप में रखने का उपाय यह है कि इन मानों का वर्गीकरण कर दिया जाये और प्रत्येक वर्ग में सम्मिलित मानों की

बारम्बारता ज्ञात कर ली जाय। इस प्रकार के बटन बहुधा प्रयोग में लाये जाते हैं। इस बटन में सदैम एक वर्ग की उपरि सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा होती है। इस प्रकार के बटन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है —

वर्ग	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
\vdots	\vdots
$X_k - X_{k+1}$	f_k

व्ययहार में अधिकतर वर्गों की निम्न सीमा को वर्ग में सम्मिलित मानते हैं। इस प्रकार का बटन सतत बारम्बारता बटन कहलाता है।

उदाहरण (21) में दिये हुए न्यास का वर्गीकरण करने के सतत बारम्बारता बटन के रूप में उसे नीचे प्रस्तुत किया गया है क्योंकि न्यास एक दशमलव तक दिया गया है। यहाँ 0.3 का वर्ग-अन्तराल¹ लिया गया है।

वर्ग	बारम्बारता
2.0 — 2.3	2
2.3 — 2.6	7
2.6 — 2.9	11
2.9 — 3.2	14
3.2 — 3.5	10
3.5 — 3.8	4
3.8 — 4.1	2
योग	50

इस क्रिया में यह समस्या सामने आती है कि वर्ग-अन्तराल कितना हो। यह वर्गों की संख्या पर निर्भर रहता है। यदि सारणी में K वर्ग इच्छित हो और अधिकतम प्रेक्षण मान L व न्यूनतम प्रेक्षण मान S हो तो

1 वर्ग की उपरि सीमा और निम्न सीमा के अन्तर को वर्ग-अन्तराल कहते हैं।

$$\text{वर्ग अन्तराल} = \frac{L - S}{K} \quad \dots(2.1)$$

K का मान ज्ञात करने के लिए एच० ए० स्टर्जेट (H. A. Sturges) ने निम्न सूत्र दिया है :—

$$K = 1 + 3.322 \log n \quad \dots(2.2)$$

जब कि कुल प्रेक्षणों की संख्या n है।

$$\text{प्रत्येक वर्ग अन्तराल} = \frac{L - S}{1 + 3.322 \log n}$$

जैसे उदाहरण (2.1) के न्यास को ही वर्गों में विभाजित करने वारम्बारता बटन के रूप में लिखा हो तो,

$$\begin{aligned} K &= 1 + 3.322 \log_{10} 50 \\ &= 1 + 3.322 \times 1.6990 \\ &= 1 + 5.744 \\ &= 6.744 \end{aligned}$$

मान 6.744, 7 के निम्न है प्रत्येक इस न्यास के लिए 7 वर्गों में उचित है।

$$L = 38, \quad S = 20$$

$$\begin{aligned} \text{वर्ग अन्तराल} &= \frac{38 - 20}{7} \\ &= \frac{18}{7} = 2.5 \end{aligned}$$

घाटेलीय निरूपण

सारणीबद्ध प्रेक्षणों को आलेखित कर प्रायः चित्रित भी किया जाता है। इन चित्रों द्वारा स्थिति का ज्ञान सुगमता से हो जाता है। ऐसे ही कुछ मुख्य-मुख्य चित्रों का वर्णन इस अध्याय में किया जायेगा।

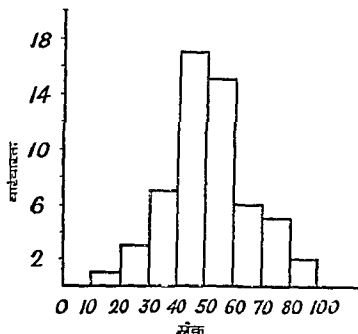
घायत चित्र

इस प्रकार के चित्र परस्पर तुलना के लिए अत्यन्त सुगम एवं उद्युक्त रहते हैं। किसी स्वतन्त्र चर के मातृ बिन्दुओं पर एक अपेक्षित चौड़ाई और वारम्बारता के अनुसार ऊँचाई वाले घायतों को x-अक्ष पर घायत जाता है। घायतों की ऊँचाई y-अक्ष पर एक रेखा (Scale) मानकर वारम्बारता के अनुसार निर्धारित कर ली जाती है। घायत की चौड़ाई x-अक्ष पर वर्ग-अन्तराल के समान होती है। इसी चौड़ाई मानचित्र के प्रकार पर निर्भर करती है। इस प्रकार के चित्रों को बनाने की विधि निम्न उदाहरण द्वारा और अधिक स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 2.2 : सांख्यिकी की एक परीक्षा में 56 विद्यार्थी बैठे और उनके अंक विभिन्न वर्गों में इन प्रकार थे .--

अंकों के वर्ग (i)	वारम्बारता (ii)	संचयी वारम्बारता (iii)	सापेक्ष संचयी वारम्बारता (iv)
10-20	1	1	0.02
20-30	3	4	0.07
30-40	7	11	0.20
40-50	17	28	0.50
50-60	15	43	0.77
60-70	6	49	0.88
70-80	5	54	0.96
80-90	2	56	1.00

उपर्युक्त न्यास को वारम्बारता-आयत-चित्र द्वारा प्रदर्शित करने के लिए ग्राफ पेपर पर मुज एव मोटि-ग्रहण कीज दिया जाने है। फिर भुज-ग्रहण पर वर्ग-अन्तरालों को अंकित कर दिया जाता है। इन वर्ग-अन्तरालों पर तदनुसार वारम्बारता के समानुपाती ऊँचाई के आयत बना दिये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त चित्र वारम्बारता आयत चित्र होता है जैसाकि उदाहरण (2.2) के लिए चित्र (2-1) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 2-1 आयत चित्र

टिप्पणी : यदि वर्ग-अन्तराल समान न हों तो आयतों की ऊँचाई में वर्ग-अन्तरालों की अधिक या कम धारम्बारता होने का पता नहीं चलता है। इस स्थिति में आयतों के क्षेत्रफल की तुलना करना उचित है।

वारम्बारता बहुभुज तथा वारम्बारता वक्र

वारम्बारता बहुभुज को बनाने की विधि इस प्रकार है प्रेषित मान या वर्ग-अन्तरालों के मध्य-बिन्दुओं का मुज-अक्ष पर निर्धारित कर दिया जाता है। इन मानों की तदनुसार वारम्बारता के समान (समूहों के अनुसार) ऊँचाई पर इन मान बिन्दुओं के ऊपर इन बिन्दुओं को आलेखित कर दिया जाता है। आलेखित बिन्दुओं का सरल रेखा द्वारा क्रम में मिला देने पर प्राप्त चित्र को वारम्बारता बहुभुज कहते हैं।

वारम्बारता-आयतचित्र में प्रत्येक आयत के शिखर के मध्य बिन्दुओं को क्रम में मिला देने से वारम्बारता बहुभुज बन जाता है।

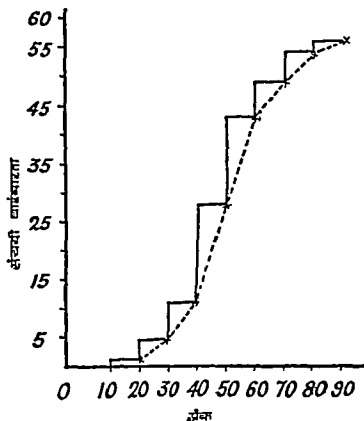
जैसे-जैसे प्रेषणा की सख्या अधिक होती जाती है और वर्ग-अन्तराल कम होता जाता है। वैसे-वैसे वारम्बारता बहुभुज या वारम्बारता आयत चित्र का रूप एक सरल वक्र की ओर प्रवृत्त होता जाता है। इस स्थिति में प्राप्त वर्ग को वारम्बारता वक्र कहते हैं। अतः परिष्कृतनात्मक अन्तः प्रेषण तथा अत्यधिक लघु-वर्ग-अन्तराल ज्ञान की स्थिति में वारम्बारता वक्र पूर्णतया सरल वक्र का रूप धारण कर लेता है।

संचयी वारम्बारता आयत चित्र व बहुभुज

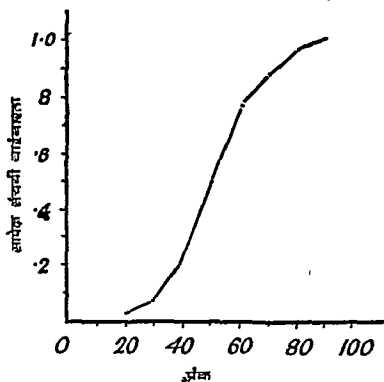
संचयी वारम्बारता के अन्तर्गत दिये गये बटन के अनुसार चर X और संचयी वारम्बारता F का ग्राफ पर आलेखित करने हेतु X के मानों को मुज पर और संचयी वारम्बारता F को कौटि पर उचित रेखनी मानकर आलेखित कर लिया जाता है। मान X_1 पर F_1 ऊँचाई की उर्ध्वाधर रेखा खींची जाती है। इस रेखा के शिखर बिन्दु से X -अक्ष के समान्तर एक रेखा खींची है जो अगले प्रेषित मान X_2 तक जाती है। इस रेखा के अन्तिम सिरे से Y -अक्ष के समान्तर रेखा खींची है जो F_2 ऊँचाई तक जाती है। यही क्रम चलता रहता है जब तक कि अन्त के प्रेषण तक न पहुँच जाये। इस प्रकार प्राप्त चित्र को संचयी वारम्बारता आयत चित्र कहते हैं। इस चित्र का एक तीव्र-रक्ष जैसा होता है। यदि इस चित्र में प्रत्येक आयत के दाएँ हाथ के शिखर-बिन्दुओं का मिला दें तो प्राप्त आरेख को संचयी वारम्बारता बहुभुज कहते हैं।

यदि न्याय वर्ग-अन्तरालों में वारम्बारता मूल्य दिया गया हो तो संचयी वारम्बारता तथा वर्ग-अन्तरालों की उच्च सीमा का लेख बिन्दुओं का आलेखित कर दिया जाता है और इन बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाकर संचयी वारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाता है।

यदि वारम्बारता के स्थान पर सापेक्ष वारम्बारताओं का प्रयोग किया जाये तो ऊँचाई शून्य से प्रारम्भ होकर ऊपर की ओर बढ़ जाती है। इन सापेक्ष वारम्बारताओं को 100 में गुणा कर दें तो प्रतिशत संचयी वारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाता है।



चित्र 2-2 संचयी बारम्बारता मायत चित्र व बहुभुज



चित्र 2-3 सापेक्ष बारम्बारता बहुभुज

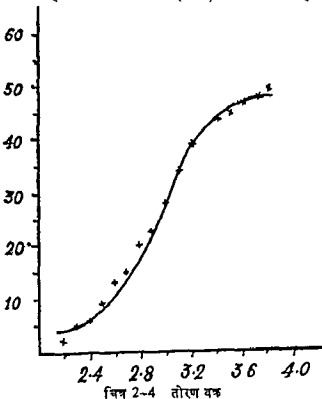
उदाहरण (2.2) में दिये हुए न्याम के लिए सचयी बारम्बारता चित्र और सचयी बारम्बारता बहुभुज को चित्र (2-2) में व सापेक्ष बारम्बारता बहुभुज को चित्र (2-3) में स्पष्टतः निर्देशित किया गया है।

तोरण वक्र

सामान्यतः किसी भी सचयी बारम्बारता वक्र को तोरण वक्र कहते हैं। जिस प्रकार बारम्बारता बहुभुज में सन्निकट सरल वक्र को समजित कर सचये हैं उन्ही प्रकार सचयी बारम्बारता बहुभुज में सन्निकट सरल वक्र समजित किया जा सकता है। इस वक्र को तोरण कहते हैं। व्यवहार में एक तोरण का समजन बारम्बारता वक्र की अपेक्षा सुगम है। ओजीव (Ogive) शब्द का वास्तुशिल्प में प्रयुक्त शब्द ओजी (Ogee) से लिया गया है, क्योंकि इस वक्र का रूप वास्तुशिल्प में एक विशेष संधि ओजी जैसा होता है।

तोरण के रूप को इस प्रकार समझ सकते हैं यदि कुछ व्यक्तियों को उनकी ऊँचाई के अनुसार खड़ा कर दें और उनके सिरों के मध्य बिन्दुओं को मिलाती हुई एक रेखा खींच दें तो यह रेखा तोरण को प्रदर्शित करती है। यह ध्यान रह कि ग्राफ की दृष्टि से इस स्थिति में व्यक्तियों की ऊँचाई कोटि पर और बारम्बारता भुज पर स्थित रहेगी।

उदाहरण 2.1 में दिये गये बारम्बारता वक्र को ही तोरण-वक्र के लिए प्रयुक्त किया गया है। स्पष्टतः इस उदाहरण में भार 0.1 किलोग्राम तक मापे गये हैं। सचयी बारम्बारता भी वहाँ प्रदर्शित है। तोरण वक्र को चित्र (2-4) में दिखाया गया है।



चित्र 2-4 तोरण वक्र

दण्ड आरेख

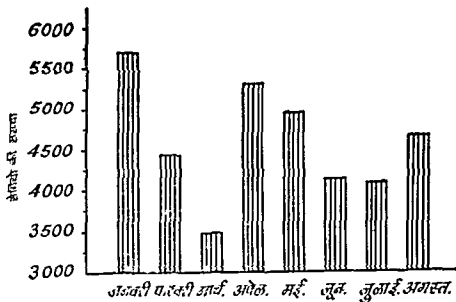
इन चित्रों का मुख्य उद्देश्य कुछ आंकड़ों को एक निश्चित काल या स्थान के अनुसार प्रदर्शित करना होता है। इन प्रकार के चित्रों में मूल्य (या प्रतिशत) के अनुसार आयत की ऊँचाई द्वारा प्रदर्शित किये जाते हैं। इन आयतों को चौड़ाई काल या स्थान के लिए भुज अक्ष पर अंकित बिन्दुओं के बीच की दूरी में कम होती है और आयत-बिन्दु के दो-दो ओर सम्मिलित होते हैं।

जिसी विशेष काल या स्थान सम्बन्धी आयत को किसी नामों या गुणों के अनुसार विभाजित करने विभिन्न वर्णों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। इन स्थिति में आयत की ऊँचाई वर्णों के आंकड़ों के अनुपात में विभाजित की जाती है। इस प्रकार आयत के प्रत्येक विभाजित वर्ण को भिन्न-भिन्न रंग या विभिन्न रेखाओं व बिन्दुओं द्वारा अंकित कर दिया जाता है। इस प्रकार के चित्र को उपविभाजित दण्ड-आरेख (Sub-divided bar diagram) कहते हैं। ऐसे चित्र विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन या किसी स्थान या काल में उपलब्ध वस्तुओं, व्यक्तियों की संख्या आदि से सम्बन्धित न्याय के लिए अधिक उपयुक्त होते हैं। यदि आयतों को भुज-अक्ष के साक्षित किया जाय तो ऐसे दण्ड-चित्र को विशिष्टता स्तम्भ-चित्र (Column chart) कहा जाता है।

उदाहरण 2.3 : एक अस्पताल में जनवरी में अगस्त तक औसत प्रति मास रोगियों की संख्या निम्न प्रकार थी :

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल
रोगियों की संख्या	5727	4452	3474	5317
मास	मई	जून	जुलाई	अगस्त
रोगियों की संख्या	4950	4119	4065	4648

इन आंकड़ों का चित्र 2-5 में स्तम्भ चित्र के रूप में प्रदर्शित किया गया है।

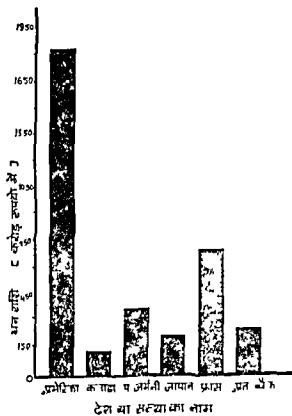


मास
चित्र 2-5 स्तम्भ चित्र

उदाहरण 2 4 उपरोक्त शीटों के अनुसार कुछ मुख्य देशों तथा संस्थानों द्वारा भारत सरकार को दिये गये ऋण की धन राशि नीचे दी गयी है

देश या संस्था	धन राशि (करोड़ रुपये में)
अमेरिका	1843.77
कनाडा	138.35
पश्चिमी जर्मनी	376.61
जापान	225.55
फ्रांस	34.20
अंतर्राष्ट्रीय बैंक	271.41

इन शीटों को दण्ड चित्र द्वारा निरूपित करने में निम्न चित्र या संस्था के नामों का मुझ क्रम पर समान दूरी पर प्ररिक्त किया गया है और इन चित्रों पर मानी हुई रेखाओं के अनुसार दण्डों को चित्रित किया गया है जगति चित्र 2 6 में दिखाया गया है।

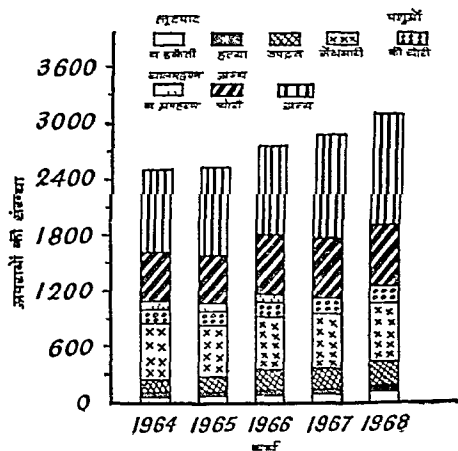


चित्र 2-6 दण्ड चित्र

उदाहरण 25 : निम्नलिखित मारणी में राजस्थान में विभिन्न वर्षों की घपराघों की घटनाएँ मासिक औसत के रूप में दी गई हैं।

वर्ष	1964	1965	1966	1967	1968
लूटपाट व डकैती	59	59	71	77	85
हत्या	39	43	44	48	52
सैधमारी	134	170	208	221	261
उपद्रव	591	547	576	610	640
पशुघों की चोरी	155	150	160	172	179
बालापहरण एवं अपहरण	81	85	80	—	—
अन्य चोरी	528	526	638	648	654
अन्य	896	935	970	1099	1212
योग	2483	2515	2747	2875	3083

इस ग्याप्त को उव विभाजित स्तम्भ चित्र द्वारा प्रदर्शित करने के लिए वर्षों को मुत्र पर और घपराघों की सख्या को कोटि पर प्रकित करने चित्र (2-7) में प्रस्तुत किया गया है।



चित्र 2-7 उपविभाजित दण्ड मारेख

लेखाचित्र

यदि प्रेक्षित मान दो चरों के हो तो उनके सम्बन्ध को समझने के लिए लेखाचित्र का उपयोग किया जाता है। ग्राफ पेपर पर किसी बिन्दु के निर्देशक (coordinates) क्रमशः प्रेक्षित चरों के मानों को दर्शाते हैं। प्रेक्षणों के अनुसार बिन्दुओं को आलेखित करके मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्रायः एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त हो सकता है।

इन चित्रों को बनाते समय यह सावधानी बरतनी चाहिए कि यदि दो चरों में से एक चर स्वतन्त्र² है और दूसरा इस पर आश्रित है तो स्वतन्त्र चर को X-अक्ष पर और आश्रित चर को Y-अक्ष पर लेना चाहिए। किसी रेखा-चित्र या वक्र-चित्र को बनाने के लिए कम से कम तीन बिन्दु आलेखित होने आवश्यक हैं। मुख्यतः वक्र बनाने के लिए पाँच प्रेक्षण उपलब्ध हों तो वक्र का रूप अधिक अच्छा निर्धारित किया जा सकता है।

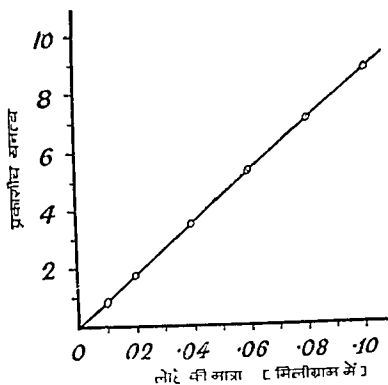
यह आवश्यक नहीं है कि आलेखित बिन्दुओं को मिला देने पर एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त हो ही। ऐसी स्थिति में आलेखित बिन्दुओं को रेखाओं द्वारा मिला देने हैं जिससे प्रेक्षणों के किसी विशेष क्रम में होने या न होने का स्पष्ट पता चल जाता है या यह बहें कि प्रेक्षण किसी नियम के अनुसार है या नहीं, यह जान लो जाता है। विभिन्न प्रकार के चित्रों को निम्न उदाहरणों द्वारा दिखाया गया है। इन उदाहरणों द्वारा पाठक को उपर्युक्त वर्णन का उपयोग समझ में आजाएगा।

उदाहरण 2.6 लोह निर्धारण के लिए किये गये एक प्रयोग में विभिन्न सांद्रता पर सूक्ष्मदर्शी द्वारा निम्न प्रकाशीय घनत्व प्राप्त हुए।

लोह (मिलीग्राम)	प्रकाशीय घनत्व
01	08
02	17
04	35
06	53
08	71
10	89

ऊपर दिये हुए प्रेक्षणों को रेखा चित्र द्वारा निरूपित करने के लिए लोह मात्रा को मुज-अक्ष पर और प्रकाशीय घनत्व को कीटि-अक्ष पर अवस्थित कर चित्र 2-8 में उन्हें प्रदर्शित किया गया है।

- 2 यहाँ स्वतन्त्र चर के अतिशय किन्हीं ऐसे विचार मानों से है जो स्वयं परिवर्तित होते ही बने बरें, मास, सप्ताह, घण्टा, स्थान या आयु आदि।

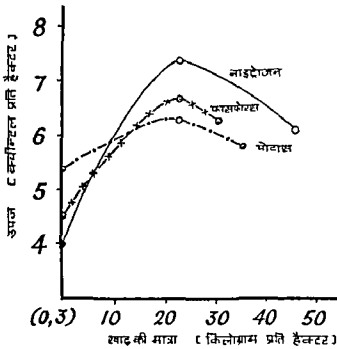


चित्र 2-8 मरत रेखा चित्र

उदाहरण 2.7 नाइट्रोजन, फासफोरस व पोटैशम के विभिन्न स्तरों का मूँगफली की उपज पर प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। प्रयोग प्रत्येक खाद के तीन स्तरों को लेकर किया गया और इन स्तरों पर निम्नोक्त उपज हुई

खाद की मात्रा (किलोग्राम प्रति हेक्टर)	उपज (किबटल प्रति हेक्टर)		
	नाइट्रोजन	फासफोरस	पोटैशम
0	3.95	4.50	5.37
22.4	7.36	6.66	6.24
44.8	6.10	6.25	5.81

तीनों खादों के लिए उपज-वक्र निम्न प्रकार से बनाये गये हैं। हम जानते हैं कि उपज, खाद की मात्रा पर निर्भर करती है। अतः खाद की मात्रा का भुज-अक्ष पर और उपज को कोटि-अक्ष पर लिया गया है क्योंकि सत्य-विज्ञान (Agronomy) में अधिस्तन प्रयोग तीन स्तरों पर किये जाते हैं अतः यहाँ वक्र का उदाहरण केवल तीन प्रेक्षणा के द्वारा ही दिया गया है। यह वक्र चित्र 2-9 में दृष्टव्य है।

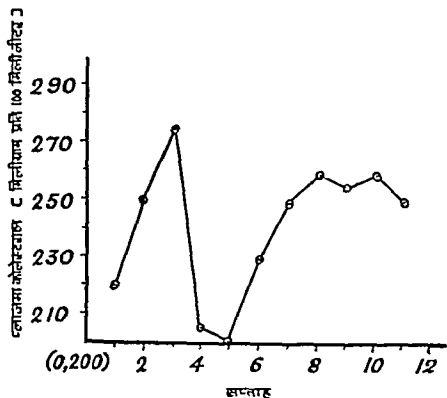


चित्र 2-9 वक्र चित्र

अवधारण 28 : एक अस्पताल मे एक विशेष प्रकार के रोगियो का साप्ताहिक प्लेजमा कोलेस्टेराल (plasma cholesterol) मिलिग्राम प्रति 100 मिलिलिटर नापा गया और निम्न परिणाम प्राप्त हुए —

खण्ड	प्लेजमा कोलेस्टेराल (मिलिग्राम प्रति 100 ग्राम)
1	220
2	250
3	275
4	205
5	200
6	230
7	250
8	260
9	255
10	260
11	250

उतार-चढ़ाव प्रदर्शित करने के लिए इन प्रेक्षणों को, भालेखित कर मिला दिया गया है। यहाँ सप्ताहों को भुज-प्रक्ष पर और प्लैज्मा कोलेस्ट्रॉल को कोटि-प्रक्ष पर लिया गया है, जैसा कि चित्र (2 10) में दिखाया गया है।



चित्र 2-10 सामान्य लेलाचित्र

पाई घारेख

जब किसी एक ही वस्तु, पदार्थ या लक्षण के विभिन्न संघटकों को बारम्बारता प्रदर्शित करना हो तो पाई घारेख चित्र स्थिति की अच्छी जानकारी कराता है। इस प्रकार के चित्र बनाने की विधि इस प्रकार है - पहले एक उचित अर्धव्यास का वृत्त खींच लिया जाता है, फिर जिस अनुपात में संघटकों के घाँकड़े हों, उसी अनुपात में 360° के कोण को विभाजित कर दिया जाता है। वृत्त में एक अर्धव्यास खींच लिया जाता है और इस पर एच के बाद एक परिकल्पित कोण बना दिये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक खण्ड एक विशेष संघटक को प्रदर्शित करता है। इन खण्डों को स्पष्ट रूप से प्रदर्शित करने के उद्देश्य से या तो प्रत्येक खण्ड को भिन्न-भिन्न रंगों से भर देते हैं या उन्हें विभिन्न बिन्दुओं व रेखाओं की सहायता से दिखाया जाता है।

खण्डों की संख्या अधिक होने की स्थिति में इस चित्र को बनाना उपयुक्त नहीं रहता।

उदाहरण 2.9 : भारत में शस्य (crops) के अनुसार पानी का प्रतिशत बटन निम्न प्रकार था :—

शस्य	प्रतिशत पानी
धान	45 0
गेहूँ	15 0
अन्य अनाज	12 0
दालें	7 0
कपास	4 0
गन्ना	6 0
अन्य शस्य	11 0

ऊपर दिये पानी के प्रतिशत बटन को पाई चार्ट द्वारा निरूपित करने के लिए कोण 360° को दिये हुए प्रतिशत पानी के अनुपात में सूत्र $\frac{360}{100} \times$ प्रतिशत द्वारा ज्ञात कर लिया गया जिससे निम्न कोण प्राप्त हुए —

शस्य	कोण
धान	$\frac{360}{100} \times 45 = 162 0^\circ$
गेहूँ	$\frac{360}{100} \times 15 = 54 0^\circ$
अन्य अनाज	$\frac{360}{100} \times 12 = 43 2^\circ$
दालें	$\frac{360}{100} \times 7 = 25 2^\circ$
कपास	$\frac{360}{100} \times 4 = 14 4^\circ$
गन्ना	$\frac{360}{100} \times 6 = 21 6^\circ$
अन्य शस्य	$\frac{360}{100} \times 11 = 39 6^\circ$



चित्र 2-11 पाई चार्ट

अर्ध-व्यास व-ग स्वीच कर केन्द्र व में इस अर्धव्यास पर एक के बाद एक ऊपर दिये हुए कोण बना दिये गये हैं। इस प्रकार वृत्तखण्डों को भिन्न भिन्न चिह्ना द्वारा प्रदर्शित कर दिया गया है जैसा कि चित्र (2-11) में दिखाया गया है।

प्रश्नावली

- 1 निम्न सारणी में दिये गये रई के आयात सम्बन्धी आँकड़ों को दण्ड आरेख द्वारा निरूपित कीजिये।

वर्ष	(1963-64)	(1964-65)	(1965-66)	(1966-67)
रई का आयात करोड़ रुपये में	48 8	58 1	46 2	56 2
वर्ष	(1967-68)	(1968-69)	(1969-70)	
रई का आयात करोड़ रुपये में	83 0	90 2	82 8	

- 2 चाय के उत्पादन एवं निर्यात सम्बन्धी आँकड़े 1965 से 1970 तक निम्न सारणी में दिये गये हैं। उत्पादन व निर्यात के सम्बन्ध को लेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

वर्ष	उत्पादन (दस लाख किलोग्राम)	निर्यात (दस लाख किलोग्राम)
1965	366 4	199 0
1966	374 8	179 2
1967	379 8	205 0
1968	398 2	209 3
1969	393 6	176 7
1970	421 3	208 4

- 3 एक प्रयोग उपचार की विभिन्न सांद्रताओं का गेहूँ के अंकुरण पर प्रभाव जानने के लिए किया गया। भिन्न-भिन्न सांद्रताओं पर निम्न सारणी के अनुसार प्रतिशत अंकुरण देखा गया —

सांद्रता (प्रतिशत घोल) नियंत्रण	प्रतिशत अंकुरण
01	90
02	85
03	62
04	35
05	23
06	9

सांद्रता और अंकुरण के सम्बन्ध को उपयुक्त लेखाचित्र द्वारा निरूपित कीजिये।

4 एक कक्षा में विद्यापियों की ऊँचाई का बटन इस प्रकार था —

ऊँचाई (से० मी०)	विद्यापियों की संख्या
130	3
131	4
132	9
133	11
134	7
135	12
136	8
137	5
138	3
139	4
140	1

उपर्युक्त ऊँचाई के बटन को ओजिडर चक्र द्वारा निरूपित कीजिये।

5 कीटनाशी एन्ड्रीन (Endrin) का प्रयोग करने के पश्चात् भिन्न भिन्न दिनों पर एफिड्स की (Aphids) प्रतिशत मृत्यु सत्या निम्न थी —

समय (कीटनाशी प्रयुक्त करने के बाद दिन)	प्रतिशत मृत्यु सत्या
1	60.4
2	67.9
3	75.3
7	83.8

इन प्रेक्षणाओं को मृत्यु चक्र द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

6 निम्नांकित सारणी में भारत की 1969-70 वर्ष में विभिन्न घनाजा की कुल उपज दी गयी है —

अनाज का नाम	उपज (दस लाख टनों में)
चावल	40.4
ज्वार	9.7
बाजरा	5.4
मक्का	5.7
रागी	2.2
गेहूँ	20.0
चना	5.5
दालें	6.2
अन्य	4.9

इन उपजों सम्बन्धी आंकड़ों को पाई-ग्राफ़ द्वारा प्रदर्शित कीजिये।

7 सत्रमण के कारण मृत्यु की घटनाएँ इस प्रकार पायी गयी —

सत्रमण के प्रकार	घाव सत्रमण	ग्युनोनिया	रक्त-पूजिता	उदर सत्रमण
मृत्यु-संख्या	53	34	28	24

इन आँकड़ा को दण्ड-चित्र द्वारा निरूपित कीजिये ।

8 एक प्रयोग में रंग के घोल की विभिन्न सांद्रताओं पर प्रकाशीय घनत्व नापा गया और निम्नान्वित प्रेक्षण प्राप्त हुए —

रंग की सांद्रता (ग्राम भार, प्रति लिटर)	प्रकाशीय घनत्व
2	0.2
4	0.4
8	0.8
12	1.0

सांद्रता एवं प्रकाशीय घनत्व को लेग्नाचित्र द्वारा निरूपित कीजिये ।

9 गेहूँ, चावल व चन की फसला पर फास्फोरस के विभिन्न स्तरों की अनुक्रिया (response) निम्नान्वित सारणी में दिखाई गयी है —

(P_2O_5) का स्तर (कि० ग्राम प्रति हेक्टर)	अनुक्रिया (एन्ट्रोल की बरेसा उपज में वृद्धि)		
	गेहूँ	चावल	चन
0	0	0	0
20	1.4	1.6	1.0
40	2.5	2.5	1.4
60	3.5	2.6	2.3
80	3.8	2.4	2.5

विभिन्न शक्तियों के लिए पृथक्-पृथक् अनुक्रिया-वक्र बनाइए ।

10 निम्न सारणी में दो परिवारों का मासिक व्यय विस्तृत रूप से दिया गया है :—

व्यय मद	परिवार-क (व्यय ₹० में)	परिवार-ख (व्यय ₹० में)
मास पदार्थ	30	90
बपड़े	7	35
मकान बिरामा	8	40
पढ़ाई	3	12
खर्च अदालत	5	40
अन्य वस्तुएँ	3	60
फुटकर	4	23

इन आँकड़ा को उभयुक्त आरेख द्वारा निरूपित कीजिये ।

(बी० काम० नागपुर 1967)

11. निम्न मोरुडो को वारम्भारता आयात-चित्र द्वारा निरूपित कीजिये :—

अल्पदिक वेद्यन (दशकों में)	बनियों की संख्या
10-15	7
15-20	19
20-25	27
25-30	15
30-40	12
40-50	12
50-60	8

(सी० ए०, 1963)

टिप्पणी :—विभिन्न परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्न मूल रूप में आम्स भाषा में थे जिनका हिन्दी अनुवाद यहाँ प्रस्तुत है ।

□ □ □

किन्हीं एवको पर लिए गये प्रेक्षणों की श्रेणी में सामान्यतः यह लक्षण पाया जाता है कि इन मापों में किसी एक मान पर केन्द्रित होने की प्रवृत्ति होती है और यह मान श्रेणी के लगभग मध्य में स्थित होता है। मुख्यतया तीन प्रकार के केन्द्रीय माप प्रयोग में लाये जाते हैं। ये तीन प्रकार के माप (1) माध्य (Mean), (2) माध्यिका (Median) और (3) बहुलक (Mode) है।

माध्य : ये तीन प्रकार के होते हैं :—

(क) समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

(ख) गुणोत्तर माध्य (Geometric mean)

(ग) हरात्मक माध्य (Harmonic mean)

व्यवहार में गुणोत्तर व हरात्मक माध्य का उपयोग बहुत कम होता है अतः इनका वर्णन संक्षेप में ही किया गया है।

समान्तर माध्य समान्तर माध्य को औसत भी कहते हैं। सांख्यिकी में समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि प्रेक्षण समान्तर श्रेणी में हों।

साधारणतया समान्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। व्यवहार में केवल माध्य लिखने से तात्पर्य समान्तर माध्य से ही समझा जाता है।

माना कि समग्र में N वस्तुएँ, अंश या एकक (Individual) हैं। अंशों पर अर X के प्रति प्रेक्षण लिये गये हैं। समग्र माध्य को बहुधा μ (म्यू) द्वारा निरूपित करते हैं और इसका परिकलन N अंशों पर लिये गये प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ द्वारा निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है।

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} \quad \dots(3.1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \dots(3.1.1)$$

यदि प्रतिदर्श में प्रेक्षणों की संख्या n हो तो सूत्र (3.1) में N के स्थान पर n का प्रयोग कर सकते हैं। इस स्थिति में प्रतिदर्श माध्य को \bar{X} द्वारा निरूपित करते हैं।

$$\text{अर्थात्} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \dots(3.2)$$

जबकि X_i प्रतिदर्शों का i वाँ प्रेक्षण है।

उदाहरण 3.1 : एक लाक्षणिक (clinical) अध्ययन के अन्तर्गत छह वर्ष की आयु के पन्द्रह बच्चों के भार निम्न पाये गये :—

भार . 160, 135, 135, 170, 180, 135, 145, 165, 136, 145
(विलोपाम) 165, 152, 132, 160, 175।

इन प्रेक्षणों के द्वारा छह वर्ष की आयु के बच्चा का माध्य भार निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\sum X_i = (160 + 135 + \dots + 160 + 175)$$

$$= 2290$$

घौर $n = 15$

$$\therefore \bar{X} = \frac{2290}{15}$$

$$= 152.67$$

प्रायः न्यास में प्रत्येक प्रेक्षण एक ही बार घटित न होकर कई बार घटित होता है। इन प्रेक्षणों का समान्तर माध्य इस प्रकार परिवर्तित करते हैं। प्रेक्षणों को बारम्बारता बटन के रूप में व्यवस्थित करते हैं। इन मानों को तदनुसार बारम्बारता से गुणा करके जोड़ दिया जाता है और इस सख्या को बारम्बारताओं के योग से भाग देने पर माध्य ज्ञात हो जाता है। माना कि X पर प्रतिदर्श प्रेक्षण और उनकी तदनुसार बारम्बारता निम्न प्रकार है —

प्रेक्षण (X)	बारम्बारता (f)
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
\vdots	\vdots
X_k	f_k

इस स्थिति में माध्य \bar{X} के लिए निम्नांकित सूत्र है।

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_k X_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k} \quad \dots (3.3)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k f_i X_i}{n} \quad \dots (3.3.1)$$

जहाँ $\sum_{i=1}^k f_i = n$ (प्रतिदर्श आसम्प)

उदाहरण 3.2 : एक कारखाने में काम करने वाले व्यक्तियों का मासिक वेतन और उनकी संख्या नीचे दी गयी है।

मासिक आय (X) (रुपये में)	काम करने वालों की संख्या (f)
75 00	16
82.50	15
150 00	10
225 00	8
300 00	4
500 00	2
760 00	1

इस फ्रेक्टी में काम करने वालों की प्रति व्यक्ति मासिक आय, माध्य द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। अतः सूत्र (3.3.1) के अनुसार

$$X = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

$$\sum f_i X_i = (75 00 \times 16 + 82.50 \times 15 + \dots + 760 \times 1)$$

$$= 8697 50$$

$$\sum f_i = (16 + 15 + 10 + \dots + 1)$$

$$= 56$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{8697.50}{56} = 155.31$$

प्रति व्यक्ति मासिक वेतन 153.31 रुपये है।

यदि प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो और प्रेक्षणों में अन्तर भी कम हो तो प्रेक्षणों को वर्गों में बाट दिया जाता है और प्रत्येक वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की बारम्बारता के रूप में लिख दिया जाता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है—

वर्ग	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
\vdots	\vdots
$X_k - X_{k+1}$	f_k

$(X_1 - X_{i+1})$ एक वर्ग को निरूपित करता है जिसकी बारम्बारता f_i है जयकि $i = 1, 2, 3, \dots, k$ । साथ ही वर्गों की निम्न सीमा को वर्ग में सम्मिलित माना गया है। इस स्थिति में माध्य का परिचलन करने के लिये सूत्र (3.3.1) का ही प्रयोग करना होता है। यहाँ चर X के मान, प्रत्येक वर्ग की निम्न व उपरि सीमा के माध्य के समान मान लेते हैं जैसे वर्ग का माध्य मान कहते हैं। माना कि X_1 और X_2 का माध्य मान (Central value) Y_1 है, X_2 व X_3 का माध्य Y_2 है ... और X_k व X_{k+1} का माध्य Y_k है। सूत्र (3.3.1) को Y के पदों में निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i Y_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \quad \dots (3.4)$$

सूत्र (3.4) को सहायता से वर्गीकृत प्रेक्षणों का माध्य मान लिया जा सकता है।

इस प्रकार परिचलित माध्य वास्तविक समान्तर माध्य से भिन्न हो सकता है क्योंकि यहाँ यह कल्पना की गयी है कि वर्ग में सभी प्रेक्षण वर्ग के मध्यमान पर केन्द्रित हैं। प्रायः यह कल्पना पूर्णतया सत्य नहीं है। साधारणतया अन्तराल छोट होने की दशा में यह त्रुटि अधिक नहीं होती है। इस विधि का उपयोग समय बचाने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 3.3 एक कीट सम्बन्धी प्रयोग में डिम्ब-काल (Larval period) के लिये वर्ग-अन्तराल और इन वर्गों में कीटों की संख्या इस प्रकार थी —

वर्ग अन्तराल (दिवसों में)	कीटों की संख्या
25—27	14
27—29	26
29—31	13
31—33	11
33—35	2

कीट का माध्य डिम्ब काल परिचलित करने के लिए पहले मध्य मानों का ज्ञान करना होता है।

वर्गों के मध्य मान Y_i 26, 28, 30, 32, 34

कीटों की संख्या f_i 14, 26, 13, 11, 2

$$\therefore \sum_{i=1}^5 f_i Y_i = (26 \times 14 + 28 \times 26 + 30 \times 13 + 32 \times 11 + 34 \times 2)$$

$$= 1904$$

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 66$$

1

$$\bar{X} = \frac{1904}{66} = 28.85 \text{ दिन}$$

गुणोत्तर माध्य : प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ का गुणोत्तर माध्य (G M) ज्ञात करने के लिए यह सूत्र है —

$$G M = (X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n)^{1/n}$$

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ अपनी तदनुसार बारम्बारताओं $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ सहित दिये गये हों तो गुणोत्तर माध्य निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$G M = \left(X_1^{f_1} \cdot X_2^{f_2} \cdot X_3^{f_3} \dots X_k^{f_k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{जबकि} \\ \sum_{i=1}^k f_i = n \end{array} \right\}$$

यदि न्यास अनुपात या प्रतिशत सम्बन्धी हों तो गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना उचित है।

हरात्मक माध्य : प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ का हरात्मक माध्य (H M) के लिए सूत्र यह है —

$$\frac{1}{H M} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \dots + \frac{1}{X_n} \right) \quad \dots (3.7)$$

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ की बारम्बारता क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ हों तो हरात्मक माध्य के लिए निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करते हैं —

$$\frac{1}{H M} = \frac{1}{n} \left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \dots + \frac{f_k}{X_k} \right) \quad \dots (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{जबकि} \\ \sum_{i=1}^k f_i = n \end{array} \right.$$

हरात्मक माध्य का प्रयोग मात्रात्मक दरो जैसे प्रति रुपया चीजों की मात्रा या प्रति घटा गति आदि के लिए उपयोगी रहा है।

यदि प्रेक्षित मानों में कोई मान शून्य हो तो गुणोत्तर या हरात्मक माध्य ज्ञात करना सम्भव नहीं है। इसके अतिरिक्त यदि श्रेणात्मक प्रेक्षणों की सख्या विषम हो तो गुणोत्तर माध्य कभी-कभी काल्पनिक हो जाता है। ये कठिनाइयाँ इन माध्यों का महत्त्व कम करती हैं।

माध्यिका

परिभाषा : माध्यिका वह विचर मान है जो कि सम्पूर्ण न्यास को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि यदि समस्त न्यास को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने रखें तो मध्य विचर मान माध्यिका कहलाना है। समग्र या प्रतिदर्श दोनों के लिए एक ही विधि लागू होती है।

माध्यिका को निम्न स्थितियों में ज्ञात करना अधिक उपयोगी है। यदि दिये गये न्यास में कुछ चरम मान विद्यमान हों जैसे एक कार्यालय में काम करने वालों के मासिक वेतन 110, 150 215 260 700 1200 रुपये हों, तो इस स्थिति में माध्यिका अन्य की अपेक्षा एक अच्छा केन्द्रीय माप है क्योंकि यहाँ माध्य 438.33 रु है जबकि अधिकतर काम करने वालों का वेतन 260 रु या इससे कम है।

यदि न्यास वर्ग अन्तरालों के रूप में हो और इसके प्रारम्भिक या अन्तिम में से कोई एक वर्ग या दोनों वर्ग विवृत्तान्त हों तो माध्यिका केन्द्रीय माप के लिए उपयुक्त है जैसे निम्न बटन के लिए माध्यिका ज्ञात करना उपयुक्त है —

व्यक्तियों की आयु (वर्षों में)	व्यक्तियों की संख्या
< 5	3
5—10	9
10—20	16
20—30	8
30—40	15
40—50	20
50—60	6
> 60	4

रिक्त बटन में सुले वर्गों को लेना प्रायः अनिवार्य हो जाता है। यदि प्रेक्षणों की ही सुले रूप में लिया गया हो जैसे 60 वर्ष से अधिक आयु के व्यक्तियों की संख्या ज्ञात की गयी हो तो इस स्थिति में अन्तिम वर्ग की उपरि सीमा नहीं है।

यह गुणात्मक न्यास के लिए भी उपयुक्त है। इन स्थिति में एकाकी काटि प्रायः लिगी जाती है जैसे व्यक्तियों की सुन्दरता, वस्तुओं का स्वाद आदि।

यदि प्रत्येक प्रेक्षित भ्रम अलग अलग लिया गया हो और कुछ प्रेक्षणा की संख्या n हो तो दो स्थितियाँ सम्भव हैं।

- (1) जब n विषम है। (2) जब n सम है।

स्थिति 1 : — n विषम होने की स्थिति में n को गदं $n = 2k + 1$ के रूप में लिग सकते हैं जबकि k एक पूर्ण संख्या है। माना कि समस्त प्रेक्षित भ्रमों को आरोही क्रम में रखा गया है तो $(k + 1)$ वें विचर मान से k भ्रम पहले होंगे जिनके मान इस मान से

क्रम या समान होंगे और k मान बाद में होंगे जिनके मान इसके समान या इससे अधिक होंगे। अतः $(k+1)$ वा प्रेक्षित क्रम माध्यिका बटलाता है।

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{2k+1}$$

↑
माध्यिका

जबकि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{2k+1}$ क्रम में व्यवस्थित हैं।

उदाहरण 34 उपलब्ध पाँचवें के अनुसार बिहार राज्य में विभिन्न सिंचाई योजनाओं का अनुमानित व्यय इस प्रकार है —

$$\begin{array}{l} \text{रुपये (दस लाख —)} \\ \text{रुपये में)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 268, 660, 152, 88, 81, 99, \\ 1797, 113, 152 \end{array}$$

यह न्यास आरोही क्रम में निम्न प्रकार है।

$$81, 88, 99, 113, 152, 152, 268, 660, 1797$$

यहाँ मानों की संख्या 9 है जो कि विषम है। नियम के अनुसार पाँचवाँ मान माध्यिका है।

अतः माध्यिका = 152 रु (दस लाख)

स्थिति 2 — n सम होने की स्थिति में, सर्वदा $n=2k$ के रूप में लिखा जा सकता है जबकि k एक पूर्ण संख्या है। इस स्थिति में केवल एक प्रेक्षित क्रम मध्य क्रम नहीं होगा तथापि बीच के दो क्रम मध्य क्रम के रूप में होंगे। प्रेक्षित क्रमों (प्रेक्षणों) को सर्वप्रथम क्रम में रखना अनिवार्य है। बीच के दो प्रेक्षित क्रमों का समांतर माध्य ही माध्यिका होती है।

माना कि आरोही क्रम में व्यवस्थित $2k$ प्रेक्षित मान निम्न हैं

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{k-1}, X_k, X_{k+1}, X_{k+2}, X_{k+3}, \dots, X_{2k}$$

यहाँ k वें (k th) मान से $[k-1]$ मान पहले और $(k+1)$ वें मान से $[k-1]$ मान बाद में है। अतः

$$\text{माध्यिका } Md = \frac{X_k + X_{k+1}}{2}$$

उदाहरण 35 : 1972 के भारतीय पाँचवें के अनुसार मध्य प्रदेश में विभिन्न सिंचाई योजनाओं पर अनुमानित व्यय निम्न है —

$$\text{व्यय [लाख रुपये]} \quad 159, 120, 172, 142, 201, 107$$

इस न्यास की माध्यिका ज्ञात करने के लिए इन पाँचवें का आरोही क्रम इस प्रकार है — 107, 120, 142, 159, 172, 201

यहाँ मानों की संख्या 6 है जोकि सम है अतः ऊपर दिये हुए नियम के अनुसार तीसरे व चौथे मान का समांतर माध्य माध्यिका होगी।

$$\text{माध्यिका} = \frac{142 + 159}{2}$$

$$= \frac{301}{2}$$

$$= 150.5 \text{ कात रूप}$$

यदि प्रत्येक प्रेक्षित घन परिवर्ती बारम्बारता सहित सारणीबद्ध हो तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले प्रेक्षणा को उनके मान के अनुसार आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है। यह ध्यान रहे कि इन प्रेक्षित मानों की तदनुसार बारम्बारता बही रहती है। पहले स्तम्भ में सचयी बारम्बारता में, जो बारम्बारताओं के योग के समान है, एक जोड़कर इसका आधा भाग ज्ञात कर लिया जाता है अर्थात् यदि बारम्बारताओं का योग n है तो सख्या $\frac{n+1}{2}$ को ज्ञात कर लिया जाता है। फिर सचयी बारम्बारता में यह

देखते हैं कि वह कौनसा न्यूनतम सचयी बारम्बारता है जो सख्या $\frac{n+1}{2}$ के समान है या उससे अधिक है अर्थात् इस सख्या का किस सचयी बारम्बारता में समावेश है। इस सचयी बारम्बारता का जो तदनुसार प्रेक्षित मान होता है वही माध्यिका होती है।

माध्यिका के परिक्लन करने की विधि निम्न उदाहरण द्वारा और अधिक स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 3.6 एक पंचद्वी में काम करने वालों का प्रति दिन वेतन और उनकी निम्न बारम्बारता सारणी में दी गयी है।

यहाँ प्रेक्षित मानों को क्रम में ही दिया गया है।

प्रतिदिन वेतन की दर (X) (रुपये)	कार करने वालों की संख्या (f)	सं. कार. (F)
2.0	2	2
2.5	2	4
3.0	7	11
3.5	14	25
4.0	20	45
5.0	6	51
12.0	3	54

$$\text{यहाँ } \frac{n+1}{2} = \frac{54+1}{2} = 27.5$$

सख्या 275 का सचयी बारम्बारता 45 में समावेश है। अतः स बार 45 के अनुसार माध्यिका वेतन 40 रु प्रति दिन है।

जब फ्रीक्डे वर्गों में विभाजित किये गये हों अर्थात् सतत न्यास की स्थिति हो। [वर्गों की स्थिति में सतत न्यास से अभिप्राय है कि सदैव पिछले वर्ग की उपरि सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के समान है।] तो सर्वप्रथम वर्गों को क्रम में रख दिया जाता है और फिर इस बटन के लिए सचयी बारम्बारता ज्ञात करली जाती है। बारम्बारता के योग का अर्धा अर्थात् $\frac{n}{2}$ ज्ञात कर लिया जाता है। पिछले खण्ड में दी गयी विधि की भाँति यह

ज्ञात करते हैं कि सख्या $\frac{n}{2}$ का किम सचयी बारम्बारता में समावेश है। इस सचयी बारम्बारता के सम्मुख जो वर्ग होता है वही माध्यिका वर्ग होता है। किन्तु माध्यिका का केवल एक ही मान सम्भव है अर्थात् माध्यिका अद्वितीय है। अतः इस वर्ग में निम्नतम और उपरि सीमा के बीच का एक मान माध्यिका होगा या सीमा मानों में से स्वयं भी एक मान माध्यिका हो सकता है। इस अद्वितीय मान को नीचे दिये गये सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। माना कि प्रमित बारम्बारता बटन निम्न है।

वर्ग	बार०	स० बार०
$X_1 - X_2$	f_1	F_1
$X_2 - X_3$	f_2	F_2
$X_3 - X_4$	f_3	F_3
\vdots	\vdots	\vdots
$X_i - X_{i+1}$	f_i	F_i
\vdots	\vdots	\vdots
$X_k - X_{k+1}$	f_k	$F_k = n$

[जहाँ $\sum f_i = n$]

तो सूत्र है,

$$(\text{माध्यिका}) M_0 = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - C}{f} \times I \quad (39)$$

जबकि L_0 माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा है।

C माध्यिका वर्ग से ऊपर वाले वर्गों के सम्मुख स बार है।

f माध्यिका वर्ग की बारम्बारता है।

I माध्यिका वर्ग की उपरि व निम्न सीमा का अन्तर है अर्थात् वर्ग अन्तराल है।

सूत्र (39) के औचित्य को इस प्रकार समझ सकते हैं। माध्यिका तक सचयी बारम्बारता $\frac{n}{2}$ है और $\left(\frac{n}{2} - C \right)$, माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा और माध्यिका के बीच की बारम्बारता है। यह माना कि बारम्बारता f वर्ग अंतराल में समरूप से बटी हुई

है। तो $\frac{\frac{n}{2} - C}{f} \times 1$ बारम्बारता $\left(\frac{n}{2} - C \right)$ के लिए आवश्यक लम्बाई है। अतः L_0 में इस लम्बाई को जोड़ देने पर सूत्र [39] प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 37 एक सर्वेक्षण में कुछ व्यक्तियों की आयु ज्ञात की गयी जिसका निचोड़ा सहित बारम्बारता बटन निम्नांकित सारणी में दिया गया है।

आयु वर्ग (वर्ष) (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	सं. बार. (F)
<5	5	5
5—10	9	14
10—20	16	30
20—30	8	38
30—40	15	53
40—50	20	73
50—60	6	79
>60	4	83

उपर्युक्त ग्याम में वर्ग विवृतात हैं। यदि माध्य ज्ञात करना चाहें तो अन्तिम वर्ग का मध्य मान ज्ञात करना सम्भव नहीं है। अतः यहाँ माध्य का परिवर्तन करना सम्भव नहीं है, परन्तु माध्यिका का परिवर्तन करना सम्भव है।

$$\text{संख्या } \frac{n}{2} = \frac{83}{2} = 41.5$$

$\frac{n}{2}$ के मान 41.5 का स. बार. 53 में समावेश है। अतः माध्यिका वर्ग [30—40] है।

सूत्र (39) के अनुसार माध्यिका,

$$\begin{aligned} M_d &= 30 + \frac{41.5 - 38}{15} \times 10 \\ &= 30 + \frac{35}{15} \\ &= 32.33 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

चतुर्थक

परिभाषा : ये वे विचर-मान हैं जो सम्पूर्ण बारम्बारता को या जिन पर कोटि बारम्बारता बटन वक्र के घन्दर के क्षेत्र को चार बराबर भागों में विभाजित करती हैं। वह विचर मान जिस पर कोटि कुल बारम्बारता-वक्र के घन्दर के क्षेत्र को 1/3 के अनुपात में विभाजित करती है, प्रथम चतुर्थक, 1/4 के अनुपात में विभाजित करती है, द्वितीय चतुर्थक और जो 3/4 के अनुपात में विभाजित करती है, तृतीय चतुर्थक कहलाता है और इन चतुर्थकों को क्रमशः Q_1, Q_2, Q_3 द्वारा निरूपित करते हैं।

ऊपर दी हुई परिभाषा से स्पष्ट है कि द्वितीय चतुर्थक और माध्यिका एक समान होते हैं।

प्रायः Q_1 को लघु चतुर्थक व Q_3 को गुरु चतुर्थक भी कहते हैं।

चतुर्थक ज्ञात करने के लिये लगभग उसी प्रकार की रीति का अनुसरण करते हैं जो माध्यिका निकालने के काम आती है। प्रेक्षणों को क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है। इस बटन में सचयी बारम्बारताएँ ज्ञात कर ली जाती हैं। यदि घसतत न्यास हो तो Q_1, Q_2, Q_3 निकालने के हेतु क्रमशः सख्याओं $\frac{n+1}{4}, \frac{2(n+1)}{4}$ व $\frac{3(n+1)}{4}$ का परिकलन कर लिया जाता है। इन मानों का जिन सचयी बारम्बारताओं में समावेश होता है उनके तदनुसार विचर मान क्रमशः Q_1, Q_2, Q_3 को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 3.8 यदि उदाहरण (3.1) में दिये गये बारम्बारता बटन के चतुर्थक ज्ञात करने हों तो इनका परिकलन निम्न प्रकार से कर सकते हैं —

$$n=50$$

$$Q_1 \text{ के लिए } \frac{n+1}{4} = \frac{51}{4} = 12.75, \text{ इस मान का स बार 13 में समावेश है अतः}$$

$$Q_1 = 2.6 \text{ किलोग्राम}$$

$$Q_2 \text{ के लिए } \frac{2(n+1)}{4} = 25.5, \text{ इस मान का स बार 28 में समावेश है अतः}$$

$$Q_2 = 3.0 \text{ किलोग्राम}$$

$$Q_3 \text{ के लिए } \frac{3(n+1)}{4} = 38.25, \text{ इस मान का स बार 39 में समावेश है अतः}$$

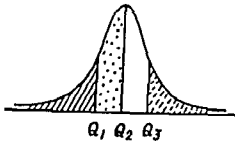
$$Q_3 = 3.2 \text{ किलोग्राम}$$

यदि न्यास को वर्गों में विभाजित करके बारम्बारता सहित सारणीबद्ध किया गया हो अर्थात् सतत न्यास हो तो इन वर्गों को क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है और सचयी बारम्बारता ज्ञात कर ली जाती है जैसा कि माध्यिका के लिये किया गया है। इसके पश्चात् चतुर्थक निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात किये जा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि

Q_1, Q_2, Q_3 के लिए चतुर्थक वर्ग का निर्णय क्रमशः सख्याओं $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}, \frac{3n}{4}$ के आधार पर होता है।

$$Q_k = L_{ok} + \frac{\frac{K \times n}{4} - C_k}{f_k} \cdot I_k \quad (3.10)$$

जब कि $K=1, 2, 3$, रख देने पर क्रमशः चतुर्थक Q_1, Q_2, Q_3 के लिए सूत्र उपलब्ध हो जाता है।



चित्र 3-1 चतुर्थकों का प्रारेखी निरूपण

सूत्र (3.10) में,

L_{ok} - K वें चतुर्थक के लिए वर्ग की निम्नतम सीमा है।

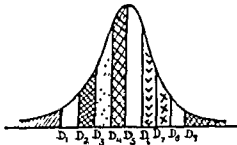
C_k - K वें चतुर्थक के वर्ग से ऊपर वाले वर्गों के सम्मूल सषयी बारम्बारता है।

f_k - K वें चतुर्थक-वर्ग की बारम्बारता है।

I_k - K वें चतुर्थक-वर्ग की उपरि व निम्न सीमा के अन्तर के समान है।

दशमक

परिभाषा — दशमक वे विचर मान हैं जो कुल बारम्बारता को दस समान भागों में विभाजित करते हैं। यदि चर सतत है तो वे विचर मान जिन पर कोटियाँ वक्र के नीचे के क्षेत्र को दस समान क्षेत्रों में विभाजित करती हैं दशमक कहलाते हैं। इन्हें $D_1, D_2, D_3, \dots, D_9$ द्वारा निरूपित करते हैं।



चित्र 3-2 दशमकों का प्रारेखी प्रस्तुतीकरण

असतत न्यास के दशमक D_k , ($k=1, 2, 3, \dots, \dots, 9$) का परिवर्तन करने के लिए सख्याओं $\frac{(n+1)K}{10}$ को ज्ञात करना होता है इसी सख्या का जिस सचयी बार में समावेश होता है उसका तदनुसार विचर मान दशमक होता है (स्पष्टतः D_5 माध्यिका को निरूपित करता है।)

उदाहरण 3. 9 — यदि उदाहरण (2 1) में दिये गये बारम्बारता बटन के लिए D_3 , D_8 ज्ञात करने हैं तो D_3 के लिए सख्या $\frac{3(n+1)}{10} = \frac{3 \times 51}{10} = 15.3$ । इस सख्या का स बार 20 में समावेश है। अतः दशमक $D_3 = 2.8$ । इसी प्रकार D_8 के लिए $\frac{8(n+1)}{10} = 41.8$, इस सख्या का स बार 44 में समावेश है। अतः आठवाँ दशमक $D_8 = 3.4$ । यदि घाँवड़े सतत वर्गों में विभाजित करने लिखे गये हों तो चतुर्थक के समरूप निम्न सूत्र का प्रयोग करके दशमक D_k (जब कि $K=1, 2, 3, \dots, 9$) ज्ञात कर सकते हैं।

$$D_k = L_{ok} + \frac{\frac{k \times n}{10} - C_k}{f_k} \times I_k \quad (3.11)$$

यहाँ दशमक वर्गों को सख्या $\frac{K \times n}{10}$ के द्वारा ज्ञात किया गया है।

इस सूत्र में प्रत्येक सन्वैतन के लिए k वाँ दशमक शब्द का प्रयोग करना होता है।

शततमक

परिभाषा — किसी बारम्बारता बटन में शततमक के विचर मान हैं जो कुल बारम्बारता को सौ समान भागों में विभाजित करते हैं। यदि चर सतत है तो वे विचर मान, जिन पर कोटियाँ वक्र के नीचे के क्षेत्र को सौ समान भागों में विभाजित करती हैं शततमक कहलाते हैं। इन्हें P_k द्वारा निरूपित करते हैं जब कि $k=1, 2, 3, \dots, 99$ ।

यदि असतत न्यास हो तो शततमक ज्ञात करने के लिए सख्याओं $\frac{K(n+1)}{100}$ को ज्ञात करना होता है उसके तदनुसार विचर मान ही k वाँ शततमक होता है।

यदि बारम्बारता बटन प्रेक्षणों को सतत वर्गों में विभाजित कर के दिया गया हो तो चतुर्थक के समरूप सूत्र शततमक के लिए दिया जा सकता है।

$$P_k = L_{ok} + \frac{\frac{K \times n}{100} - C_k}{f_k} \times I_k \quad (3.12)$$

जब कि $k=1, 2, 3, \dots, \dots, 99$

इस सूत्र में संकेतनों का वर्णन k वें चतुर्थक के स्थान पर k वें शततमक शब्द को प्रयोग करके दिया जा सकता है। स्पष्टतः P_{80} माध्यिका को निरूपित करता है।

उदाहरण 3 10 — गणित की परीक्षा में एक कक्षा में विद्यार्थियों के अंकों का विभिन्न वर्ग अन्तरालों के अनुसार निम्न बंटन पाया गया।

अंकों के वर्ग - अन्तराल	विद्यार्थियों की संख्या [बार.]	ध. बार.
0-10	3	3
10-20	6	9
20-30	16	25
30-40	20	45
40-50	32	77
50-60	44	121
60-70	9	130
70-80	4	134
80-90	2	136
90-100	1	137

(i) माध्यिका (ii) प्रथम व तृतीय चतुर्थक (iii) दूधरे व सातवें दशमक (iv) पचपनवें शततमक, का परिकलन निम्न रूप में किया जाता है।

(i) सूत्र (3 9) के अनुसार माध्यिका के लिए

$$\frac{n}{2} = \frac{137}{2} = 68.5$$

आरम्भवारता 68.5 का स बार 77 में समावेश है। अतः माध्यिका वर्ग-अन्तराल [40-50] में स्थित है।

$$\text{माध्यिका } Md = 40 + \frac{68.5 - 45}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{23.5}{32} \times 10$$

$$= 47.3 \text{ पर}$$

(ii) इसी प्रकार प्रथम व तीसरा चतुर्थक ज्ञात करने के हेतु सूत्र (3 10) का प्रयोग किया गया है।

$$\text{प्रथम चतुर्थक } Q_1 \text{ के लिए } \frac{n}{4} = \frac{137}{4} = 34.25$$

इस मान का स बार 45 में समावेश है अतः

$$Q_1 = 30 + \frac{34 \cdot 25 - 25}{20} \times 10$$

$$= 30 + \frac{9 \cdot 25}{20} \times 10$$

$$= 34.62 \text{ अंक}$$

इसी प्रकार तृतीय चतुर्थक Q_3 के लिए $\frac{3 \times n}{4} = 102.75$

अतः Q_3 वर्ग-अन्तर्गत 50-60 में स्थित है।

$$Q_3 = 50 + \frac{102.75 - 77}{44} \times 10$$

$$= 50 + \frac{25.75}{44} \times 10$$

$$= 55.85 \text{ अंक}$$

(iii) दशमक ज्ञात करने के लिये सूत्र (3.11) का प्रयोग किया गया है। D_2 के लिए

$$\text{संख्या } \frac{2 \times n}{10} = \frac{137 \times 2}{10} = 27.4 \text{ है।}$$

अतः D_2 वर्ग-अन्तराल [30-40] में स्थित है।

$$D_2 = 30 + \frac{27.4 - 25}{20} \times 10$$

$$= 30 + \frac{2.4}{20}$$

$$= 31.2 \text{ अंक}$$

इसी प्रकार D_7 के लिये $\frac{7 \times n}{10} = \frac{137 \times 7}{10} = 95.9$

अतः दशमक D_7 वर्ग-अन्तराल [50-60] में स्थित है।

$$\therefore D_7 = 50 + \frac{95.9 - 77}{44} \times 10$$

$$= 50 + \frac{18.9}{44} \times 10$$

$$= 54.3 \text{ अंक}$$

शततमक के लिए सूत्र [3.12] का प्रयोग किया गया है।

$$\text{पचपनवें शततमक } P_{65} \text{ के लिए सख्या } \frac{55 \times n}{100} = \frac{55 \times 137}{100} = 75.35$$

यह सख्या वर्ग-अन्तराल [40-50] में स्थित है।

$$\therefore P_{65} = 40 + \frac{75.35 - 55}{32} \times 10$$

$$= 40 + \frac{30.35}{32} \times 10$$

$$= 49.45 \text{ घक}$$

बहुलक

परिभाषा बहुलक किसी घर पर प्रेक्षणो के समुच्चय में वह मान है जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है।

यदि समुच्चय में सबसे अधिक बारम्बारता वाले एक से अधिक मान हो तो इस स्थिति में एक बटन के एक से अधिक बहुलक हो सकते हैं। यदि बारम्बारता बटन बिना किसी अन्तरालो के दिया गया हो तो बटन को देपकर ही बहुलक ज्ञात कर सकते हैं। जैसे उदाहरण [3.6] में काम करने वाली बी अधिकतम सख्या अर्थात् अधिकतम बारम्बारता 20 है अत बहुलक 40 रु प्रतिदिन हुआ।

यदि सान्धे वर्गों में विभाजित करने बारम्बारता सहित तारपीबद्ध किये गये हो तो बहुलक का निम्न सूत्र की सहायता से पत्खसन कर सकते हैं। माना कि बारम्बारता बटन निम्न है।

वर्ग-अन्तराल	बारम्बारता
$X_1 - X_2$	f_1
$X_2 - X_3$	f_2
$X_3 - X_4$	f_3
\vdots	\vdots
$X_{k-1} - X_k$	f_{k-2}
$X_k - X_{k+1}$	f_k
$X_{k+1} - X_{k+2}$	f_{k+1}
\vdots	\vdots
$X_n - X_{n+1}$	f_n

तो बहुलक,

$$M_0 = L_0 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times 1 \quad (3.13)$$

जब कि L_0 = बहुलक वर्ग की निम्नतम सीमा है। प्रति यूनिट अधिकतम बारम्बारता के तदनुसार वर्ग को बहुलक वर्ग करते हैं।

Δ_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता का इससे पिछले वर्ग की बारम्बारता से अन्तर

Δ_2 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता का इससे अगले वर्ग की बारम्बारता से अन्तर

I = बहुलक वर्ग की उपरि सीमा का निम्न सीमा से अन्तर।

माना कि ऊपर/दिय बटन में f_k सबसे अधिक बारम्बारता है। तो सूत्र के लिये

$L_0 = X_k$, $\Delta_1 = f_k - f_{k-1}$, $\Delta_2 = f_k - f_{k+1}$, $I = X_{k+1} - X_k$

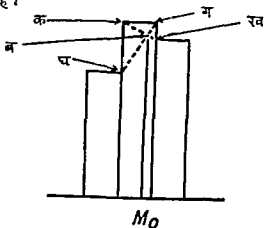
टिप्पणी [1] यह ध्यान रखना चाहिये कि वर्गों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना आवश्यक है।

[ii] किसी बटन में एक से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं।

[iii] बहुलक वर्ग का पता बारम्बारता को देखकर ही चल जाता है किन्तु इस वर्ग में बहुलक का एक निश्चित मान ज्ञात करने के हेतु सूत्र [3.9] का प्रयोग करना होता है।

बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

यदि बारम्बारता बटन का प्रतिबन्धित वर्ग-अन्तरालों के अनुसार बारम्बारता आयत चित्र द्वारा निरूपित कर दिया जाए तो बहुलक सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत में स्थित होता है। अतः नीचे चित्र [3-4] में तीन आयत दिखाये गये हैं। बीच का आयत बहुलक वर्ग की बारम्बारता को प्रदर्शित करता है और एक इससे पूर्व व एक इसके बाद की बारम्बारता को प्रदर्शित करता है।



चित्र (3-3) बहुलक का ज्यामितीय निरूपण

चित्र (3-3) में देखा कि ख और ग घ का कटान-बिन्दु ब का X —निर्देशांक बहुलक मान के समान होता है।

उदाहरण 3.11 उदाहरण नं० [3.10] में दिये गये बटन का बहुलक [1] गणितीय सूत्र द्वारा [ii] ज्यामितीय विधि द्वारा, ज्ञात करने के लिए दिये गये बटन में अधिकतम बारम्बारता 44 है। अतः बहुलक अन्तराल [50-60] में स्थित है।

बहुलक का यथायं मान सूत्र (3.14) की सहायता से ज्ञात करते हैं।

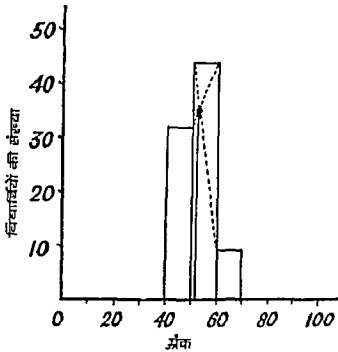
$$L_0 = 50, \Delta_1 = 44 - 32 = 12$$

$$\Delta_2 = 44 - 9 = 35, I = 50 - 40 = 10$$

$$M_0 = 50 + \frac{12}{35 + 12} \times 10$$

$$= 52.55 \text{ ग्रक}$$

(ii) ज्यामितीय विधि द्वारा बहुलक चित्र (3-4) में दिया गया है। चित्र द्वारा प्राप्त बहुलक मान $M_0 = 52.5$



चित्र (3-4) बहुलक का ज्यामितीय निरूपण
प्ररत्नखसरे

1 : एक फंक्टी के धमिको का धायु-बटन धोर धायु-वर्गों की तदनुसार बारबारता निम्न सारणी में दी गयी है .—

धायु वर्ग	धमिकों की संख्या
10—19	0
20—29	3
30—39	9
40—49	13
50—59	1
60—69	1

(i) इस बटन की बहुलक आयु ज्ञात कीजिये।

(ii) माध्यिका क्या है? क्या इसे लक्षणिक न्यास के लिए ज्ञात किया जा सकता है?

(iii) विभिन्न केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के गुणा एव दोषों का उल्लेख कीजिये।

2 एक पुरुषों के समूह का आयु बटन निम्न प्रकार है —

आयु [वर्षों में]	विद्यार्थियों की संख्या
28—32	2
33—37	0
38—42	1
43—47	5
48—52	2
53—57	0
58—62	7
63—67	3

उपयुक्त बटन के लिए

(i) माध्य आयु (ii) माध्यिका (iii) बहुलक (iv) गुरु चतुर्पंक (v) घाटवा दशमक (vi) सत्तरवा शततमक ज्ञात कीजिये।

3 सांख्यिकी की एक परीक्षा में प्राप्त अंकों के लिए निम्न बटन के बहुलक, माध्यिका और समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

अंक 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 50

विद्यार्थियों की

संख्या 20, 43, 75, 67, 72, 45, 39, 9, 8, 6

(बी काम, नागपुर, 1971)

[उत्तर बहुलक 25, माध्यिका 20, माध्य 22.2]

4 (अ) गुणोत्तर माध्य के गुणा एव दोषों पर टिप्पणी लिखिए।

(ब) निम्न आंकड़ों का गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिये।

6 5, 169 0, 11 0, 112 5, 14 2, 75 5, 35 5, 215 0

(बी काम, भान्द्र, 1966)

[गुणोत्तर माध्य = 42.74]

5 निम्नांकित विद्यार्थियों के एक समूह के मासिक व्यय का गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिये।

₹ 125 00, 130 00, 75 30, 10 00, 45 00, 5 00, 0 50, 0 40, 500 00, 150 00

(बी काम, भान्द्र, 1966)

- 6 एक फैक्ट्री में 65 काम करने वालों की माध्य मासिक आय 270 रुपये परि-
कल्पित की गयी। कुछ समय पश्चात् ज्ञात हुआ कि दो व्यक्तियों की आय 250
रुपये लिये ली गयी थी जबकि उनकी वास्तविक आय 150 रुपये थी। अतः अत्र
अप शुद्ध माध्य ज्ञात कीजिये।
- 7 एक व्यक्ति को पहले वर्ष के अन्त में 10% की, दूसरे वर्ष के अन्त में 9% और
तीसरे वर्ष के अन्त में 8% की वृद्धि मिली। तो माध्य प्रतिशत वृद्धि ज्ञात
कीजिये।
- 8 बौनसा दशमक माध्यिका को निरूपित करता है और क्यों? स्पष्ट कीजिये।

□□□

किसी समग्र या प्रतिदर्श में सम्मिलित एकको पर किसी भी लक्षण के प्रति मापों में भिन्नता होना स्वाभाविक है। इन मापों में भिन्नता को मापने के लिए विभिन्न विक्षेपण मापों का प्रयोग करना होता है जिनका वर्णन इस अध्याय में किया गया है।

यह सम्भव है कि विभिन्न समुच्चयों¹ का माध्य या अन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप तो बराबर हो किन्तु इनमें प्रेक्षणों का विचरण एक जैसा न हो जैसा कि निम्न तीन समुच्चयों पर विचार करने से स्पष्ट होता है —

समुच्चय 1	25,	25,	25,	25,	25,	25,	25
समुच्चय 2	23,	24,	25,	25,	25,	26,	27
समुच्चय 3	2,	6,	9,	13,	30,	50,	65

उपर्युक्त तीनों समुच्चयों का माध्य 25 है किन्तु तीनों के बटन एक दूसरे से पूर्णतया भिन्न हैं। इसके अतिरिक्त पहले व दूसरे समुच्चय की माध्यिका (Md=25) भी समान है किन्तु ये समुच्चय एक दूसरे से भिन्न हैं। इससे विदित होता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों द्वारा प्रेक्षणों के बटन का पूर्ण ज्ञान नहीं होता है। अतः किसी समुच्चय के प्रेक्षणों में एक दूसरे से भिन्नता के विषय में जानने के हेतु कुछ विशेष गणितीय माप दिये गये हैं जिन्हें विक्षेपण माप कहते हैं।

परिसर

प्रेक्षणों के किसी भी समुच्चय में अधिकतम और न्यूनतम प्रेक्षित माप के अन्तर को परिसर कहते हैं। इसको प्रायः न्यूनतम से अधिकतम माप तक के रूप में भी लिखा जाता है। यह सबसे सुगम विक्षेपण माप है। माना कि समुच्चय में अधिकतम प्रेक्षण मान L और न्यूनतम प्रेक्षण मान S है। तो

$$\text{परिसर} = L - S \quad \dots (41)$$

परिसर का विशेष दोष यह है कि यह केवल दो मानों पर ही आधारित है और इससे यह नहीं ज्ञात होता है कि इन दो चरम मानों के बीच प्रेक्षणा की स्थिति क्या है।

उदाहरण 4.1 : उदयपुर जिले में एक मृदा सम्बन्धी सर्वेक्षण किया गया और उसके द्वारा काली मिट्टी में विनिमय योग्य पोटैशियम (Exchangeable potassium) की मात्रा निम्नांकित पायी गयी —

विनिमय-योग्य पोटैशियम	39.4,	20.9,	18.3,	15.4,	26.4,
(मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा)	37.9,	18.9			

1. समुच्चयों का वर्णन परिशिष्ट-ग में किया गया है।

प्रेक्षणों का परिसर इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

सूत्र (41) की सहायता से,

$$\text{परिसर} = (L - S)$$

अधिकतम माप, $L = 39.4$ और न्यूनतम माप, $S = 15.4$

$$\text{परिसर} = 39.4 - 15.4$$

$$= 24.0 \text{ मिलीग्राम प्रति } 100 \text{ ग्राम मृदा।}$$

अन्तश्चतुर्थक परिसर

गुरु (तृतीय) चतुर्थक और लघु (प्रथम) चतुर्थक के अन्तर को अन्तश्चतुर्थक परिसर कहते हैं। सूत्र के रूप में

$$\text{अन्तश्चतुर्थक परिसर} = (Q_3 - Q_1) \quad \dots (42)$$

यह ज्ञात प्रेक्षणों के समुच्चय में बीच के 50 प्रतिशत प्रेक्षणों के परिसर को बताता है। इस माप का यह दोष है कि 25 प्रतिशत निम्नतम और 25 प्रतिशत उच्चतम प्रेक्षणों को इसमें सम्मिलित नहीं किया जाता है अर्थात् इनके विषय में कुछ ज्ञान नहीं होता है। यदि उपर्युक्त परिसर को दो से भाग दें तो इसे चतुर्थक विचरण (Quartile deviation) या अर्ध-अन्तश्चतुर्थक परिसर (Semi interquartile range) कहते हैं।

$$\text{चतुर्थक विचरण} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad \dots (43)$$

इस विक्षेपण माप में कुल के आधे प्रेक्षण छूट जाते हैं। इसी कारण इस माप को कम प्रयोग में लाया जाता है। इसी प्रकार नवें व पहले दशमक के अन्तर के आधे को

अन्तर्दशमक विचरण कहते हैं और इसे $\frac{D_9 - D_1}{2}$ द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 4.2 उदाहरण (4.1) में दिये आँकड़ों का चतुर्थक विचरण इस प्रकार ज्ञात होगा।

प्रेक्षणों की संख्या $n = 7$

अतः Q_1 व Q_3 का स्थान क्रमशः $\frac{n+1}{4}$ व $\frac{3(n+1)}{4}$ है।

$$\frac{n+1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ और } \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3 \times 8}{4} = 6 \text{ है।}$$

प्रेक्षणों को आरोही क्रम में रखने पर

15.4, 18.3, 18.9, 20.9, 26.4, 37.9, 39.4

अतः $Q_1 = 18.3$ और $Q_3 = 37.9$

$$\text{चतुर्थक विचरण} = \frac{37.9 - 18.3}{2}$$

$$= 9.8 \text{ मिलीग्राम प्रति } 100 \text{ ग्राम मृदा।}$$

माध्य विचलन

किसी समुच्चय के अंकों के माध्य, माध्यिका या बहुलक में विचलन² के निरपेक्ष मान³ के माध्य को माध्य विचलन (मा० वि०) कहते हैं।

माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं और A एक अक्षर मान है, तो

$$A \text{ से मा० वि० (M.D)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - A| \quad \dots (4.4)$$

जबकि A के स्थान पर माध्य \bar{X} , माध्यिका M_d या बहुलक M_0 का प्रयोग कर सकते हैं।

यह ध्यान रखें कि यदि $A = \bar{X}$ है और निरपेक्ष मान का प्रयोग नहीं किया है तो माध्य विचलन शून्य हो जायेगा क्योंकि $\sum_i (X_i - \bar{X})$ सदैव शून्य के समान होता है।

परिभाषा के अनुसार माध्य विचलन के लिए निरपेक्ष मान का प्रयोग करना आवश्यक है।

यदि प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ अपनी तदनुसार बारम्बारता $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ सहित दिये गये हों तो,

$$\text{मा० वि०} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K (f_i |X_i - A|) \quad \dots (4.5)$$

$$\text{जबकि } \sum f_i = n$$

इस माप में यह गुण तो आवश्यक है कि यह सब प्रेक्षित मानों द्वारा परिवर्तित किया जाता है, किन्तु इसमें यह दोष भी है कि बिना समुचित कारण बताये इसके लिए निरपेक्ष मान का प्रयोग करते हैं।

टिप्पणी : यदि सूत्र (4.4) या (4.5) में अक्षर A के स्थान पर बटन की माध्यिका को लिया जाए अर्थात् माध्यिका से विचलन लिए जाएँ तो माध्य-विचलन न्यूनतम होता है।

उदाहरण 4.3 . उदाहरण 3.1 में दिये हुए प्रेक्षणों के लिए माध्यिका से विचलन लेकर, माध्य विचलन निम्न प्रकार परिवर्तित कर सकते हैं :—

$$\text{माध्यिका} = 20.9 \text{ अर्थात् सूत्र (3.5) में } A = 20.9$$

अतः

$$\begin{aligned} \text{M.D} &= \frac{1}{7} (|15.4 - 20.9| + |18.3 - 20.9| + |18.9 - 20.9| \\ &\quad + |20.9 - 20.9| + |26.4 - 20.9| + |37.9 - 20.9| \\ &\quad + |39.4 - 20.9|) \end{aligned}$$

- विचलन किसी प्रेक्षित मान X के किसी अक्षर C से अन्तर $[X - C]$ को X का C से विचलन कहते हैं।
- निरपेक्ष मान (Absolute value) : यदि किसी अन्तर को घनात्मक ही लिया जाए तो अन्तर के मान को निरपेक्ष मान कहते हैं; जैसे, $(10 - 15)$ व $(15 - 10)$ दोनों का निरपेक्ष मान 5 है।

$$= \frac{1}{7} (55 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 0 + 55 + 170 + 185)$$

$$= \frac{1}{7} (511)$$

$$= 730 \text{ मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा}$$

उदाहरण 4.4 मृदा में स्थिर पोटैशियम की मात्रा जानने के हेतु विभिन्न स्थानों से प्रतिदर्श एकत्रित किये गये और उनके रासायनिक विश्लेषण द्वारा प्राप्त पोटैशियम की मात्रा और स्थानों की संख्या इस प्रकार पायी गयी —

पोटैशियम की मात्रा

(मिलीग्राम प्रति 100 ग्राम मृदा) 21.7, 20.8, 29.2, 30.9, 33.6, 38.5, 45.7
स्थानों की संख्या 2, 3, 4, 5, 1, 4, 1

पोटास की मात्रा के लिए दिखाया गया है कि माध्यिका से माध्य विचलन, माध्य से माध्य विचलन की अपेक्षा कम है।

प्रेक्षणों को क्रम में व्यवस्थित करके रस दिया।

पोटैशियम की मात्रा x	स्थानों की संख्या f	सं. बार०	संख्या fx
20.8	3	3	62.4
21.7	2	5	43.4
29.2	4	9	116.8
30.9	5	14	154.5
33.6	1	15	33.6
38.5	4	19	154.0
45.7	1	20	45.7
	20		610.4

$$\text{माध्यिका के लिए} = \frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10.5$$

$$\text{माध्यिका} = 30.9$$

$$\text{और माध्य} = \frac{610.4}{20} = 30.52$$

माध्यिका को A के रूप में प्रयोग करने पर,

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{21} (|20.8 - 30.9| \times 3 + |21.7 - 30.9| \times 2 + \dots + |45.7 - 30.9| \times 1)$$

$$= \frac{1}{21} (103.4) = 5.17$$

माध्य को A के स्थान पर प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned} \text{माध्य विचलन} &= \frac{1}{20} (|208 - 3052| \times 3 + |217 - 3052| \times 2 + \dots \\ &\quad + |457 - 3052| \times 1) \\ &= \frac{1}{20} (10416) = 521 \end{aligned}$$

$521 > 517$ अतः माध्यिका में माध्य की अपेक्षा, माध्य विचलन कम है।

प्रसरण

परिभाषा प्रेक्षणों के समुच्चय में माध्य में विचलनों के वर्गों के योग के माध्य को प्रसरण कहते हैं।

माना कि समग्र में N प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ हैं तो समग्र प्रसरण को σ^2 में सूचित करते हैं जहाँ

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 \quad \dots (4.6)$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^N X_i^2 - \mu \sum_{i=1}^N \lambda_i \right\} \quad \dots (4.6.1)$$

जबकि सूत्र (4.6) में μ समग्र माध्य है।

मानक विचलन

प्रसरण के घनात्मक वर्ग-मूल को मानक विचलन कहते हैं।

$$(\text{मानक विचलन}) \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

प्रतिदर्श प्रसरण : माना एक प्रतिदर्श के एकको पर प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं तो प्रतिदर्श प्रसरण s^2 को निम्न सूत्र द्वारा परिचित करते हैं —

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \dots (4.7)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right\} \quad \dots (4.7.1)$$

प्रतिदर्श की स्थिति में मानक विचलन $s = +\sqrt{s^2}$

विचरण-गुणांक

अब तक जिनने भी माप दिये गये हैं उन सब की इकाई है। किन्तु कभी-कभी एक में अधिक ममग्रों के विक्षेपण मापों की आपस में तुलना करनी होती है। इन मापों की तुलना करना तभी सम्भव है जबकि विक्षेपण-मापों की इकाईयाँ एक ही हों किन्तु व्यवहार में ऐसा बहुत कम अध्ययन में पाया जाता है। ऐसी स्थिति में विचरण गुणांक अत्यन्त

उपयोगी है क्योंकि इसकी कोई दफाई नहीं होती है। किसी समुच्चय में चर के मानक विचलन और समान्तर माध्य के अनुपात को विचरण गुणांक कहते हैं। साधारणतया इस अनुपात को 100 में गुणा करके प्रतिशत में दिया जाता है। अतः,

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100 \text{ प्रतिशत}$$

$$\text{या } CV = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 \text{ प्रतिशत} \quad \dots(4.8)$$

प्रतिदर्श के लिए विचरण-गुणांक निम्न सूत्र में ज्ञात कर सकते हैं —

$$c v = \frac{s}{\bar{X}} \times 100 \text{ प्रतिशत} \quad \dots(4.9)$$

विचरण-गुणांक तब ही सामप्रद होगा जब माध्य घनारमक हो।

उदाहरण 45 सात लारवी (Larva) के भार (मिलिग्राम में) दिये हुए हैं। माना कि यह एक समग्र के एकको पर प्रेक्षण हैं।

भार (मिलीग्राम) : 332, 337, 341, 330, 346, 328, 340

समग्र के (i) प्रसरण, (ii) मानक विचलन और (iii) विचरण गुणांक का परिवर्तन निम्न प्रकार किया जा सकता है —

माना कि भार चर X द्वारा निरूपित है और यहाँ $N=7$ है।

$$\sum X_i = 2354, \quad \bar{X} = 336.28$$

$$\sum X_i^2 = 791,874.00$$

माध्य एक पूर्ण मर्यादा नहीं है अतः (3.8.1) का प्रयोग करना उचित है।

प्रसरण,

$$\sigma^2 = \frac{1}{7} \left\{ 791874 - \frac{(2354)^2}{7} \right\}$$

$$= \frac{1}{7} \times 2576$$

$$= 368$$

मानक विचलन,

$$\sigma = \sqrt{368}$$

$$= 6.07$$

विचरण गुणांक,

$$C.V. = \frac{6.07}{336.2857} \times 100$$

$$= 1.805 \text{ प्रतिशत}$$

उदाहरण 4.6 : तारवी के एक समूह की लम्बाई नापी गयी। इस प्रकार प्राप्त लम्बाई (से० मी०) और तारवी की संख्याएँ निम्न थीं :—

तारवी की लम्बाई (से० मी०)	तारवी की संख्या
6.1	2
6.0	4
5.8	4
6.2	1
5.9	3

तारवी की लम्बाई के लिए प्रसरण व विचरण गुणांक का परिवर्तन निम्न प्रकार कर सकते हैं।

माना कि उपर्युक्त न्यास में तारवी की लम्बाईघर X और तारवी की संख्या बारम्बारता f द्वारा निरूपित है। प्रसरण के परिवर्तन के लिए सूत्र (4.7.1) का प्रयोग करना होगा। पहले निम्न सारणी तैयार करनी होती है :—

X	f	fX	fX^2
6.1	2	12.2	74.42
6.0	4	24.0	144.00
5.8	4	23.2	134.56
6.2	1	6.2	38.44
5.9	3	17.7	104.43

$\sum_i f_i = 14$ $\sum_i f_i X_i = 83.3$ $\sum_i f_i X_i^2 = 495.85$

प्रसरण :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{14} \left\{ 495.85 - \frac{(83.3)^2}{14} \right\} \\ &= \frac{1}{14} \{ 495.85 - 495.63 \} \\ &= \frac{.22}{14} = 0.0157 \end{aligned}$$

मानक विचलन :

$$\sigma = \sqrt{0.0157} = 0.125$$

विचरण गुणांक

$$\begin{aligned} \text{यहाँ } s &= \frac{83.3}{14} \\ &= 5.95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore CV &= \frac{125}{5.95} \times 100 \\ &= 21 \text{ प्रतिशत} \end{aligned}$$

उदाहरण 49 : एक लाक्षणिक अध्ययन (Clinical study) के अन्तर्गत सात वर्ष की आयु के बच्चों के भारों के वर्ग और सख्या निम्न सारणी के अनुसार थे —

वर्ग [किग्रा]	बच्चों की संख्या
12-14	6
14-16	14
16-18	28
18-20	16
20-22	8
22-24	3
24-26	1
26-28	0
28-30	1

इन वर्गीकृत प्रेक्षणों के लिए बच्चों के भार का (i) प्रसरण, (ii) मानक विचलन, (iii) विचरण गुणांक ज्ञात करने के लिए दिये हुए वर्गों के मध्य मानों को पर X और बच्चों की संख्या को बारम्बारता f के रूप में लेकर निम्न सारणी तैयार की गयी —

X	f	fX	fX ²
13	6	78	1014
15	14	210	3150
17	28	476	8092
19	16	304	5776
21	8	168	3528
23	3	69	1587
25	1	25	625
27	0	00	00
29	1	29	841
योग	77	1359	24613

$$\text{अतः } \sum_i f_i = 77, \quad \sum_i f_i X_i = 1359, \quad \sum_i f_i X_i^2 = 24613$$

(i) सूत्र (4.7.1) के अनुसार प्रसरण,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{77} \left\{ 24613 - \frac{(1359)^2}{77} \right\} \\ &= \frac{1}{77} \{24613 - 23985.46\} \\ &= \frac{627.54}{77} \\ &= 8.14 \end{aligned}$$

(ii) मानक विचलन :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{8.14} \\ &= 2.85 \end{aligned}$$

(iii) विचरण गुणांक :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1359}{77} \\ &= 17.65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{C.V.} &= \frac{2.85}{17.65} \times 100 \\ &= 16.14 \text{ प्रतिशत} \end{aligned}$$

आघूर्ण

यदि प्रेषित मानों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ हैं और A एक अक्षर है तो A के परितः K वें आघूर्ण μ'_k की परिभाषा निम्न सूत्र से दी जाती है :—

$$\mu'_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m f_i (X_i - A)^k \quad \dots(4.10)$$

$$\text{जब कि } \sum_{i=1}^m f_i = N$$

यदि A के स्थान पर समग्र माध्य μ का प्रयोग किया जाए तो माध्य के परितः आघूर्ण कहलाने हैं और उन्हें μ_k द्वारा निरूपित करते हैं।

$$\mu_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m f_i (X_i - \mu)^k \quad \dots(4.11)$$

जब $k=1$ हो तो $\mu_1=0$

जब $k=2$ हो तो,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - \mu)^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad \dots(4.12)$$

अतः माध्य के परितः द्वारा प्राप्ता प्रसरण ही है।

समान्तर माध्य 'μ' के परितः प्राप्ता और स्वेच्छ माध्य 'A' के परितः प्राप्ता से सम्बन्ध ---

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - \mu)^k \\ &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i \{(X_i - A) - (\mu - A)\}^k \end{aligned}$$

माना कि $\mu - A = d$

$$\begin{aligned} \therefore \mu_k &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i \{(X_i - A) - d\}^k \\ &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i \{(X_i - A)^k - \binom{k}{1} (X_i - A)^{k-1}d + \binom{k}{2} (X_i - A)^{k-2}d^2 \\ &\quad + \dots + (-1)^r \binom{k}{r} (X_i - A)^{k-r}d^r + \dots + (-1)^k d^k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{या } \mu_k &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - A)^k - \binom{k}{1} \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - A)^{k-1}d + \\ &\quad \left(\binom{k}{2} \right) \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - A)^{k-2}d^2 + \dots + (-1)^r \binom{k}{r} \\ &\quad \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - A)^{k-r}d^r + \dots + (-1)^k d^k \quad \dots(4.13) \end{aligned}$$

(4.10) की सहायता से,

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu_k' - \binom{k}{1} \mu_k' d + \binom{k}{2} \mu_k' d^2 + \dots + (-1)^r \binom{k}{r} \\ &\quad \mu_k' d^r + \dots + (-1)^k d^k \quad \dots(4.13.1) \end{aligned}$$

$$\text{जबकि } \mu_1' = \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - A) = \frac{1}{N} \sum_1 f_i X_i - \frac{1}{N} \sum_1 f_i A$$

$$\Rightarrow \mu - A = d \quad (\because \sum_1 f_i = N)$$

$$\therefore \mu_k = \mu_k' - \binom{k}{1} \mu_k' \mu_1' + \binom{k}{2} \mu_k' (\mu_1')^2 + \dots + (-1)^r \binom{k}{r} \mu_k' (\mu_1')^r - \dots + (-1)^k (\mu_1')^k \quad \dots (4.13.2)$$

सूत्र (4.11) में जब $k=0$ हो तो,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i (X_i - \mu)^0 \\ &= \frac{1}{N} \sum_1 f_i \\ &= 1 \end{aligned}$$

सूत्र (4.13.2) में k के मान 1, 2, 3,....., रखने पर विभिन्न क्रमों के मापूण प्राप्त हो जाते हैं।

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_1' - \binom{1}{1} \mu_0' \mu_1' \\ &= \mu_1' - \mu_1' \\ &= 0 \\ \mu_2 &= \mu_2' - \binom{2}{1} \mu_1' \mu_1' + \binom{2}{2} \mu_0' (\mu_1')^2 \\ &= \mu_2' - \mu_1'^2 \end{aligned}$$

इसी प्रकार $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 2\mu_1'^3$
 और $\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' + 6\mu_2' \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$ आदि।

शेपर्ड-संशोधन

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन द्वारा मापूणों का परिवर्तन करने में कुछ त्रुटि आ जाती है। इसका कारण यह है कि इनके परिवर्तन में यह कल्पना की गयी है कि बारम्बारता वर्ग अन्तरालों के मध्य-बिन्दुओं पर केन्द्रित है। किन्तु यह कल्पना पूर्णतया सत्य नहीं है। डॉ. शेपर्ड (1897-1907) ने विभिन्न क्रमों के मापूणों के लिए अलग-अलग सुद्धियाँ बताई थी इनमें से कुछ निम्न प्रकार हैं —

माध्य के परितः दूसरे मापूण को μ_2 द्वारा निरूपित करते हैं जो कि प्रसरण है। शेपर्ड ने सिद्ध किया कि शुद्ध प्रसरण प्राप्त करने के लिए सुद्धि $I^2/12$ का प्रयोग करना होता है जबकि I का μ_1 का अन्तराल के समान होता है। इस सुद्धि को परिवर्तित प्रसरण में से घटा देने पर शुद्ध प्रसरण प्राप्त हो जाता है।

$$\text{शुद्ध प्रसरण } \mu_2^s = \mu_2 - \frac{I^2}{12} \quad \dots (4.14)$$

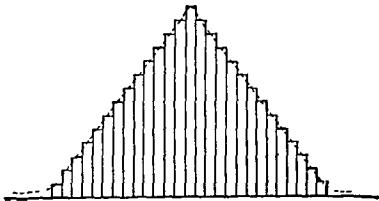
इसी प्रकार चौथे मापूण का शुद्ध मान,

$$\mu_4^s = \mu_4 - \frac{1}{3} \mu_2 \times I^2 + \frac{1}{15} I^4 \quad \dots (4.15)$$

आदि।

वारम्बारता-बटन वक्र

किसी चर का बारम्बारता बटन दिया गया है और यदि इस चर के मान या वर्ग अन्तराल एक दूसरे से निकट हैं तो दण्ड चित्र या बारम्बारता आयत चित्र में दण्डों के शिखर बिन्दुओं को या आयतों के शिखर के मध्य बिन्दुओं को मिला देने पर बारम्बारता बहुभुज एक सतत वक्र का रूप धारण कर लेता है। इस वक्र को बारम्बारता-बटन-वक्र कहते हैं। अतः एक बारम्बारता वक्र में अक्ष के किसी मान बिन्दु पर की कोटि इस अक्ष मान (x मान) की बारम्बारता प्रदर्शित करती है। किन्हीं दो अक्ष मानों पर कोटि के बीच का अन्तर समय में उतना माना के बीच अक्ष की मध्य का अनुपात बताया है।

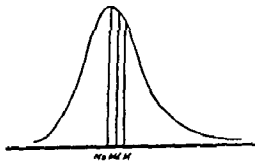


चित्र 4.1 आयत चित्र जो वक्र की ओर प्रवृत्त है

इस वक्र के रूप, गुण परिमर आदि के अनुसार ही चर के बटन का निश्चय किया जाता है।

विषम बटन वक्र

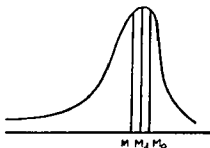
यदि बारम्बारता बटन वक्र के सिरे सममित न हों तो ऐसे वक्र को विषम बटन वक्र कहते हैं। इसका अभिप्राय है कि वक्र का झुकाव किसी एक ओर अधिक और दूसरी ओर कम हो सकता है। इस बात को पाठक इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि वक्र का एक सिरा अधिक लम्बा और दूसरा सिरा छोटा हो सकता है।



चित्र 4.2 घनात्मक विषम वक्र

यदि बटन का माध्य, बहुलक में बड़ा हो अर्थात् वक्र में लम्बा सिरा दाहिनी ओर हो तो ऐसी विषमता को घनात्मक विषमता कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब बारम्बारता बटन में प्रेक्षणों के लघु मानों की संख्या अधिक हो तथा बड़े मानों की संख्या कम हो।

उपर्युक्त स्थिति के विपरीत अर्थात् वक्र का वाम सिरा अधिक लम्बा और दाहिना सिरा छोटा होने पर वक्र को ऋणात्मक विषम कहते हैं। ऐसी स्थिति तब उत्पन्न होती है जब माध्य से बहूलक बड़ा होता है। जब प्रेक्षणों के समुच्चय में लघु मान वाले प्रेक्षणों की संख्या कम और बृहत् मान वाले प्रेक्षणों की संख्या अधिक होती है।



चित्र 4 3 ऋणात्मक-विषम वक्र

एक प्रानुभविक नियम है कि माध्यिका माध्य और बहुलक के बीच में स्थित होती है और माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के बीच निम्न सम्बन्ध दिया जा सकता है —

$$\text{माध्य} - \text{बहुलक} = 3 (\text{माध्य} - \text{माध्यिका}) \quad \dots (4 16)$$

वक्र में विषमता घनात्मक है या ऋणात्मक, यह वक्र को चित्रित करके जाना जा सकता है। किन्तु विषमता के आकार को जानने के लिए सहायतात्मक मान भी ज्ञात किये जा सकते हैं। कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने वैषम्य-गुणांक (Coefficient of skewness) ज्ञात करने के लिए निम्नांकित सूत्र बताया है :—

$$\text{वैषम्य-गुणांक} = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}} \quad \dots (4 17)$$

इस सूत्र के लिए माध्य, बहुलक व मानक विचलन का परिकलन करना होता है। जब माध्य > बहुलक तो घनात्मक विषमता और माध्य < बहुलक तो ऋणात्मक विषमता होती है।

यदि मानक विचलन ज्ञात करने में किसी प्रकार की कठिनाई हो तो वैषम्य गुणांक को चतुर्थको की सहायता से निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। वैषम्य-गुणांक के लिए यह सूत्र प्रो० बाऊले (Prof Bowley) ने दिया है :—

$$\text{वैषम्य-गुणांक} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \quad \dots (4 18)$$

अबकि सूत्र (4 18) में Q_1 , Q_2 , Q_3 क्रमशः पहला, दूसरा और तीसरा चतुर्थक है। वैषम्य-गुणांक को प्राधूनों की सहायता से निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$(\text{वैषम्य-गुणांक}) \beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \dots (4 19)$$

ऊपर के सूत्रों से स्पष्ट है कि वैषम्य-गुणांक एक शुद्ध सख्या है अर्थात् इसकी कोई इकाई नहीं होती है क्योंकि सूत्र के सभी व्यंजनों में अणु व हर की इकाई एक ही है। वैषम्य-गुणांक का मान जितना अधिक होता है उतनी ही (+ve) या (-ve) विषमता अधिक होती है। यदि वक्र सममित हो तो वैषम्य-गुणांक शून्य होता है और इस स्थिति में निम्न सम्बन्ध सत्य होते हैं —

माध्य = माध्यिका = बहुलक

$$(Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1)$$

और $\mu_3 = 0$

ककुदता (Kurtosis) — ककुदता से एत-बहुलक वारम्बारता वक्र की शिखरता (peakedness) के अधिक या कम होने के विषय में ज्ञान प्राप्त होता है। ककुदता की काले-वियर्सन ने सन् 1906 में निम्नलिखित और इसके लिए निम्न माप दिया —

$$(\text{ककुदता-गुणांक}) \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (4 20)$$

जहाँ μ_4 व μ_2 क्रमशः माध्य के परितः चौथे व दूसरे घातपूर्ण हैं। अधिक शिखरित वक्र को तुंगककुदी (leptokurtic) वक्र कम शिखरित वक्र को सपाटककुदी (platykurtic) वक्र और सामान्य शिखरित वक्र को मध्यककुदी (mesokurtic) वक्र कहते हैं। इन तीनों प्रकार के वक्रों के लिए β_2 के मान क्रमशः इस प्रकार हैं —

$$\beta_2 > 3, \beta_2 < 3 \text{ और } \beta_2 = 3$$

यह सदेहपूर्ण है कि कोई एक अनुपात शिखरता का उपयुक्त माप है।

उदाहरण 4.8 एक डेरी फार्म पर 13 गायों के दूध का प्रति-दिन उत्पादन निम्नलिखित पाया गया —

दूध का उत्पादन	13 7, 14 2, 15 4, 14 8, 17 2, 19 3
(लिटर प्रति-दिन)	17 7, 18 4, 18 6, 10 6, 10 8, 11 8, 12 5

इस दूध उत्पादन सम्बन्धी ग्यास के वैषम्य गुणांक ज्ञात करने के लिए हम इन प्रेक्षणां द्वारा माध्य के परितः दूसरे व तीसरे घातपूर्ण ज्ञात करने हैं।

माना कि दूध का उत्पादन पर X द्वारा निरूपित है।

$$\text{अतः } \sum_{i=1}^n X_i = (13 7 + 14 2 + \dots + 12 5)$$

$$= 195 0$$

$$\mu = \frac{195 0}{13} = 15 0 \text{ लिटर प्रति दिन।}$$

क्योंकि माध्य एक सपाईं एक पूर्णांक है माध्य में विचलन लेकर भागूणों μ_2 व μ_3 का परिकलन सुगम है। इन भागूणों को शत करने के लिए निम्न सारणी बनाना सामर्थ्य है —

X	(X - μ)	(X - μ) ²	(X - μ) ³
13.7	-1.3	1.69	-2.1970
14.2	-0.8	0.64	-0.5120
15.4	0.4	0.16	0.0640
14.8	-0.2	0.04	-0.0080
17.2	2.2	4.84	10.6480
19.3	4.3	18.49	79.5070
17.7	2.7	7.29	19.6830
18.4	3.4	11.56	39.3040
18.6	3.6	12.96	46.6560
10.6	-4.4	19.36	-85.1840
10.8	-4.2	17.64	-74.0880
11.8	-3.2	10.24	-32.7680
12.5	-2.5	6.25	-15.6250
195.00	00	111.16	-14.44

सूत्र [4.11] की सहायता से,

$$\mu_2 = \frac{1}{13} \times 111.16$$

$$= 8.55$$

$$\mu_3 = \frac{1}{13} [-14.44]$$

$$= -1.11$$

अतः सूत्र [4.18] द्वारा,

$$[\text{विचलन-गुणांक}] B_1 = -\frac{1.11}{[8.55]^{3/2}}$$

$$= -\frac{1.11}{25}$$

$$= -0.044$$

वैषम्य गुणांक का मान घटितस्यु है घत बारबारता वन समभग सममित है ।

उदाहरण 4.9 किसी घर के बारबारता बटन के लिए निम्न चतुर्पंक ज्ञात हैं —

$$Q_1=21.8, Q_2=40.0 \text{ और } Q_3=56$$

वैषम्य गुणांक, सूत्र [4.18] की सहायता से निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\text{वैषम्य गुणांक} = \frac{56 + 21.8 - 2 \times 40}{56 - 21.8}$$

$$= - \frac{2.2}{34.2} = -.064$$

वैषम्य-गुणांक का मान घटितस्यु है, घत बटन वन समभग सममित है ।

व्यास का संकेतीकरण

नियम 1. यदि किसी स्यास के प्रत्येक प्रेक्षण में से एक घचर मान घटा दें तो जो घक प्राप्त होते हैं उनके द्वारा परिवर्तित प्रसरण वही होता है जो कि मूल प्रेक्षणों द्वारा परिवर्तित प्रसरण होता है ।

उपर्युक्त नियम से स्पष्ट पता चलता है कि प्रेक्षणों में से घचर घटाने का प्रसरण पर कोई प्रभाव नहीं पडता है । इस नियम को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं .

प्रमाण माना कि घर X पर प्रेक्षणों में से एक घचर C घटाया गया है । इन सांकेतिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण निम्न प्रकार होगा .—

	मूल प्रेक्षण	सांकेतिक प्रेक्षण
	X	X-C=X'
	X_1	$X_1-C=X'_1$
	X_2	$X_2-C=X'_2$
	X_3	$X_3-C=X'_3$
	\vdots	$\vdots \quad \vdots$
	X_i	$X_i-C=X'_i$
	\vdots	$\vdots \quad \vdots$
	X_N	$X_N-C=X'_N$
योग	$\sum X_i$	$\sum_i (X_i-C) = \sum X'_i$
माध्य	\bar{x}	$\bar{x}-C = \bar{x}'$

मूल प्रेक्षणों का प्रसरण,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_i (X_i - \bar{x})^2$$

जबकि $i=1, 2, 3, \dots, N$

सांख्यिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण ज्ञात करने में X_i' के लिए $(X_i - C)$ और μ' के लिए

माध्य $(\mu - C)$ का सूत्र $\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_1 (X_i' - \mu')^2$ में प्रयोग करना होगा।

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_1 \left\{ (X_i - C) - (\mu - C) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_1 (X_i - \mu)^2$$

$$= \sigma_x^2$$

(4.21)

सम्बन्ध [4.21] से स्पष्ट है कि अचर घटाने का प्रसरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

जो नियम अचर घटाने के लिए दिया गया है वही नियम प्रत्येक प्रेक्षण में अचर जोड़ने पर भी सत्य रहता है।

नियम 2 यदि ग्यास के प्रत्येक प्रेक्षण को किसी अचर मान से गुणा कर दें तो सांख्यिक प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित प्रसरण, मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित प्रसरण और अचर के वर्ग के गुणनफल के समान होता है।

इस नियम को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं —

प्रमाण माना कि चर X पर प्रेक्षणों को अचर मान a से गुणा कर दिया है। इन सांख्यिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण का परिकल्पन किया गया है।

	मूल प्रेक्षण (X)	सांख्यिक प्रेक्षण $aX = X'$
	X_1	$aX_1 = X_1'$
	X_2	$aX_2 = X_2'$
	X_3	$aX_3 = X_3'$
	\vdots	\vdots
	X_i	$aX_i = X_i'$
	\vdots	\vdots
	X_N	$aX_N = X_N'$
योग	$\sum X_i$	$a \sum X_i = \sum X_i'$
	$ $	$ $
माध्य	μ	$a\mu = \mu'$

मूल प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण,

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_i (X_i - \mu)^2$$

सांकेतिक प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण परिवर्तित करने में सूत्र

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{N} \sum_i (X'_i - \mu')^2$$

में X'_i के स्थान पर aX_i और μ' के स्थान पर $a\mu$ रखने पर प्रसरण निम्न होता है —

$$\begin{aligned} \sigma_{x'}^2 &= \frac{1}{N} \sum_i (aX_i - a\mu)^2 \\ &= a^2 \frac{1}{N} \sum_i (X_i - \mu)^2 \\ &= a^2 \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

सम्बन्ध [4.22] नियम 2 को सिद्ध करता है।

यदि अक्षर मान a से प्रेक्षणा को भाग दिया गया हो तो सांकेतिक प्रेक्षणों और मूल प्रेक्षणों द्वारा परिवर्तित प्रसरण में निम्नांकित सम्बन्ध होता है।

$$\sigma_{x'}^2 = \frac{1}{a^2} \sigma_x^2 \quad (4.23)$$

संकेतीकरण करने में परिवर्तन करने में सुविधा हो जाती है। सांकेतिक ग्यास द्वारा प्रसरण निकालने के पश्चात् सम्बन्ध [4.20] या [4.21] का आवश्यकतानुसार प्रयोग करके मूल प्रेक्षणों पर अग्रधारित प्रसरण सुगमता से ज्ञात किया जा सकता है। यदि आवश्यकता हो तो दोनों संकेतीकरणों का एक साथ भी प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 4.10 एक प्रयोग में 11 प्लाहो में प्लाज्मा-कोलेस्टेरॉल की निम्न मात्राएँ पायी गयी।

प्लाज्मा कोलेस्टेरॉल

[मिलीग्राम प्रति 100 मि लिटर] 220, 250, 275, 205, 200, 230, 250,
260, 255, 260, 250

इन प्रेक्षणों द्वारा प्रसरण ज्ञात करने के लिए संकेतीकरण करना लाभदायक है। माना कि अक्षर मान 200 है और इसको प्रत्येक प्रेक्षण में से घटा दिया गया है। अब प्रसरण का परिवर्तन निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सांकेतिक प्रेक्षण (X') (प्लागमा कोडिफ़रॉन)	X'^2
20	400
50	2500
75	5625
5	25
0	00
30	900
50	2500
60	3600
55	3025
60	3600
50	2500
455	24675

$$(i) \mu' = \frac{455}{11} = 41.36$$

$$\begin{aligned} \mu &= \mu' + 200 = 41.36 + 200 \\ &= 241.36 \quad \text{मिलीग्राम प्रति 100 मिलीलिटर} \end{aligned}$$

$$(ii) \sigma_{x'}^2 = \frac{1}{11} (24675.00 - 18820.45)$$

$$= \frac{1}{11} (5854.55)$$

$$= 532.23 \quad (\text{मिलीग्राम प्रति 100 मिली लिटर})^2$$

नोट : यदि मूल प्रेक्षणों द्वारा प्रतिदर्श प्रसरण का परिवर्तन करें तो उसका मान भी 532.23 ही होगा। पाठक चाहें तो इसकी पुष्टि स्वयं कर सकते हैं।

उदाहरण 4.11 : राजस्थान के कुछ खेतों में गेहूँ के पौधों की संख्या प्रति हेक्टर देखी गयी जो कि निम्न प्रकार थी —

800,000,	76,0000,	120,0000,	95,0000
210,0000,	180,0000,	110,0000,	65,0000

इन प्रेक्षणा द्वारा माध्य पौधों की संख्या तथा पौधों की संख्या के लिए प्रसरण ज्ञात करना हो तो यहाँ 10^5 अर्थात् 10,0000 द्वारा भाग करना अत्यधिक लाभप्रद है। अन्यथा

इन सख्याओं को वर्ग करके लिखना और हमके द्वारा परिवर्तन करना बटिन हो जायेगा।
यहाँ अक्षर $a=10^5$ में प्रत्येक सख्या को भाग दे दिया गया और फिर प्रसरण ज्ञात किया गया है।

सांकेतिक पौष्टों की सख्या X'	X'^2
80	64 00
76	57 76
120	144 00
95	90 25
210	441 00
180	324 00
110	121 00
65	42 25
936	1284 26

यहाँ $n=8$

$$\therefore \bar{X}' = \frac{936}{8} = 117$$

$$\bar{X} = 117 \times 10^5 = 117,0000$$

$$\sigma_x'^2 = \frac{1}{8} \left\{ 128426 - \frac{(936)^2}{8} \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ 128426 - 109512 \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \times 18914$$

$$= 2352$$

$$\therefore \sigma_x'^2 = a^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_x^2 = (10^5)^2 \times 2352$$

$$= 2352 \times 10^8$$

उदाहरण 4.12 : विभिन्न शक्तियों के लिए अनुकूलतम नमी, क्षेत्र में मिट्टी की सगमन समान गहराई पर मापी गयी और इस प्रकार निम्नान्वित प्रेक्षण प्राप्त हुए।

वर्ष	अनुकूलतम नमी
मक्का	0.55
गेहूँ	1.50
गन्ना	0.70
आलू	0.30
तम्बाकू	0.30
मूली	0.20
शलजम	0.20
चुक्न्दर	0.20
प्याज	0.65
बरसीम	0.35

इन प्रेक्षणों द्वारा अनुकूलतम नमी के लिए यदि विचरण गुणांक ज्ञात करना हो तो हमें मानक विचलन एवं माध्य ज्ञात करने होंगे। इस न्याम का सचेतीकरण करना लाभप्रद होगा अतः इन प्रेक्षणों को 100 में गुणा कर दिया और फिर प्रत्येक प्रेक्षण में से 20 घटा दिये। यदि अनुकूलतम नमी को चर X द्वारा निरूपित कर दें तो सांकेतिक चर $X' = (100X - 20)$ होगा। अतः

X'	X'^2
35	1225
130	16900
50	2500
10	100
10	100
00	00
00	00
00	00
45	2025
15	225
295	23075

$$\therefore \bar{X}' = \frac{295}{10} = 29.5$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{X} &= (\bar{X}' + 20)/100 \\ &= \frac{29.5 + 20}{100} = 495 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार } \sigma_{x'}^2 &= \frac{1}{10} \left\{ 23075 - \frac{(295)^2}{10} \right\} \\ &= \frac{1}{10} \{ 23075 - 8702.5 \} \\ &= \frac{1}{10} (14372.5) \\ &= 1437.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_x^2 &= \frac{1}{(100)^2} \sigma_{x'}^2 \\ &= \frac{1}{100,00} \times 1437.25 \\ &= 0.1437 \end{aligned}$$

$$\therefore S.D. (X) = 0.38$$

विषरण गुणांक

$$\begin{aligned} C.V. &= \frac{0.38}{0.495} \times 100 \text{ प्रतिशत} \\ &= 76.76 \end{aligned}$$

इस उदाहरण में मकेतीकरण, दशमलव को प्रिंटकों में हटाने और पूर्णांकों को सेपर परिवर्तन करने की दृष्टि में अक्षय्य है। यही कारण एक अक्षर मान को घटाने के अन्त अक्षर मान में गुणा करने का मकेतीकरण एक साथ किया गया है। उदाहरण पाठकों को मकेतीकरण का प्रयोग करने की विधि समझाने के हेतु ही दिये गये हैं।

पूर्णांकन

जब सभी प्रिंटिज या परिवर्तित मक्या पूर्णांक नहीं हो और उन्हे कुछ दशमलव तक ही देना चाहें तो इस मक्या में दशमलव की इच्छित अन्तिम मक्या का उगने बाद में घाने

वाली सख्या के अनुसार, सन्निकटन करना होता है। इस सन्निकटन करने को पूर्णांकन कहते हैं। इसके लिए नियम इस प्रकार है।

यदि दशमलव की अन्तिम सख्या के बाद की सख्या 5 से अधिक हो तो अन्तिम सख्या को 1 से बढ़ा देते हैं और बाद की सख्या 5 से कम होने की स्थिति में अन्तिम सख्या में कोई परिवर्तन नहीं करते हैं। किन्तु जब दशमलव की इच्छित अन्तिम सख्या के बाद की सख्या 5 हो तो सन्निकटन इस अन्तिम दशमलव सख्या पर निर्भर करता है। यदि यह सम है तो सख्या इतने कोई परिवर्तन नहीं करते और यदि यह सख्या विषम है तो इसे 1 बढ़ा देते हैं। पूर्णांकन के प्रयोग से परिकलन में त्रुटि बहुत कम हो जाती है। अतः इसे सदैव प्रयोग में लाना चाहिए।

उदाहरण 4.15 माना कि सख्या 25 368 को दो दशमलव तक ही लिखना है। एक दशमलव के बाद की दूसरी सख्या 6 है किन्तु इससे पहली सख्या 8 है। जो कि 5 से अधिक है अतः इस सख्या को दो दशमलव तक 25 37 लिखना होता है। इसी प्रकार यदि सख्या 25 363 हो तो दो दशमलव तक सख्या को लिखने में 25 36 ही लिखना होगा क्योंकि 6 के बाद की सख्या $3 < 5$ है।

यदि सख्या 25 365 हो तो यहाँ इसे दो दशमलव तक 25 36 ही लिखना होगा क्योंकि दूसरी दशमलव सख्या 6 है जो कि सम है।

यदि सख्या 25 375 हो तो इसे दो दशमलव तक 25 38 लिखना होगा क्योंकि 5 से पूर्व अंक 7 है जो कि विषम सख्या है।

प्रश्नावली

- 1 निम्न शब्दों की परिभाषा दीजिये।
 - 1 मानक विचलन
 - 2 माध्य के परितः घाटूर्ण
 - 3 माध्य विचलन
 - 4 मानक त्रुटि
- 2 सकेतीकरण का प्रसरण पर क्या प्रभाव पड़ता है? स्पष्ट रूप में समझाइये।
- 3 सोने का भाव प्रति 10 ग्राम एक सप्ताह में दिनों के अनुसार नीचे दिया गया है - इस सप्ताह के भावों का परिन्तर परिकलित कीजिये।
सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार, शनिवार
/ 249 50, 247 80, 250 60, 248 50, 252 40, 256 0
- 4 निम्न बारम्बारता बटन के लिए (1) चतुर्थक-विचरण, (2) वैषम्य-गुणांक ज्ञात कीजिये —

बर्त बन्तराज	बारम्बारता
5— 9	6
9—13	10
13—17	18
17—21	25
21—25	15
25—29	11
29—33	10
33—37	5
37—41	2

5 दो निर्माता कम्पनियों के वेतन के बटन सम्बन्धी सूचनाएँ निम्न प्रकार हैं —

	क—1 [रूपये में]	क—2 [रूपये में]
माध्य	75	80
माध्यिका	72	70
बहुलक	67	62
षतयुक्त	62 और 78	65 और 85
मानक-विक्षेपण	13	17

इन दो बटनों सम्बन्धी तथ्यों की तुलना कीजिये।

[एम० काम० दिल्ली, 1965]

6 निम्न बटन का माध्य के परितः दूरतरा घाटूर्ण तथा विचरण-गुणांक ज्ञात कीजिये -

चर [X]	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
बारम्बारता	1, 9, 26, 59, 72, 52, 29, 7, 1

[एम० काम० दिल्ली 1965]

[उत्तर $\mu_2=198$, C. V=35.5]

7 प्रथम तीन घाटूर्ण, जो कि स्वेच्छ मान 2 के परितः लिए गये हैं, क्रमशः 2, 10, 30 हैं। शून्य के परितः पहले तीन घाटूर्ण ज्ञात कीजिये और यह भी सिद्ध कीजिये कि इस बटन का प्रसरण 6 है।

[पार्ट० सी० इम्पू० ए० 1964].

[उत्तर $\mu_1=5$, $\mu_2=31$, $\mu_3=201$]

8 एक बारम्बारता बटन के लिए निम्न सूचना उपलब्ध है —

$$\text{विचरण-गुणांक} = 5$$

$$\text{मानक विचलन} = 2$$

$$\text{कार्ल पियर्सन का बंधम्य-गुणांक} = 0.5$$

बटन का माध्य व बहुलक ज्ञात कीजिये । [बी० काम०, बम्बई, 1967]

[उत्तर माध्य = 40, बहुलक = 39]

9 दो प्रतिदर्शों के लिए निम्न मान उपलब्ध हैं —

प्रतिदर्श I	प्रतिदर्श II
$n_1 = 10$	$n_2 = 12$
$\sum X_i = 700$	$\sum X_j^2 = 46$
$\sum X_i^2 = 7540$	$\sum X_j^2 = 318$

इन दोनों प्रतिदर्शों का सम्मिलित प्रसरण ज्ञात कीजिये ।

□ □ □

प्रायिकता का प्रयोग हम दिन प्रतिदिन के कार्यों में करते हैं। अनेक कथन सुनने में आते हैं जिनमें प्रायिकता का बोध होता है, जैसे, शायद इस वर्ष मैं कक्षा में प्रथम छाऊँगा, चार व्यक्तियों के ताश के खेल में शायद इस बार मेरे पास चारो इक्की [aces] आयें, एक सिक्के को चार बार उछालने पर सम्भवतः तीस बार शीर्ष [head] ऊपर आयेगा आदि। इन सब कथनों में किसी घटना की अनिश्चितता का भाव स्पष्ट होता है। किन्तु किसी प्रायिकतावादी का सम्मान करने में परिकल्पना करना ही प्रायिकता सिद्धांत है।

संयोग-प्रधान खेदों के निमित्त किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के हेतु गणितज्ञ पास्कल [Pascal], बरनौली 1713 [Bernoulli 1713], बेयस 1764 [Bayes, 1764] और कार्ल पियर्सन [Karl Pearson] ने प्रायिकता सिद्धांत को विधि प्रदान दिया। यह विषय आज सांख्यिकी का मुख्य ध्येय बन गया है।

प्रायिकता सिद्धान्त का प्रारम्भिक वर्णन इस अध्याय में दिया गया है। यह एक गूढ़ विषय है, फिर भी इसमें प्रारम्भिक सिद्धान्तों को सुगमता से समझा जा सकता है। प्रायिकता की परिभाषा तथा सिद्धान्तिक विवरण देने से पूर्व इसमें सम्बद्ध मुख्य-मुख्य पारिभाषिक शब्दों का वर्णन दिया गया है।

घटना — किसी यादृच्छिक प्रयोग¹ के परिणाम जिनमें कि कुछ निश्चित गुण विद्यमान हों, घटना कहलाते हैं। घटना को इस प्रकार स्पष्ट समझ सकते हैं। प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक अंश [element] में या तो निर्धारित गुण होते हैं या नहीं होते हैं। वे सब बिन्दु जिनमें ये गुण होते हैं एक समुच्चय का गठन करते हैं। अतः प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक उपसमुच्चय [subset] जिसमें निश्चित गुण विद्यमान हैं, एक घटना कहलाता है।

यदि घटनाएँ इस प्रकार हैं कि किसी एक घटना के घटित होने पर अन्य घटनाओं का घटित होना असम्भव हो तो इन घटनाओं को परस्पर अपवर्जी [mutually exclusive] घटनाएँ कहते हैं। जैसे एक सिक्के को उछालें तो यदि शीर्ष ऊपर की ओर आता है तो सन् [tail] ऊपर की ओर नहीं आ सकता है या सन् ऊपर आने पर शीर्ष ऊपर नहीं आ सकता है। अतः शीर्ष ऊपर आने व सन् ऊपर आने की घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

माना कि दो घटनाएँ A और B हैं। A और B के प्रतिदर्श बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित क्षेत्र इस प्रकार हैं कि इनमें एक भी बिन्दु शामिल नहीं है जैसा कि चित्र [5.1] में दिखाया

1. यादृच्छिक प्रयोग [Random experiment] : जिस प्रयोग के द्वारा परिणामों का निश्चय करने से पूर्व निश्चय सम्भव न हो किन्तु उसके सम्पन्न सम्भव द्वारा परिणामों को ज्ञान सम्भव है। और यह प्रयोग एक ही परिस्थितियों में बार-बार किया जा सकता हो, तो ऐसे प्रयोग को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।

द्वारा-परिणाम (outcome) किसी प्रयोग के द्वारा सम्भव परिणाम को द्वारा-परिणाम कहते हैं।

गया है। यदि A और B में कुछ बिन्दु सार्व हैं तो इस स्थिति को चित्र [5.2] में दिखाया गया है।



चित्र 5-1 परस्पर अपवर्जी घटनाओं A व B का प्रदर्शन



चित्र 5-2 घटनाओं A व B में सार्व बिन्दुओं के क्षेत्र का प्रदर्शन

घटना $A \cap B$ (या AB) उन बिन्दुओं को प्रदर्शित करती है जो A और B में सार्व हैं अर्थात् A और B दोनों घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। यदि $A \cap B = \emptyset$ हो तो घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं।

दो घटनाओं के जोड़ का $A \cup B$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसका अन्वय है कि या तो घटना A या घटना B या दोनों घटनाएँ एक साथ घटित होती हैं। $A \cup B$ में उन प्रतिदर्श बिन्दुओं को छोड़कर जो A या B किसी में नहीं है अन्य सब बिन्दु सम्मिलित होते हैं। इसी प्रकार घटना $A \cap B'$ का अन्वय है कि घटना A घटित होती है किन्तु घटना B घटित नहीं होती है। इन संकेतों को दोसे अधिक घटनाओं के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है। यदि प्रत्येक घटना के घटित होने की सम्भावना समान हो तो घटनाएँ समप्रायिक कहलाती हैं। इस परिभाषा को उदाहरण द्वारा इस प्रकार समझा जा सकता है। यदि एक सिक्के को उछालें तो सिक्का या तो शीर्ष (head) की ओर से गिरेगा या सन् (tail) की ओर से गिरेगा। यहाँ शीर्ष या सन् के ऊपर की ओर पाने की सम्भावना समान है। अतः ये घटनाएँ समप्रायिक हैं।

प्रायिकता की विरप्रतिष्ठित परिभाषा

माना कि एक प्रयोग के परस्पर अपवर्जी समस्त सम्भव परिणाम N हैं और ये सभी परिणाम समप्रायिक हैं। यदि इनमें से n परिणाम किसी घटना E के लिए अनुकूल (favourable) हैं तो घटना E की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{n}{N} \quad \dots(5.1)$$

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{समस्त सम्भव परिणामों की संख्या}} \quad \dots(5.1.1)$$

है। यदि $n=N$ हो तो $P=1$ है अर्थात् घटना E का घटित होना निश्चित है।

यदि $n=0$ हो तो $P=0$ है अर्थात् घटना E घटित नहीं होगी यह निश्चित है।

भयजक (5.1) से स्पष्ट है कि P का मान कदापि ऋणात्मक नहीं हो सकता और 1 से अधिक नहीं हो सकता क्योंकि $n < N$ है। अतः प्रायिकता का परिसर 0 से 1 है अर्थात् $0 < P < 1$, इसी प्रकार घटना E के घटित न होने अर्थात् E' की प्रायिकता,

$$\begin{aligned} P(E') &= 1 - P(E) \\ &= 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N} \end{aligned} \quad \dots(5.2)$$

क्योंकि (N-n) परिणामों में घटना E के लक्षण विद्यमान नहीं हैं।

उपर्युक्त परिभाषा को लाप्लासियन (Laplacian) परिभाषा भी कहते हैं।

स्वतंत्र घटनाएँ

घटनाओं के एक समुच्चय में यदि एक घटना के घटित होने का किसी अन्य घटना के घटित होने की प्रायिकता पर कोई प्रभाव न हो तो ये घटनाएँ स्वतंत्र कहलाती हैं।

यदि कोई दो घटनाएँ A व B स्वतंत्र हो तो सांख्यिकीय रूप से सर्वे निम्नांकित सम्बन्ध सत्य होता है —

$$P(A \cap B) = P(A) P(B) \quad \dots(5.3)$$

इसी प्रकार तीन स्वतंत्र घटनाओं A, B व C के लिए निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है।

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C) \quad \dots(5.3.1)$$

उदाहरण 5.1 एक घंटे में 5 सफेद गेंदें और सात लाल गेंदें हैं। घंटे को हिलाने पर इसमें से एक गेंद को निकाला गया है तो इस गेंद के लाल होने की प्रायिकता इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

इस परीक्षण के कुल सम्भव परिणामों की संख्या 12 है। 12 गेंदों में से किसी भी गेंद को निकाला जा सकता है। ये सब परिणाम परस्पर अपवर्जी और समप्रायिक हैं $N=12$ । कुल सात गेंदें लाल हैं। इसलिए 7 परिणाम लाल गेंद चुनी जाने के अनुकूल हैं। अतः गेंद के लाल होने अर्थात् घटना E_1 की प्रायिकता

$$P(E_1) = \frac{7}{12}$$

इसी प्रकार गेंद के सफेद होने अर्थात् घटना E_2 की प्रायिकता,

$$P(E_2) = \frac{5}{12}$$

घटना E_2 को इस प्रकार भी कह सकते हैं कि गेंद लाल न होने की प्रायिकता,

$$P(E_2) = 1 - P(E_1)$$

है क्योंकि यदि गेंद लाल नहीं है तो सफेद ही होगी।

$$P(E_2) = 1 - \frac{7}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

उदाहरण 5.2 यदि उदाहरण (5.1) में 4 गेंदों का चयन एक साथ किया गया है तो इनमें से 2 गेंदें लाल व 2 सफेद होने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं -

12 गेंदों में से 4 गेंदों का चयन $\binom{12}{4}$ ढंग से किया जा सकता है।

यैले की 5 गेंदों में से 2 गेंदों का चयन $\binom{5}{2}$ ढंग से और 7 लाल गेंदों में से 2 गेंदों का चयन $\binom{7}{2}$ ढंग से किया जा सकता है। यहाँ इन सभी गेंदों का चयन होना परस्पर स्वतन्त्र है। अतः 4 गेंदों में से 2 गेंदें सफेद और 2 गेंदें लाल होने की प्रायिकता निम्न है -

$$P(E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{7}{2}}{\binom{12}{4}}$$

$$= \frac{54}{121109} \times \frac{76}{4321}$$

$$= 0.424$$

चिरप्रतिष्ठित परिभाषा के दोष

(क) इस परिभाषा में यह स्पष्ट कहा गया है कि प्रयोग के परिणाम समप्रायिक हान चाहिए। अतः प्रत्यागिन दृश्य-परिणाम समप्रायिक न होने की स्थिति में प्रायिकता क्या होगी यह इस परिभाषा द्वारा ज्ञात करना असम्भव है। जैसे यदि एक सिक्का अभिनत (biased) हो तो शीर्ष 'य' गन् के ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात करना सम्भव नहीं है।

(ख) यदि परस्पर अनवर्ती परिणामों की कुल संख्या अनन्त हो तो ऐसी स्थिति में इस परिभाषा की सहायता से प्रायिकता ज्ञात नहीं की जा सकती है।

(ग) यदि किन्हीं स्थितियों में परस्पर अपवर्ती परिणामों की परिगणना करना सम्भव न हो तो गणितीय परिभाषा द्वारा प्रायिकता ज्ञात करना सम्भव नहीं है।

प्रायिकता की सांख्यिकीय परिभाषा

यदि पूर्णतया एक समान परिस्थितियों में अत्यधिक परीक्षण किये जाएँ तो इनमें से एक घटना (E) के अनुकूल परीक्षणों की संख्या और कुल परीक्षणों की संख्या के अनुपात की सीमा को घटना E के घटित होने की प्रायिकता कहते हैं। यहाँ यह कल्पना की गयी है कि अनुपात एक परिमित तथा अद्वितीय सीमा की ओर प्रवृत्त होता है।

यदि कुल n परीक्षणों में से K परीक्षण ऐसे हैं जिनमें कि घटना E घटित होती है, तो E के घटित होने की प्रायिकता, गणितीय रूप में निम्न प्रकार दी जा सकती है,

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K}{n} \quad \dots (5.4)$$

यहाँ N परीक्षणों की एक अत्यधिक बृहत् संख्या है।

जबकि यह प्रतिबंध मध्यम है कि सीमा परिमित तथा अद्वितीय है।

प्रायिकता की अभिवृद्धितीय परिभाषा

यदि Ω एक प्रतिदर्श समष्टि है और β एक σ -क्षेत्र (σ -field) का Ω में समुच्चय है तो एफ-मान फलन P घटना E की प्रायिकता कहता है यदि यह निम्न गुणधर्मों का समाधान करता है।

$$(1) P(E) \geq 0 \quad \dots (5.5)$$

जबकि $E \in \beta$

$$(2) P(\Omega) = 1 \quad \dots (5.6)$$

$$(3) \text{ यदि } E_1 \in \beta, E_2 \in \beta, E_1 \cap E_2 = \phi, 1 \neq 2$$

जबकि ϕ एक शून्य समुच्चय है।

$$\text{तो } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \quad \dots (5.7)$$

ऊपर दी गयी परिभाषा में समुच्चय के विषय में परिमाण दी गयी है क्योंकि घटना और समुच्चय में सर्वत्र एक-की-समिति (one to one correspondence) स्थापित की जा सकती है। अतः जो विवरण समुच्चय के प्रति मर्याद है वही घटनाओं के प्रति भी मर्याद होना है या यह कहें कि किसी एक के लिए दिया गया विवरण दूसरे के लिए भी माना जा सकता है।

टिप्पणी (1) समुच्चय सिद्धान्त τ विषय में प्रदान Ω, β, σ -क्षेत्र व ϕ आदि के विषय में जानकारी के हेतु परिगणित में का अध्ययन कीजिये।

(2) प्रायिकता की अभिवृद्धितीय परिभाषा केवल गणितीय साक्षियों के विचारधर्मों के लिए उपयोगी है। अन्य पाठक इस परिभाषा का छोड़ सकते हैं।

योग प्रमेय

माना A और B दो घटनाएँ हैं, तो घटना A या B का दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने का $(A \cup B)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। चित्र (5.2) में छायायुक्त क्षेत्र को छोटादर क्षेत्र घटना $(A \cup B)$ को प्रदर्शित करता है।

घटना $(A \cup B)$ की प्रायिकता के लिए सिद्ध सूत्र है —

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots (5.8)$$

जबकि चित्र (5.2) में छायायुक्त क्षेत्र घटना $(A \cup B)$ को प्रदर्शित करता है।

यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्ती हों तो,

$$P(A \cap B) = 0$$

$$\text{और इस स्थिति में, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \dots (5.8.1)$$

इसी प्रकार यदि तीन घटनाएँ A, B व C हैं तो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \quad \dots (5.9)$$

यदि घटनाएँ A, B व C परस्पर अपवर्जी हो तो,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \quad \dots (591)$$

सामान्य रूप से n घटनाओं $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ के लिए निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है।

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i \neq j=1}^n P(E_i \cap E_j)$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k=1}^n P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \dots \cap E_n) \quad \dots (510)$$

उदाहरण 5.3 एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि में चार सम्-प्रायिक परिणाम HT, TH, HH, TT होंगे। यहाँ सिक्के के शीर्ष को H से और सन् को T से प्रदर्शित किया गया है।

माना कि पहली बार में सिक्का शीर्ष की ओर से गिरता है, यह घटना A है और दूसरी बार में शीर्ष की ओर से गिरता है, यह घटना B है।

घटना A के दो अवयव HT व HH हैं। $\therefore P(A) = 2/4$

घटना B के दो अवयव TH व HH हैं। $\therefore P(B) = 2/4$

घटना $A \cap B$ का अवयव HH है। $\therefore P(A \cap B) = 1/4$

क्योंकि घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं और परस्पर अपवर्जी नहीं हैं,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

यह घटना कि सिक्के को दो बार उछालने में कम से कम एक बार सिक्का शीर्ष की ओर से गिरता है, घटना $(A \cup B)$ है। अतः घटना $(A \cup B)$ की प्रायिकता,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

उदाहरण 5.4 एक फैक्ट्री द्वारा उत्पादित 75 बेयरिंगों में से 12 दोषपूर्ण हैं। बेयरिंग के इस ढेर में से दो बेयरिंग यादृच्छिक रीति द्वारा प्रतिस्थापन सहित निकाले गये। प्रायिकता ज्ञात करनी है कि (i) निकाले गये दोनों बेयरिंग दोषपूर्ण हैं। (ii) दोनों बेयरिंग दोष रहित हैं। (iii) एक बेयरिंग दोषपूर्ण और दूसरा दोष रहित है। क्योंकि दो बेयरिंगों के निकालने का कार्य एक-दूसरे से स्वतन्त्र है तो एक बेयरिंग निकालने पर, इसके, दोषपूर्ण होने की प्रायिकता $= \frac{1}{25}$ और दोषरहित होने की प्रायिकता $= \frac{24}{25}$ ।

(i) दोनो बेयरिंग दोषपूर्ण होने की प्रायिकता,

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0.0256$$

(ii) दोनो बेयरिंग दोषरहित होने की प्रायिकता,

$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 0.7056$$

(iii) दोनो म से एक दोषपूर्ण और दूसरा दोषरहित होने की प्रायिकता,

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 2 = 0.2688$$

भाग (iii) में 2 से गुणा इसलिए किया गया है कि दो बेयरिंगों में चयन में पहला बेयरिंग दोषपूर्ण और दूसरा दोषरहित हो सकता है या पहला दोषरहित व दूसरा दोषपूर्ण हो सकता है। अतः दो बेयरिंगों में एक दोषरहित व एक दोषपूर्ण दो ढंग से घटित हो सकते हैं।

सम्प्रतिबन्ध प्रायिकता

यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि में E एक घटना है जिसकी प्रायिकता $P(E) > 0$ है और उसी प्रतिदर्श समष्टि पर प्राप्तादि कोई अन्य घटना A है तो A के घटित होने की प्रायिकता, जबकि यह ज्ञात हो कि घटना E घटित हो चुकी है, सम्प्रतिबन्ध प्रायिकता कहलाती है। इसे $P(A/E)$ द्वारा निरूपित करते हैं और निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \quad (5.11)$$

उदाहरण 5.5 माना कि एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि बच्चा लड़का है तो इसे b से और यदि लड़की है तो इसे g से निरूपित किया गया है तो एक परिवार में दोनो लड़के होने, पहला बच्चा लड़का व दूसरा बच्चा लड़की होने, पहला बच्चा लड़की व दूसरा बच्चा लड़का होने या दोनो लड़की होने के लिए क्रमशः चार सचय bb, bg, gb, gg हैं। इनमें से प्रत्येक सचय के घटित होने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है।

यदि परिवार में कम से कम एक लड़का होने की घटना को E से और दोनो लड़के होने की घटना को A से सूचित करें तो,

$$P(E) = P(bb) + P(bg) + P(gb) = \frac{3}{4}$$

$$P(A) = P(bb) = \frac{1}{4}$$

$$\text{यहाँ } A \cap E = A$$

$$\therefore P(A \cap E) = P(A) = \frac{1}{4}$$

यह दिया हुआ होने पर कि परिवार में कम से कम एक लड़का है, दोनो लड़के होने की प्रायिकता,

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$



सांख्यिकीय स्वतन्त्रता

यद्यपि घटनाओं की स्वतन्त्रता को पहले दिया जा चुका है फिर भी यहाँ इसे सप्रतिबन्ध प्रायिकता की सहायता से दिया गया है।

दो घटनाएँ E_1 और E_2 सांख्यिकीय रूप से स्वतन्त्र कही जाती हैं यदि,

$$P(E_1/E_2) = P(E_1) \text{ और } P(E_2/E_1) = P(E_2) \quad \dots (5.12)$$

सूत्र (5.11) के अनुसार,

$$P(E_1/E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = P(E_1)$$

$$\therefore P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \quad \dots (5.13)$$

इसी प्रकार,

$$P(E_2/E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = P(E_2)$$

$$\text{या } P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) P(E_2)$$

जदि तीन घटनाएँ E_1, E_2, E_3 परस्पर स्वतन्त्र हैं तो,

$$P(E_1/E_2) = P(E_1)$$

$$P(E_1/E_2E_3) = P(E_1)$$

$$P(E_1 \cap E_2/E_3) = P(E_1 \cap E_2)$$

$$= P(E_1) P(E_2)$$

हम जानते हैं कि

$$P(E_1 \cap E_2/E_3) = \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_3)}$$

$$= P(E_1 \cap E_2)$$

$$= P(E_1) P(E_2)$$

$$\therefore P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) P(E_2) P(E_3) \quad \dots (5.14)$$

इस प्रकार सूत्र (5.14) का अर्थहीन ही परस्पर स्वतन्त्र घटनाओं के लिए व्यापकीकरण किया जा सकता है।

बेज का प्रमेय

माना कि n परस्पर अपवर्जो घटनाएँ $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$ हैं और ये घटनाएँ मिलकर प्रतिदर्श समष्टि Ω का गठन करती हैं। प्रतिदर्श समष्टि Ω में C एक घटना है जिसकी प्रायिकता $P(C) \neq 0$ । माना कि घटनाएँ $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ की क्रमशः प्राग्नुभव (a priori) प्रायिकताएँ $P(E_1), P(E_2), P(E_3), \dots, P(E_n)$ हैं।

यदि $P(E/E_1)$, $P(E/E_2)$, $P(E/E_3)$, ... $P(E/E_n)$ क्रमशः सप्रतिबन्ध प्रायिकताएँ हैं तो हम प्रमेय द्वारा पश्च (Posteriori) प्रायिकताएँ $P(E_i/E)$ ज्ञान करते हैं, जबकि $i=1, 2, 3, \dots, n$ (5 11) द्वारा ज्ञान है कि

$$P(E/E_1) = \frac{P(E \cap E_1)}{P(E_1)}$$

$$\text{या } P(E \cap E_1) = P(E/E_1) P(E_1) \quad (5 14 1)$$

$$\text{और } P(E_i/E) = \frac{P(E \cap E_i)}{P(E)}$$

$$\text{या } P(E \cap E_i) = P(E_i/E) P(E) \quad (5 14 2)$$

(5 14 1) व (5 14 2) में बायीं ओर के पद समान हैं।

$$\therefore P(E/E_1) P(E_1) = P(E_i/E) P(E)$$

$$\therefore P(E_i/E) = \frac{P(E/E_1) P(E_1)}{P(E)} \quad \dots (5 15)$$

हमें $P(E/E_i)$ ज्ञात हैं और

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + P(E \cap E_3) + \dots + P(E \cap E_n) \\ &= P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + P(E_3)P(E/E_3) + \dots + P(E_n)P(E/E_n) \end{aligned}$$

$$\therefore P(E_i/E) = \frac{P(E/E_i)P(E_i)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + \dots + P(E_n)P(E/E_n)} \quad \dots (5 16)$$

सूत्र (5 16) में: का मान 1, 2, 3, ... n रखकर क्रमशः प्रायिकताएँ $P(E_1/E)$, $P(E_2/E)$, ..., $P(E_n/E)$ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 5.6 : एक फंड्री में एक पुरानी और एक नयी मशीन है। नयी मशीन की उत्पादन क्षमता पुरानी मशीन की अपेक्षा चार गुना है। पूर्व सूचना में पता चलता है कि पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित 6 प्रतिशत वस्तुएँ दोषपूर्ण हैं जबकि नयी मशीन द्वारा उत्पादित 2 प्रतिशत वस्तुएँ दोषपूर्ण हैं। प्रायिकता ज्ञात करनी है कि एक चयनकृत दोषपूर्ण वस्तु (1) पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित है (2) नयी मशीन द्वारा उत्पादित है।

एक चयनकृत वस्तु के पुरानी मशीन द्वारा उत्पादित होने की घटना का E_1 में सूचित करें, एक चयनकृत वस्तु के नयी मशीन द्वारा उत्पादित होने की घटना का E_2 में सूचित करें और एक चयनकृत वस्तु दोषपूर्ण होने की घटना का E में सूचित करें ता हम समस्या में प्रायिकताएँ $P(E_1/E)$ व $P(E_2/E)$ ज्ञात करनी हैं।

दी गयी सूचना के अनुसार,

$$P(E_1) = 0.20$$

$$P(E_2) = 0.80$$

$$\text{और } P(E/E_1) = 0.06$$

$$P(E/E_2) = 0.02$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cap E) + P(E_2 \cap E) \\ &= 0.20 \times 0.06 + 0.80 \times 0.02 \\ &= 0.028 \end{aligned}$$

अतः सम्बन्ध (5.15) के अनुसार,

$$\begin{aligned} P(E_1/E) &= \frac{0.06 \times 0.20}{0.028} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned} P(E_2/E) &= \frac{0.02 \times 0.80}{0.028} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

निर्देशन : इस प्रकार इस उदाहरण द्वारा पता चलता है कि दोषपूर्ण वस्तु का नयी मशीन द्वारा उत्पादन होने की प्रायिकता अधिक है।

यादृच्छिक चर

एक सत्यात्मक मान-फलन जोकि एक प्रतिदर्श-नमूना पर परिभाषित है, यादृच्छिक चर कहलाता है। यदि X एक ऐसा चर है तो यादृच्छिक प्रयोग के विभिन्न निष्पादनों (Performances) में X के विभिन्न मान होंगे।

चर X के एक निदिष्ट मान x लेने की घटना की प्रायिकता को $P(X=x)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हैं और $a < b$ है तो चर X के निदिष्ट अन्तराल $a < X < b$ में होने की घटना की प्रायिकता को $P(a < X < b)$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यदि अन्तराल (a, b) में X के विभिन्न मान लेने की घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात हो तो हम कह सकते हैं कि चर X का प्रायिकता बंटन या बंटन ज्ञात है। अतः प्रायिकता $P(X < x)$, x का एक फलन होगा। माना कि $F(x) = P(X < x)$ । $F(x)$ को चर X का बंटन फलन कहते हैं।

असंतत यादृच्छिक चर

यदि बंटन की कुल मात्रा कुछ विमुक्त बिन्दुओं (isolated points) पर केन्द्रित हो या एक परिमित अन्तराल मात्रा बिन्दुओं की गणनीय या परिमित संख्या रखता हो। तो यादृच्छिक चर X असंतत प्रकार का कहा जाता है।

असंतत चर X के लिए प्रायिकता फलन $p(x) = P(X=x)$ और $P(X=x_i) = p$ जबकि x का एक मान x_i है।

संतत यादृच्छिक चर

एक यादृच्छिक चर X सतत प्रकार का कहा जाता है यदि बंटन फलन $F(x)$ सर्वत्र सतत हो। साथ ही प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ का अस्तित्व है अर्थात् $f(x) \geq 0$ और यह x के लगभग प्रत्येक मान के लिए सतत है, जबकि $f(x) = \frac{d}{dx} \{F(x)\}$.

असतत व सतत चर को सम्बन्धित मान फलन $\psi(x)$ के रूप में प्रथम निम्न उदाहरणों द्वारा समझ सकते हैं

माना कि एक सिक्के को उछालने पर यदि शीर्ष (H) ऊपर की ओर आता है तो यह 1 से और सन् (T) ऊपर की ओर आता है तो यह 0 से निरूपित है। इस स्थिति में,

$$\psi(H) = 1 \text{ और } \psi(T) = 0$$

यदि किन्हीं एकका के भार, ऊँचाई या लम्बाई आदि X द्वारा निरूपित हैं तो,

$$\psi(X) = X$$

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर यह कह सकते हैं कि प्रत्येक परिणाम को कोई एक मान दिया जा सकता है। यह विदित है कि किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है। अतः घटना के तदनुसार चर के मान की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं। इससे इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि घटना और चर के मानों में समति (Correspondence) निर्धारित की जा सकती है और इसके प्रति प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है।

प्रायिकता बंटन सिद्धांत

बंटन फलन $F(x)$ को संचयी बंटन फलन भी कहते हैं। $F(x)$ के मुख्य लक्षण निम्न प्रकार हैं :—

(क) $F(+\infty) = 1$

(ख) $F(-\infty) = 0$

(ग) यदि $x_1 > x_2$ हो तो $F(x_1) > F(x_2)$

(घ) किसी असतत चर X के लिए,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= F(b) - F(a) \\ &= \sum_{a < X < b} p(x) \end{aligned} \quad \dots (5.17)$$

(ङ) किसी सतत चर X के लिए,

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad \dots (5.18)$$

और

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = P(a < X < b)$$

$$=P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (5.19)$$

दो यादृच्छिक चरों X और Y के लिए

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y) \quad (5.20)$$

$F(x, y)$ को चरों X और Y का संयुक्त संचयी बटन फलन (joint cumulative distribution function) कहते हैं। अतः यादृच्छिक चरों X और Y के लिए संयुक्त प्रायिकता फलन

$$p(x, y) = P(X=x, Y=y) \quad (5.21)$$

है और बटन फलन निम्नांकित है —

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} p(u, v) \quad (5.22)$$

सतत यादृच्छिक चरों X और Y के लिए संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन इस प्रकार है —

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

और संयुक्त बटन फलन निम्नांकित है —

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f(u, v) dv \quad \dots (5.23)$$

$f(x, y)$ के कुछ मुख्य लक्षण निम्न प्रकार हैं —

(क) $f(x, y) \geq 0$

(ख) सतत चरों X और Y के लिए,

$$\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$$

है। सतत चरों X और Y के लिए निम्नांकित सम्बन्ध होता है —

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$F(x, y)$ के लक्षण निम्न प्रकार हैं —

(क) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

(ख) $F(\infty, \infty) = 1$

उपात बंटन

यदि दो सतत चरों X व Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन $f(x, y)$ है तो उपात बंटन के लिए निम्न सम्बन्धों पर विचार करें —

$$\begin{aligned}
 P(a < X < b) &= P(a < X < b, -\infty < Y < \infty) \\
 &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_a^b f_1(x) \, dx \qquad \dots (5.24)
 \end{aligned}$$

$$\text{जबकि } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy = f_1(x)$$

यदि X के बंटन का विचार करें तो,

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_x(x) \, dx \qquad \dots (5.25)$$

सम्बन्धों (5.24) और (5.25) की सहायता से निम्न सम्बन्ध दिया जा सकता है —

$$\int_a^b f_x(x) \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx \qquad \dots (5.26)$$

(5.26) सब ही सत्य हो सकता है जब $f_x(x) = f_1(x)$ है। यह सम्बन्ध a व b के किन्हीं भी वास्तविक मानों के लिए सत्य है। घट चर X का उपात बंटन निम्न प्रकार है —

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \qquad \dots (5.27)$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि Y का उपात बंटन निम्नलिखित होता है —

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \qquad (5.28)$$

बंटन फलन $F(x, y)$ के लिए उपात बंटन निम्नांकित होते हैं —

Y का मान ग्रहण करता है यदि इस तथ्य की उपाय कर दी जाय तो $P(X < x)$ को $F_1(x)$ द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं और इसे चर X का उपाय बटन बताना * ।

$$F_1(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) dy \quad (5.29)$$

$$\text{और } f_1(x) = \frac{d}{dx} \{F_1(x)\} = F_1'(x) \quad (5.30)$$

इसी प्रकार Y का उपाय बटन दिया जा सकता है जो कि निम्न है —

$$F_2(y) = P(Y < y) = \int_{-\infty}^y dv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dx \quad (5.31)$$

$$\text{और } f_2(y) = \frac{d}{dy} \{F_2(y)\} = F_2'(y) \quad (5.32)$$

दो असतत चरों X और Y के संयुक्त बटन फंक्शन $F(x, y)$ के लिए उपाय बटन निम्नांकित होते हैं —

यदि चर X के उपाय बटन का $F_1(x)$ और Y के उपाय बटन को $F_2(y)$ में निरूपित करें तो,

$$F_1(x) = P(X \leq x) = F(x, \infty) \quad (5.33)$$

$$\text{और } F_2(y) = P(Y \leq y) = F(\infty, y) \quad (5.34)$$

होते हैं। उपाय प्रायिकता फंक्शन निम्न प्रकार प्राप्त है

$$p_1(x) = \sum_y p(x, y) \text{ और } p_2(y) = \sum_x p(x, y) \quad (5.34.1)$$

विचरों की स्वतन्त्रता : यदि दो चर X और Y सांख्यिकीय रूप में स्वतन्त्र हों तो सबसे $F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$ (5.35)

सदैव सत्य होता है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि स्वतन्त्रता की स्थिति में

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \quad (5.36)$$

होना है यदि घनत्व फंक्शन का घनित हो।

संश्लेषण बटन (Conditional distribution)

दो सतत चरों X, Y के संयुक्त प्रायिकता घनत्व फंक्शन $f(x, y)$ में यदि चर X को स्थिर रखा जाये, जबकि $f_1(x) > 0$ है, तो X के स्थिर मान x के लिए फंक्शन $f(x, y)/f_1(x)$, Y का संश्लेषण वारम्बारता फंक्शन कहलाता है। $f(y/x)$ द्वारा निरूपित करते हैं। अतः

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad (5.37)$$

(537) द्वारा प्राप्त y के सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन के लिए निम्न गुणधर्म दिया जा सकता है —

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_1(x)} dy = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$$

इसी प्रकार Y के स्थिर मान के लिए X का सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन,

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad (538)$$

दिया जा सकता है।

सप्रतिबन्ध बारम्बारता फलन $f(y/x)$ उम मात्रा के बटन को निरूपित करता है जो कि बिन्दु $X = x$ पर एक अर्थाथक पतली उर्ध्वधर पट्टी में स्थित है। यहाँ X को एक स्थान पर और Y को एक प्रायित चर कहे तो X के निश्चित मान x के लिए Y का बारम्बारता फलन $f(y/x)$ होता है। इसी प्रकार का विवरण $f(x/y)$ के लिए दिया जा सकता है।

दो असतत चरों X और Y की स्थिति में, माना कि X व Y के उपात प्रायिकता फलन क्रमशः $p_1(x)$ व $p_2(y)$ हैं जबकि चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता फलन $p(x, y)$ है। माना कि चरों की समष्टि A है जिन पर कि $p(x, y)$ घनात्मक है अन्यथा शून्य है। माना कि A_1 और A_2 समष्टि A के दो समुच्चय हैं।

माना कि समुच्चय $A_1 = \{x = x', -\infty < y < \infty\}$ है जबकि x' इस प्रकार है कि $P(A_1) = P(X = x') = p_1(x') > 0$ और समुच्चय $A_2 = \{-\infty < x < \infty, y = y'\}$ है।

परिभाषा के अनुसार निश्चित घटना A_1 के लिए घटना A_2 की सप्रतिबन्ध प्रायिकता निम्न प्रकार है —

$$\begin{aligned} P(A_2/A_1) &= \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(X = x', Y = y')}{P(X = x')} \\ &= \frac{p(x', y')}{p_1(x')} \end{aligned} \quad (539)$$

यदि (x, y) एक बिन्दु है जिसके लिए $p_1(x) > 0$ है तो निश्चित घटना $X = x$ के लिए घटना $Y = y$ की सप्रतिबन्ध प्रायिकता $p(x, y)/p_1(x)$ है।

x को स्थिर रखा जाय तो y का फलन घसतल यादृच्छिक चर Y का प्रायिकता फलन होने के प्रतिबन्धों को पूरा करता है क्योंकि

$$p(x, y)/p_1(x) \geq 0$$

$$\text{और } \sum_y \frac{p(x, y)}{p_1(x)} = \frac{1}{p_1(x)} \sum_y p(x, y) = \frac{p_1(x)}{p_1(x)} = 1$$

अतः निर्दिष्ट x के लिए y का सप्रतिबन्ध प्रायिकता फलन $p(y/x)$ निम्न प्रकार होता है —

$$p(y/x) = \frac{p(x, y)}{p_1(x)} \quad \text{जबकि } p_1(x) > 0 \quad (5.40)$$

इसी प्रकार निर्दिष्ट y के लिए x का सप्रतिबन्ध प्रायिकता फलन $p(x/y)$ निम्न प्रकार दिया जा सकता है —

$$p(x/y) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)} \quad \text{जबकि } p_2(y) > 0 \quad (5.41)$$

सर्वोत्तम प्रत्याशा

माना कि एक यादृच्छिक चर X है जो कि मान $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ क्रमशः प्रायिकता $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ में ग्रहण करता है। $g(X)$ चर X का एक फलन है तो X के मान x_i के लिए फलन का मान $g(x_i)$ है। यदि घटना $X = x_i$ की प्रायिकता p_i है तो फलन $g(X)$ की प्रत्याशा $E\{g(x)\}$ की परिभाषा निम्न सूत्र में दी जाती है —

एक असतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=1}^n p_i g(x_i) \quad (5.42)$$

एक सतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad (5.43)$$

आपूर्ति

यदि $g(X) = X^k$

तो एक असतत प्रकार के बटन के लिए,

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^n p_i (X_i^k) \quad (5.44)$$

एक सतत प्रकार के घटन के लिए,

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f(x) dx \quad (545)$$

$E(X^k)$ को शून्य के परितः K वां माघूर्ण कहते हैं और इसे μ_k द्वारा निरूपित करते हैं जैसा कि अध्याय चार में दिया गया है।

इसी प्रकार माध्य के परितः k वां माघूर्ण,

$$\mu_k = E\{X - E(X)\}^k \quad (546)$$

एक असतत घटन के लिए,

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n p_i \{X_i - E(X_i)\}^k \quad (547)$$

और सतत घटन के लिए,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \{X - E(X)\}^k f(x) dx \quad (547.1)$$

यदि $k=1$ है तो,

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sum_{i=1}^n p_i \{X_i - E(X_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (X_i - \mu) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (548)$$

यदि $k=2$ है तो,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E\{X - E(X)\}^2 \\ &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned} \quad (549)$$

μ_2 को चर X का प्रसरण कहते हैं।

इसी प्रकार अन्य उच्च क्रम के माघूर्णों को दिया जा सकता है।

माना कि X व Y दो चर हैं जिनके माध्य व प्रसरण परिमित हैं। ता इन दो चरों X व Y के लिए माध्य के परितः द्वितीय क्रम के माघूर्ण μ_{21} को चर X व Y में सहप्रसरण कहते हैं और इससे लिए निम्नांकित सूत्र है।

$$\mu_{21} = \text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)]\{Y - E(Y)\}\} \quad (550)$$

यदि दा चर λ और Y स्वतन्त्र है तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$E(\lambda Y) = E(\lambda) E(Y)$$

आपूर्ण जनक फलन

यदि X एक यादृच्छिक चर है और t एक वास्तविक सख्या है ता चर X या इसके बटन के आपूर्ण जनक फलन $M_X(t)$ की परिभाषा निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है।

$$M_X(t) = E(e^{tx}) \quad (5.51)$$

जबकि अक्षर E फलन e^{tx} की प्रत्याशा को सूचित करता है।

यदि चर X असतत है तो,

$$M_X(t) = \sum_r e^{tx} f(x_r) \quad (5.52)$$

यदि चर X सतत है तो

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad (5.53)$$

जबकि $-\infty < X < \infty$

आपूर्ण जनक फलन द्वारा किसी बटन के आपूर्ण ज्ञात किये जा सकते हैं जिसकी विधि इस प्रकार है। बटन का k वा आपूर्ण ज्ञात करने के लिए फलन $M_X(t)$ का t के सम्बन्ध में k बार अवकलन करके इनमें $t = 0$ रर दिया जाता है यदि $M_X(t)$ का k वा अवकलज $M_X^{(k)}(t)$ है तो $M_X^{(k)}(0)$ को ज्ञात कर लिया जाता है जो कि सदैव $E(X^k)$ के समान होता है जबकि

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad \text{या} \quad \sum_x x^k p(x) \quad (5.54)$$

स्पष्टत $E(X^k)$ के मानों का $M_X(t)$ द्वारा जनन किया जा सकता है जो कि चर X के बटन का k वा आपूर्ण है। यही कारण है कि $M_X(t)$ को आपूर्ण जनक फलन कहते हैं।

उपर्युक्त विधि का प्रयोग आसुपा का ज्ञात करने के लिए अध्याय 6 व 7 में किया गया है।

आपूर्ण जनक फलन का उपयोग कम होता है क्योंकि अनेकों बटनों के लिए आपूर्ण जनक फलन का अस्तित्व नहीं है। इसके स्थान पर अभिनक्षण फलन का उपयोग अच्छा समझा जाता है क्योंकि प्रत्येक बटन के लिए अभिनक्षण फलन का अस्तित्व है।

अभिलक्षण फलन

माना कि एक घाटच्छर चर X का एक फलन $g(X)$ है और 1 एक वास्तविक संख्या है तो $E(e^{itX})$ को X के बटन का अभिलक्षण फलन कहते हैं उसे $\phi_X(t)$ से सूचित करते हैं।

$$\therefore \phi_X(t) = E(e^{itX}) \quad (\text{जहाँ } i = \sqrt{-1}) \quad (5.55)$$

यदि चर X असतत है तो,

$$\phi_X(t) = \sum_r e^{itx_r} p(x_r) \quad (5.56)$$

और यदि चर X गत है तो

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (5.57)$$

$\phi_X(t)$ का अभिलक्षण फलन इस कारण कहते हैं कि प्रत्येक बटन का एक अद्वितीय अभिलक्षण फलन होता है और प्रत्येक अभिलक्षण फलन के संगत एक अद्वितीय बटन फलन होता है।

अद्वितीयता प्रमेय

दो बटन फलन तब ही समरूप होते हैं जबकि उनके अभिलक्षण फलन भी समरूप हों।

प्रश्नावली

- 1 निम्न पदों की परिभाषा दीजिये और स्पष्टीकरण भी कीजिये।
 (अ) प्रायिकता
 (ख) गणितीय प्रत्याशा
 (ग) सार्विकीय स्वतन्त्रता
- 2 स्वतन्त्र एवं परस्पर घावर्जों घटनाओं में अन्तर स्पष्ट कीजिये। इनका एक-एक उदाहरण भी दीजिये।
- 3 यदि एक ताग के दो पत्ते का प्रतिस्थापन गृहित चयन किया गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि ये दो पत्ते गुलाम हैं ?
- 4 प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि एक गणसम्भावित रीति से चयनकृत अधिवर्ष (Leap year) में 53 रविवार होंगे।
 (उत्तर 2/7)
 (एन एम सी, भाग 1955)
- 5 एक ताग की गड्डी से चार पत्ते निकाले गये तो प्रायिकता ज्ञात करो कि ये पत्ते पान के नहीं हैं ?
- 6 एक सिक्के को चार बार उछाला गया तो प्रायिकता ज्ञात करो कि यह चारों ओर (head) है ?

- 7 . एक कम्पनी में 20 काम करने वाले व्यक्तियों में से 5 स्नातक स्तर तक शिक्षित है। यदि गणमभाविकी शैली द्वारा इनमें से तीन व्यक्तियों का चयन किया जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि (अ) ये तीनों स्नातक हैं ? (ब) इन तीनों में से कम से कम एक स्नातक स्तर तक शिक्षित है ?

$$\left[\text{उत्तर : (अ) } \frac{1}{114} \text{ (ब) } \frac{137}{228} \right]$$

(भाई. सी. डब्लू. ए. 1965)

- 8 . ब्रिज के खेल में एक हाथ में 9 पत्ते एक ही प्रकार (same suit) के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

$$\left[\text{उत्तर : } \frac{\binom{13}{9} \binom{39}{4} \binom{4}{1}}{\binom{52}{13}} \right]$$

(दिल्ली, 1968)

- 9 . एक घँले में 5 सफ़ेद और 4 काली गेंदें हैं। इस घँले में से एक गेंद को निकाल कर प्रतिस्थापित कर दिया जाता है और फिर दूसरी गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि ये दोनों गेंदें अलग-अलग रंगों की हैं ?

$$\left(\text{उत्तर : } \frac{40}{81} \right)$$

(भागूर, 1967)

- 10 . तीन कलश हैं। कलश I में 3 लाल और 7 हरी गेंदें हैं, कलश II में 5 लाल और 3 हरी गेंदें हैं और कलश III में 8 लाल और 4 हरी गेंदें हैं इन कलशों में से एक लाल गेंद निकाली गयी है। प्रायिकता बताइये कि (अ) यह गेंद कलश I से निकाली गयी है ? (ब) यह गेंद कलश III से निकाली गयी है ?

$$\left(\text{उत्तर (अ) } \frac{36}{191} \text{ (ब) } \frac{80}{191} \right)$$

(दिल्ली, 1970)

- 12 . एक ताश की गड्डी में से केवल एक पत्ता निकाला जाता है प्रायिकता ज्ञात कीजिये कि यह या तो हुकुम का इक्का है या चिड़ी का गुलाम है ?

$$\left(\text{उत्तर } \frac{1}{26} \right)$$

(इलाहाबाद, 1970)

- 13 . एक फंक्टी द्वारा यन्त्र रचना (Mechanism) के तीन स्वतन्त्र भाग हैं। यह ज्ञात है कि पहिले भाग 1 प्रतिशत, दूसरे भाग 4 प्रतिशत और तीसरे भाग 2 प्रतिशत दोषपूर्ण है। प्रायिकता का परिकसन कीजिये कि यन्त्र-रचना अशोषपूर्ण है ?

(उत्तर : 0.931)

(एम. बी. ए. दिल्ली, 1971)

- 14 . एक युद्ध में लक्ष्य पर बम गिरने की संभावना $\frac{1}{3}$ है। पुल को नष्ट करने के लिए दो बम पर्याप्त हैं। पुल को सफल बनाकर 6 बम डाले गये तो पुल के नष्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(उत्तर : 0.345)

(दिल्ली, 1963)

□ □ □

6 | कुछ मुख्य असंतत प्रायिकता बंटन

प्रायिकता बंटन का सामान्य विवरण अध्याय 5 में दिया जा चुका है। यहाँ केवल मुख्य असंतत बंटनों का वर्णन दिया गया है।

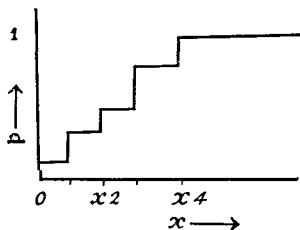
यदि एक यादृच्छिक चर X असंतत है तो इसका बंटन भी असंतत होता है। इस चर के मानों का कुछ ही बिन्दुओं पर केन्द्रीकरण होता है। माना कि सटीक बिन्दुओं x_1, x_2, x_3, \dots का परिमित या अनन्त अनुक्रम है और इन बिन्दुओं की सति प्रमथ p_1, p_2, p_3, \dots है। इस प्रकार X के सम्भव मान x_1, x_2, x_3, \dots हैं और X के एक निदिष्ट मान x_i लेने की प्रायिकता p_i होती है।

अर्थात् $P(X = x_i) = p_i$, जबकि $i = 1, 2, 3, \dots$

और $\sum_i p_i = 1$, क्योंकि बंटन में कुल सति 1 होती है।

यदि चर X का बंटन फलन $F(x)$ है तो

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i \quad (6.2)$$



चित्र (6-1) असंतत बंटन का लेखाचित्रोप रूप

असंतत बंटन $F(x)$ को चित्र (6-1) में प्रदर्शित किया गया है। इस बंटन का रूप सीढ़ी-वक्र जैसा होता है।

द्विपद-बंटन

एक यादृच्छिक प्रयोग और एक घटना E पर विचार करें। प्रयोग के परिणाम में यदि घटना E के गुण विद्यमान होते हैं तो प्रयोग को सफल कहते हैं अन्यथा असफल कहते हैं। मान लें कि एक प्रयोग में सफलता मिलने के दृश्य-परिणाम को 1 से और असफलता

एक द्विपद परिक्रमण को 0 से सूचित किया गया है। अब प्रयोग न किसी एक चर X के r वन वा मान l व 0 सम्भव है यथात् परिक्रमण द्विपदपरक (dichotomous) है। यदि $X = 1$ होने की घटना की प्रायिकता p है तो $X = 0$ हान की प्रायिकता $q = 1 - p$ होगी। इस प्रकार $p + q = 1$ ।

यदि n परिक्रमण के परिणाम $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं तो k वें परिक्रमण में यादृच्छिक चर X_k का निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं -

$X_k = 1$ जब K वें परीक्षण में सफलता होती है जिसकी नि प्रायिकता p है। अन्यथा $X_k = 0$ और इसकी प्रायिकता q है।

इस स्थिति में n स्वतंत्र प्रयोगों के प्रेक्षणों का योगफलताओं की संख्या के समान होता है।

माना कि n परीक्षणों में कुल सफलताओं की संख्या r है यथात्

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r \quad (6.1)$$

प्रत्येक x स्वतंत्र है अतः X श्रेणी में r सफलताओं और $(n - r)$ असफलताओं की प्रायिकता $p^r q^{n-r}$ है। यह विदित है कि n प्रयोगों में r सफल घटनाएँ $\binom{n}{r}$ ढंग में घटित हो सकती हैं। अतः n प्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता P_r निम्न है -

$$P_r = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad (6.2)$$

दायी और बायी $(q + p)^n$ के द्विपद विस्तार में $(r + 1)$ वाँ पद है।

इस बटन का सामान्य गुण इस प्रकार है। यह एक असतत बटन है जिसके प्राचल n और p है। n एक घातमय गुण संख्या है और p का मान 0 से 1 तक विचरण करता है। द्विपद बटन का माध्य np और प्रसरण npq है।

$p = 0$ या $p = 1$ हान की दशा में कुछ यथिनादर्या उत्पन्न हो जाती हैं किन्तु इनका वर्णन यहाँ नहीं दिया गया है।

द्विपद बटन फलन

$$\begin{aligned} B_n(x; n) &= P(r \leq x) \\ &= \sum_{r \leq x} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \end{aligned} \quad (6.3)$$

इस प्रकार के बटन को चित्र (6-1) में दिखाया जा चुका है। जिसमें कि $(x + 1)$ विमुक्त महानि बिंदुओं $r = 0, 1, 2, 3, \dots, x$ पर ऊँचाई $P(r \leq x)$ के समान है।

उदाहरण 6.1 एक परिक्रमण में एक क्षिप्त में 10 प्रसव हुए। इन 10 प्रसवों में से 4 लड़के होने की प्रायिकता निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यथा या तो लड़का हो

1 प्राचल (Parameter) समय के किसी अक्षर मान को प्राचल कहते हैं जैसे समय माप, दूरी प्रसरण आदि।

सकता है या लडकी। माना कि लडका होने की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$ और लडकी होने की प्रायिकता $q = \frac{1}{2}$ है। प्रति दिन 4 लडके होने की प्रायिकता (सूत्र 6.2) द्वारा निम्नांकित है —

$$\begin{aligned} P_r &= \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} \\ &= \frac{10987}{4321} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \frac{1037}{2^{10}} = \frac{210}{1024} = 205 \end{aligned}$$

यदि कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात करनी है तो सूत्र (6.3) का प्रयोग करना होता है। यहाँ $r \geq x$ का प्रयोग किया जाना है इस स्थिति में r के मान 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 हो सकते हैं। इन सबके लिए प्रायिकताओं का योग कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता बतायेगा।

अतः

$$\begin{aligned} P(r \geq 4) &= \left\{ \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} + \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} \right. \\ &\quad + \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-6} + \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-7} \\ &\quad + \binom{10}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-8} + \binom{10}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-9} \\ &\quad \left. + \binom{10}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left\{ \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right\} \\ &= \frac{1}{2^{10}} (210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1) \\ &= \frac{848}{1024} = .828 \end{aligned}$$

उपरोक्त घटना की प्रायिकता अन्य रूप में भी ज्ञात कर सकते हैं। वह यह कि पहिले 4 से कम लडके होने पर्याप्त अधिक से अधिक 3 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात कर ले और इसे 1 में से घटा दें तो कम से कम 4 लडके होने की प्रायिकता ज्ञात हो जाती है।

3 या 3 से कम सडके होने की स्थिति में

$$r=0, 1, 2, 3,$$

इस घटना की प्रायिकता

$$P(r < 3) = \sum_{r=0}^3 \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$\begin{aligned} P(r < 3) &= \binom{10}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} \\ &\quad + \binom{10}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} + \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left\{ \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} \right\} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \left(1 + 10 + \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right) \\ &= \frac{176}{1024} \\ &= 172 \end{aligned}$$

अतः कम से कम 4 सडके प्रति दिन होने की प्रायिकता,

$$\begin{aligned} P(r > 4) &= 1 - P(r < 3) \\ &= 1 - 172 \\ &= 828 \end{aligned}$$

टिप्पणी : इसी प्रकार अन्य किसी भी द्विधा चर के लिए जो द्विपद बटन का पालन करता है प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं। इसी प्रकार व कुछ अन्य उदाहरण प्रायिकता सिद्धान्त के अध्याय में दिये गये हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में द्विपद बटन का माध्य,

$$np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ है}$$

और प्रसरण,

$$npq = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \text{ है।}$$

द्विपद बटन का अभिलक्षण फलन

द्विपद बटन का अभिलक्षण फलन सूत्र (5.56) द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$\begin{aligned}
 E(e^{itr}) &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r q^{n-r} e^{itr} && \dots(6.4) \\
 &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (pe^{it})^r q^{n-r} \\
 &= (q + pe^{it})^n && \dots(6.4.1)
 \end{aligned}$$

प्रमेय 6.1 : यदि r_1 और r_2 दो स्वतन्त्र चर हैं जो द्विपद बंटन का पालन करते हैं और इनके प्राचल क्रमशः (p, n_1) व (p, n_2) हैं, तो $(r_1 + r_2)$ का बंटन भी द्विपद बंटन होता है।

प्रमाण चर $(r_1 + r_2)$ का अभिव्यक्ति फलन

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= E\left\{e^{it(r_1 + r_2)}\right\} \\
 &= E\left(e^{itr_1} e^{itr_2}\right) = E\left(e^{itr_1}\right) E\left(e^{itr_2}\right) \\
 &= (pe^{it} + q)^{n_1} (pe^{it} + q)^{n_2} \\
 &= (pe^{it} + q)^{n_1 + n_2}
 \end{aligned}$$

दायीं पार का व्यंजक द्विपद बंटन का अभिव्यक्ति फलन है जिसके कि प्राचल p और $(n_1 + n_2)$ हैं।

बरनूली प्रमेय

माना n परीक्षणों में r सफलताएँ होती हैं और एक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p है तो अनुपात $\frac{r}{n}$ और इसके माध्य p का अन्तर एक पनात्मक अल्पसु संख्या ϵ में अधिक न होना की प्रायिकता शून्य की ओर प्रवृत्त होती है जबकि n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है। अर्थात्

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{r}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0 \quad \dots(6.5)$$

एन प्रमेय को दो प्रकार समझ सकते हैं। यदि एक परीक्षण को समान परिस्थितियों में बहुत बार, माना n बार, करें और इसमें r सफलताएँ प्राप्त हों तो अनुपात $\frac{r}{n}$ लगभग p के समान होता है जबकि एक परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p है।

आधुणं जनक कलन

डलवड वंडन के ललड आधुणं जनक कलन ललडन प्रकलर जलन कर गवने है —

$$M(t) = \sum (e^{tr})$$

$$= \sum_{r=0}^n e^{tr} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad \dots (66)$$

$$= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (pe^t)^r q^{n-r}$$

$$= (pe^t + q)^n \quad \dots (67)$$

(67) में $(pe^t + q)^n$ कल एक वलर, दो वलर, k वलर अवकलन करके, अलर t कल मलन शून्य रलकर कलमण आधुण $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \dots, \mu'_k$ जलन कलये जल गवते हैं। जंने

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} (pe^t + q)^n$$

$$= n (pe^t + q)^{n-1} pe^t$$

t=0 र जंने वलर,

$$\mu'_1 = np \quad \dots (68)$$

$$\because (p+q=1, e^0=1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \{M(t)\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d}{dt} M(t) \right\}$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ npe^t (pe^t + q)^{n-1} \right\}$$

$$= npe^t (pe^t + q)^{n-1} + n(n-1) p^2 e^{2t} (pe^t + q)^{n-2}$$

t=0 रलन वलर,

$$\mu'_2 = np + n(n-1)p^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np(1-q)$$

$$= np + n^2 p^2 - np + npq$$

$$= n^2 p^2 + npq \quad \dots (69)$$

हम जानते हैं कि,

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\therefore \mu_2 = n^2 p^2 + npq - (np)^2$$

$$= npq \quad \dots (6.10)$$

इसी प्रकार $\mu_3 = npq (q - p) \quad \dots (6.11)$

और $\mu_4 = npq \{ 1 + 3 (n-2)pq \} \quad \dots (6.12)$

आवश्यकता पढ़ने पर किसी भी अन्य उच्च क्रम के आघूर्ण पाठक स्वयं ज्ञात कर सकते हैं।

प्लासों-बंटन

यदि एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है कि,

$$P(X=r) = \frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!} \quad \dots (6.13)$$

(जहाँ m एक घनात्मक अचर मान है और $r=0, 1, 2, 3, \dots$) है तो चर X को प्लासो बंटित चर कहा जाता है।

एक द्विपद बंटन में, जिसके प्राचल (n, p) हैं, चर के मान r धारण करने की प्रायिकता $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ है।

यदि $np=m$ हो और n अत्यधिक बृहत् हो तो यह प्रायिकता लगभग

$$\frac{e^{-m} \cdot m^r}{r!}$$

होगी। इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं—

सूत्र (6.2) के अनुसार n प्रयोगों में r सफलताओं की प्रायिकता P_r निम्न है :—

$$\begin{aligned} P_r &= \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \\ &= \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \because q=1-p \\ \text{और } p=\frac{m}{n} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{या } P_r &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \left(\frac{m}{n}\right)^r \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{-r} \\ &= \frac{m^r}{r!} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{r-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^r} \end{aligned}$$

$$= \frac{m^r}{r!} e^{-m} \quad \text{जब } n \rightarrow \infty$$

यहाँ r का मान कोई पूर्ण संख्या 0, 1, 2, 3, हो सकता है।

अतः किसी यादृच्छिक चर X के प्रायिकता फलन,

$$P(X=r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

जबकि $r=0, 1, 2, \dots$

को प्वासों-बंटन फलन कहते हैं। यह एक असतत बंटन है जिसमें परीक्षणों की संख्या बहुत बड़ी होती है और इस संख्या की अपेक्षा में सफलताओं की संख्या बहुत कम होती है। इस बंटन की विशेषता यह है कि इसका एक ही प्राचल है। इस बंटन का माध्य एक प्रसरण समान होता है। यहाँ इस बंटन का माध्य व प्रसरण m है। प्वासों बंटन के कुछ उदाहरण निम्नांकित हैं —

- 1 एक शहर में घोंटे के लात मारने से मृतकों की संख्या।
- 2 100 बालबेयरिंगों के प्रत्येक डिब्बे में दोषपूर्ण बालबेयरिंगों की संख्या।
- 3 किसी टकन किये हुए पृष्ठ में टकन के कारण अनुद्वियों की संख्या, आदि।

प्वासों-बंटन का अभिलक्षण फलन

प्वासों-बंटन का अभिलक्षण फलन निम्न प्रकार है —

$$\begin{aligned} \phi_r(t) &= E(e^{jt}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} e^{jr} \frac{e^{-m} m^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(me^j)^r e^{-m}}{r!} \\ &= e^{me^j} \cdot e^{-m} \\ &= e^{m(e^j - 1)} \end{aligned} \quad \dots (6.14)$$

इसी प्रकार प्वासों-बंटन का माध्यम जनक फलन,

$$\begin{aligned} M_r(t) &= E(e^{jt}) \\ &= e^{m(e^j - 1)} \end{aligned} \quad \dots (6.15)$$

है। इस माध्यम जनक फलन का t के सम्बन्ध में एक बार अवकलन करके $t=0$ रखने पर पहला माध्यम प्राप्त हो जाता है।

$$\frac{d}{dt} M(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{m(e^j - 1)} \right\}$$

$$t=0 \text{ रखने पर, } \begin{aligned} &= m(e^t - 1) m e^t \\ \mu'_1 &= m \end{aligned} \quad \dots (6.16)$$

फलन $M(t)$ का दो बार अवकलन करके $t=0$ रखने पर दूसरा आघूर्ण μ'_2 ज्ञान हो जाता है।

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \{ M(t) \} &= \frac{d}{dt} \{ m e^t m (e^t - 1) \} \\ &= m e^t m (e^t - 1) + m e^t m (e^t - 1) m e^t \end{aligned}$$

$t=0$ रखने पर,

$$\mu'_2 = m + m^2$$

इसलिए प्वासो-वटन का प्रसरण अर्थात् दूसरा माध्य का परित आघूर्ण,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu'_2 - \mu'^2_1 \\ &= m + m^2 - m^2 = m \end{aligned} \quad \dots (6.17)$$

अतः (6.16) और (6.17) द्वारा सिद्ध होता है कि प्वासो-वटन का माध्य व प्रसरण एक समान होता है। दिये हुए प्वासो-वटन के लिए इसका मान m है।

इसी प्रकार k बार $M(t)$ का अवकलन करके $t=0$ रख कर k वाँ आघूर्ण ज्ञात किया जा सकता है जबकि $k=1, 2, 3,$

प्रमेय 6.2 यदि X_1 और X_2 दो स्वतन्त्र चर हैं जिनका वटन, प्वासो वटन है और प्राचल क्रमशः m_1 व m_2 हैं तो $(X_1 + X_2)$ का वटन भी प्वासो-वटन होता है जिसका प्राचल $(m_1 + m_2)$ है।

प्रमाण $(X_1 + X_2)$ का अभिलक्षण फलन

$$\begin{aligned} E \left\{ e^{it(X_1 + X_2)} \right\} &= E \left(e^{itX_1} e^{itX_2} \right) \\ &= E \left(e^{itX_1} \right) E \left(e^{itX_2} \right) \\ &= e^{m_1(e^t - 1)} e^{m_2(e^t - 1)} \\ &= e^{(m_1 + m_2)(e^t - 1)} \end{aligned}$$

उपर्युक्त अभिलक्षण फलन, प्वासो-वटन का अभिलक्षण फलन है जिसका प्राचल $(m_1 + m_2)$ है। अतः $(X_1 + X_2)$ का वटन, प्वासो-वटन है और इसके प्राचल $(m_1 + m_2)$ है।

ऋणात्मक द्विपद बंटन

यह एक विशेष प्रकार का बंटन है जिसका प्रयोग मुख्यत उद्योगों से उत्पादित वस्तुओं के सम्बन्ध में होता है। मान लीजिये प्रयोग में कुल परीक्षण $(x+r)$ किये गये हैं जिनमें r सफलताएँ हैं अर्थात् परीक्षण तबतक करते रहते हैं जबतक कि r सफलताएँ प्राप्त न हो जाय माना कि एक सफलता की प्रायिकता p है और $(x+r)$ परीक्षणों में r सफलताओं की प्रायिकता $P(x)$ है। $(r-1)$ और r वी सफलता की सम्मिलित प्रायिकता, दोनों सफलताओं की प्रायिकता के गुणनफल के समान होती है क्योंकि सब परीक्षण स्वतंत्र हैं। अतः द्विपद बंटन की सहायता से

$$P[X=r] = \binom{x+r-1}{r-1} p^{r-1} q^x$$

$$= \binom{x+r-1}{x} p^r q^x \quad \dots(6.18)$$

जब कि $x=0, 1, 2, \dots$ और $r > 0, 0 < p < 1$

अतः x के समस्त सम्भव मानों के लिए प्रायिकता,

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} p^r q^x$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x+r-1}{x} p^r q^x \quad \dots(6.18.1)$$

$$= 1$$

$$\left\{ \because \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \right\}$$

(6.18) द्वारा दिये गये बंटन को ऋणात्मक द्विपद बंटन कहते हैं। इस बंटन का माध्य $\frac{r q}{p}$ और प्रसरण $\frac{r q}{p^2}$ है। हम जानते हैं कि

$$\binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x} = \frac{(x+r-1)(x+r-2)\dots(r+1)(r)}{x!}$$

$$\text{और } \binom{-r}{x} = \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\dots(-r-x+1)}{x!}$$

$$= (-1)^x \frac{r(r+1)(r+2)\dots(x+r-1)}{x!}$$

$$= (-1)^x \binom{x+r-1}{r-1}$$

(6 18) द्वारा,

$$\begin{aligned} P(x) &= \binom{-r}{x} p^r (-1)^x q^x \\ &= \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \quad \dots (6 19) \end{aligned}$$

(6 19) द्वारा निरूपित बटन को पास्कल बटन (Pascal's distribution) भी कहते हैं। इस बटन के दो प्राचल p व r हैं।

यदि पास्कल-बटन में $r=1$ रख दिया जाय तो

$$P(x) = \binom{-1}{x} p (-q)^x \quad \dots (6 20)$$

जब कि $X=0, 1, 2, 3, \dots$

(6 20) द्वारा दिये गये बटन को गुणोत्तर बटन कहते हैं।

टिप्पणी : प्राय यह जानने की उत्कंठा होती है कि (6 19) द्वारा दिये गये बटन को ऋणात्मक द्विपद बटन क्यों कहते हैं ? इसका कारण यह है कि द्विपद बटन में $P(x=r)$, $(q+p)^n$ का $(r+1)$ वाँ पद होता है और उपर्युक्त बटन में प्रायिकता $P(x)$, $(Q+P)^{-r}$ का $(x+1)$ वाँ पद होता है जबकि $\frac{Q}{P} = -q$ और $\frac{1}{P} = p$ है। साथ ही $Q+P=1$

$(Q+P)^{-r}$ का $(x+1)$ वाँ पद

$$\begin{aligned} &= \binom{-r}{x} Q^x P^{-r-x} \\ &= \binom{-r}{x} \left(\frac{Q}{P} \right)^x \left(\frac{1}{P} \right)^r \\ &= \binom{-r}{x} (-q)^x (p)^r \\ &= \binom{-r}{x} p^r (-1)^x q^x \end{aligned}$$

अतः $(x+1)$ वाँ पद और (6 19) सर्वसम हैं।

$(Q+P)$ को घात $-r$ है अतः उपर्युक्त बटन को ऋणात्मक द्विपद बटन कहते हैं।

अतिगुणोत्तर बटन

माना कि एक थैले में n गेंदें हैं और इनमें से n_1 सफेद गेंदें हैं और n_2 काली गेंदें हैं।

$$\therefore n = n_1 + n_2$$

इस थैले में से r गेंदें बिना प्रतिस्थापन के थैले को हिलाने के पश्चात् निकाली जाती हैं।

माना कि r में से x सफेद गेंद होने की प्रायिकता $P(x)$ है। इस प्रकार चयनकृत गेंदों में से $(r-x)$ काले रंग की गेंदें होंगी। अतः प्रायिकता

$$P(x) = \frac{\binom{n_1}{x} \binom{n_2}{r-x}}{\binom{n}{r}} \quad \dots (6.21)$$

जब कि $x=0, 1, 2, \dots, r$

और $x < r, \quad r < n$

प्रायिकता बटन फलन के लिए,

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^r P(x) &= \sum_{x=0}^r \binom{n_1}{x} \binom{n_2}{r-x} \bigg/ \binom{n}{r} \\ &= \binom{n}{r} \bigg/ \binom{n}{r} = 1 \end{aligned}$$

(6.21) द्वारा निरूपित बटन को प्रतिगुणोत्तर बटन कहते हैं। इस बटन का

$$\text{माध्य} = \frac{n_1 r}{n}$$

$$\text{और प्रसरण} = \frac{n_1 n_2 r (n-r)}{n^2 (n-1)}$$

प्रश्नावली

1. द्विपद बटन के मुख्य गुण बताइये।
2. प्वासो-बटन और द्विपद बटन का अन्तर स्पष्ट रूप से बताइये।
3. यदि X_1 और X_2 दो सार्वाधिक स्वतन्त्र चर हैं जो कि प्वासो-बटित हैं और इनके प्राचल क्रमशः λ_1 और λ_2 हैं, तो सिद्ध करो कि $(X_1 + X_2)$ का बटन भी प्वासो-बटन है जिसका प्राचल $(\lambda_1 + \lambda_2)$ है।
4. यदि n बृहत् हो और p अल्प हो, तो सिद्ध कीजिये कि द्विपद बटन

$$P(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \quad \text{प्वासो-बटन की ओर प्रवृत्त होता है।}$$

5. प्वासो-बटन के शून्य के पारित प्रथम तथा द्वितीय घातपूर्ण ज्ञात कीजिये।
6. एक द्विपद बटन का माध्य 18 और प्रसरण 6 है तो n, p व q के मान परिकल्पित कीजिये।
7. प्वासो-बटन का अभिलक्षण फलन ज्ञात कीजिये।
8. द्विपद बटन और अणुगतिक द्विपद बटन का अन्तर स्पष्ट कीजिये।

9. माधुर्ण जनिा फलन किस प्रकार से ज्ञात किये जाते हैं और इनका बटन फलनो के लिए क्या महत्व है ? विस्तार पूर्वक बताइये ।
10. तीन अग्रचलिन असतत बटनो के नाम बताइये और प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिये ।
11. किसी असतत बटन का स्वरूप किन बातो पर निर्भर रहता है ? इसका उल्लेख कीजिये ।
12. यदि λ और μ_r क्रमशः प्यासो-बटन के माध्य और केन्द्रीय र्वा माधुर्ण हैं तो निम्न आवृत्ति-सबध को ज्ञात कीजिये ।

$$\mu_{r+1} = r\lambda\mu_{r-1} + \lambda \frac{d}{d\lambda}\mu_r$$

और β_1 तथा β_2 भी ज्ञात कीजिये ।

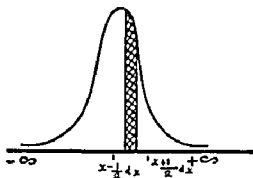
(एम० ए० पटना, 1956)

□ □ □

एक अत्यणु अन्तराल $(x - \frac{1}{2} dx)$ और $(x + \frac{1}{2} dx)$ में एक संतत चर X के विचर मानों के होने की प्रायिकता $f(x)$ निम्न सम्बन्ध के अनुसार होती है —

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x - \frac{1}{2} dx < X < x + \frac{1}{2} dx)}{dx} = f(x) \quad \dots (7.1)$$

फलन $f(x)$ (dx) को प्रायिकता घनत्व फलन कहते हैं। इसी प्रायिकता को चित्र (7-1) में दिखाया गया है।



चित्र 7-1 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P(x - \frac{1}{2} dx < X < x + \frac{1}{2} dx)$ का प्रदर्शित करता है।

$f(x) dx$ को प्रायिकता अवकल (probability differential) कहते हैं। संतत वक्र $y=f(x)$ को प्रायिकता घनत्व वक्र कहते हैं। चर X की सीमाएँ अनन्त अर्थात् $-\infty < X < \infty$ मानी जाती हैं। यदि चर X की सीमाएँ परिमित हो तो भी चर X की सीमाएँ अनन्त मान सकते हैं। ऐसी दशा में यह अभिधारणा खलनी होती है कि प्रायिकता घनत्व फलन निर्धारित सीमाओं के बाहर शून्य है। इसी बात को गणितीय भाषा में निम्न प्रकार कह सकते हैं —

माना कि चर X की सीमाएँ (a, b) हैं तो प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ निम्न प्रकार दिया जा सकता है —

$$f(x) = 0, \text{ जबकि } x < a \text{ या } x > b$$

$$f(x) = \psi(x), \text{ जहाँ } \psi(x), \text{ सीमाओं } a \text{ व } b \text{ में प्रायिकता घनत्व फलन है।}$$

संतत घटनों का सैद्धान्तिक विवरण अध्याय 5 में दिया जा चुका है। यहाँ केवल संतत बंटन दिये गये हैं।

प्रसामान्य वंटन

यदि किसी चर X के वंटन का प्राप्यता घनत्व फलन निम्न प्रकार का हो तो उसे प्रसामान्य चर कहते हैं और उसके वंटन को प्रसामान्य वंटन कहते हैं।

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \dots (7.2)$$

जहाँ $\sigma > 0$ और μ दो अचर हैं। यह सिद्ध किया जा सकता है कि (7.2) में वंटन का माध्य μ और मानक विचलन σ है। इस वंटन को $N(\mu, \sigma)$ से सूचित करते हैं।

यदि $\mu = 0$ और $\sigma = 1$ ही तो समीकरण (7.2) का रूप निम्नांकित हो जाता है -

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \dots (7.3)$$

इस स्थिति में चर X को मानक प्रसामान्य विचर (standard normal variate) कहते हैं। मानक प्रसामान्य वंटन फलन और घनत्व फलन की सारणियाँ बनायी जा चुकी हैं। यदि X एक $N(\mu, \sigma)$ चर है और हम उसके अचर मानों x_1 और x_2 के बीच होने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं तो

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= F\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) \quad \dots (7.4) \end{aligned}$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि यदि $X \sim N(\mu, \sigma)$ है तो $\frac{(X - \mu)}{\sigma}$ मानक प्रसामान्य विचर होगा। इसके वंटन फलन की सारणियाँ बनायी जा चुकी हैं और हम $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ ज्ञात कर सकते हैं।

$$\text{माना कि } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ है, जहाँ } Z \sim N(0, 1) \quad \dots (7.5)$$

काले विद्यार्थियों द्वारा दी गयी सारणी से 0 और Z पर शीटियों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है। यही क्षेत्रफल एक घटना की प्रायिकता या कुल का अनुपात बताता है। यदि हम क्षेत्रफल को 100 से गुणा करें तो एकको या अंश का 0 से Z के बीच प्रतिशत ज्ञात हो जाता है। मानक विचर के उपयोग को निम्न उदाहरण द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

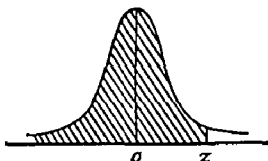
उदाहरण 7.1 हाई स्कूल की परीक्षा में एक शहर के विद्यार्थियों के प्राप्त अंकों का माध्य 228 और मानक विचलन 36 है, जहाँ पूर्णों की संख्या 500 है। यदि यह रूपना की गयी है कि अंका का वंटन प्रसामान्य है तो ज्ञात करना है कि कितने प्रतिशत

विद्यार्थियों के प्रत्यांक (1) 350 से कम हैं (2) 165 से कम हैं (3) 240 से 299 तक हैं (4) 300 से अधिक हैं (5) 150 से 250 तक हैं।

(1) सूत्र (7.5) के अनुसार इस स्थिति में

$$Z = \frac{350 - 229}{36} = 3.39$$

सारणी द्वारा 0 से Z तक का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जो कि 0.4997 है।



चित्र 7-2 देखाच्छादित क्षेत्र जो $P(Z < 3.39)$ को प्रदर्शित करता है।

यहाँ चित्र (7-2) में दिखाने गये देखाच्छादित भाग का क्षेत्रफल आवश्यक अनुपात को प्रदर्शित करता है। इस भाग का क्षेत्रफल $= 0.5 + 0.4997$

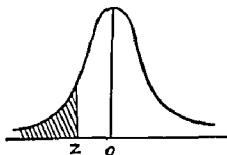
$$= 0.9997$$

अतः 350 से कम अंक पाने वाले विद्यार्थियों का प्रतिशत $= 0.9997 \times 100$
 $= 99.97$

(2) इस स्थिति में

$$Z = \frac{165 - 229}{36}$$

$$= -1.75$$



चित्र (7-3) देखाच्छादित क्षेत्र जो $P(Z < -1.75)$ को प्रदर्शित करता है।

चित्र (7.3) में दिये गये रेखाच्छादित क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए पहले 0 से 1.75 तक का क्षेत्र ज्ञात करके, फिर 0.5 में से इस क्षेत्र को घटा देना चाहिए जिससे आवश्यक क्षेत्रफल ज्ञात हो जाता है।

$$0 \text{ से } 1.75 \text{ तक का क्षेत्रफल} = 0.4599$$

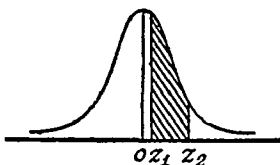
$$\text{अतः रेखांकित क्षेत्र} = 0.5 - 0.4599 = 0.0411$$

$$\text{अतः विद्यार्थियों का प्रतिशत} = 0.0411 \times 100 = 4.11$$

(3) इस स्थिति में Z के दो मान ज्ञात किये गये हैं। इन Z मानों के बीच का क्षेत्र ही आवश्यक क्षेत्र है जैसा कि चित्र (7-4) में दिखाया गया है।

$$Z_1 = \frac{240 - 228}{36} = 3.33$$

$$Z_2 = \frac{299 - 228}{36} = 1.97$$



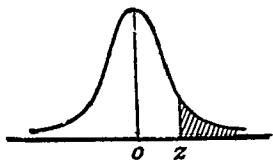
चित्र 7-4 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P(3.33 < Z < 1.97)$ को प्रदर्शित करता है।

$$0 \text{ से } Z_2 \text{ तक का क्षेत्रफल} = 0.4756$$

$$0 \text{ से } Z_1 \text{ तक का क्षेत्रफल} = 1.293$$

$$\text{अतः } Z_1 \text{ और } Z_2 \text{ के बीच का क्षेत्रफल} = 0.4756 - 0.1293 = 0.3463$$

$$\text{अतः विद्यार्थियों का प्रतिशत} = 0.3463 \times 100 = 34.63$$



चित्र 7-5 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P(Z > 2.0)$ को प्रदर्शित करता है।

(4) इस स्थिति में

$$Z = \frac{300 - 228}{36} = 2.0$$

0 से Z तक का क्षेत्रफल = 0.4772

चित्र (7.5) के अनुसार रेखाच्छादित भाग का क्षेत्रफल = $0.5 - 0.4772 = 0.0228$

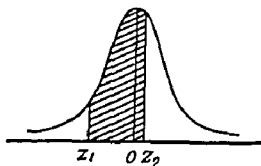
अतः प्रतिशत विद्यार्थियों की संख्या = 0.0228×100

$$= 2.28$$

(5) इस स्थिति में Z के दो मान ज्ञात करने होते हैं। यहाँ

$$Z_1 = \frac{150 - 228}{36} = -2.17$$

$$Z_2 = \frac{250 - 228}{36} = 0.61$$



चित्र 7.6 रेखाच्छादित क्षेत्र जो $P(-2.17 < Z < 0.61)$

को प्रदर्शित करता है।

0 से Z_1 तक का क्षेत्र = 0.4850

0 से Z_2 तक का क्षेत्र = 0.2291

चित्र (7.6) के अनुसार Z_1 और Z_2 के बीच का रेखांकित क्षेत्र = $0.4850 - 0.2291$

$$= 0.2559$$

अतः प्रतिशत विद्यार्थियों की संख्या = 0.2559×100

$$= 25.59$$

टिप्पणी यदि किसी प्रश्न में प्रतिशत संख्या न पूछकर, प्रायिकता पूछी गयी हो तो इन भागों का क्षेत्रफल ही प्रायिकता को निरूपित करता है अर्थात् इन संख्याओं को 100 से गुणा करने की आवश्यकता नहीं है।

प्रसामान्य वंटन के लिए माध्य के परितः आघूर्ण

सतत वंटन के लिए माध्य के परितः K वाँ आघूर्ण सूत्र (5.47.1) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

स्थिति 1 : यदि K एक सम सख्या है,

अर्थात् $K=2r$, जहाँ $r=1, 2, 3, \dots$ है तो निम्न व्यंजक का समाकलन करके K वाँ आघूर्ण ज्ञात कर सकते हैं।

$$\mu_{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} dx \quad \dots(7.6)$$

(7.6) का समाकलन करने पर निम्न सम्बन्ध प्राप्त होता है। पाठक चाहे तो स्वयं समाकलन करके इस सम्बन्ध की पुष्टि कर सकते हैं।

$$\mu_{2r} = (2r - 1) \sigma^2 \mu_{2r-2} \quad \dots(7.7)$$

अतः प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{2r-2} = (2r - 3) \sigma^2 \mu_{2r-4} \quad \dots(7.8)$$

समीकरण (7.7) में μ_{2r-2} का मान रखने पर,

$$\mu_{2r} = (2r - 1)(2r - 3) \sigma^4 \mu_{2r-4} \quad \dots(7.9)$$

इसी प्रकार निरन्तर प्रेरण विधि द्वारा,

$$\mu_{2r} = (2r - 1)(2r - 3)(2r - 5) \dots 3 \cdot 1 \sigma^{2r} \quad \dots(7.10)$$

r को विभिन्न मान 1, 2, 3, ... आदि देकर कोई सा भी सम क्रम का आघूर्ण ज्ञात कर सकते हैं।

$$\mu_2 = \sigma^2 \quad \text{जब } r=1$$

$$\mu_4 = 3\sigma^4 \quad \text{जब } r=2$$

$$\mu_6 = 15\sigma^6 \quad \text{जब } r=3$$

आदि।

प्रसामान्य वक्र के लिए ककुदता-गुणांक 3 के बराबर होता है। इस तथ्य को यहाँ आघूर्णों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है।

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \\ &= \frac{3\sigma^4}{(\sigma^2)^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

स्थिति 2 : यदि K एक विषम संख्या है,

$$\text{अर्थात् } K=2r+1$$

है, जहाँ $r=0, 1, 2, 3, \dots$ है तो निम्न समाकलन द्वारा K वां आघूर्ण μ_{2r+1} प्राप्त कर सकते हैं।

$$\mu_{2r+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^{2r+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} dx \dots(7.11)$$

यदि $\frac{x - \mu}{\sigma} = Z$ का प्रतिस्थापन करते तो उपर्युक्त समाकलन का रूप निम्न हो जाता है :—

$$\mu_{2r+1} = \frac{\sigma^{2r+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z^{2r+1} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \dots(7.11.1)$$

(7.11.1) द्वारा दिये गये समाकलन में Z का फलन विषम है। अतः इस समाकलन का मान शून्य है।

इस प्रकार $\mu_{2r+1} = 0$, जहाँ $r=1, 2, 3, \dots$

या $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \dots = 0$

इससे सिद्ध होता है कि प्रसामान्य बंटन के विषम क्रम के माध्य के परितः सब आघूर्ण शून्य के बराबर होते हैं।

प्रसामान्य बंटन का अभिलक्षण फलन

माना कि चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है। अध्याय 5 में दी गयी परिभाषा के अनुसार अभिलक्षण फलन,

$$\begin{aligned} \phi_x(t) &= E(e^{itx}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} dx \dots(7.12) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2} dx \dots(7.12.1) \end{aligned}$$

प्रतिस्थापन $\frac{x - \mu}{\sigma} = Z$ का प्रयोग करने (7.12.1) का समाकलन करने पर अभिलक्षण फलन $\phi_x(t)$ प्राप्त हो जाता है जो कि निम्न प्रकार है :—

$$\phi_x(t) = e^{(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2)} \quad \dots(7.13)$$

यदि $X \sim N(0, 1)$ है अर्थात् $\mu = 0$ और $\sigma = 1$ है तो प्रसामान्य वटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \dots(7.13.1)$$

प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय 1 - यदि स्वतन्त्र एवं यादृच्छिक चर X और Y के योग का वटन प्रसामान्य है तो चर X और Y भी अलग-अलग प्रसामान्य रूप से वटित होते हैं। यहाँ प्रमेय को सिद्ध नहीं किया गया है।

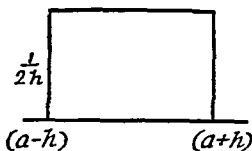
आयताकार वटन

एक यादृच्छिक चर X का वटन आयताकार कहा जाता है यदि इसका बारम्बारता फलन अन्तराल $(a-h, a+h)$ में सदैव $\frac{1}{2h}$ के समान होता है और इस अन्तराल के बाहर शून्य होता है। अतः प्रायिकता फलन

$$f(x) = \frac{1}{(a+h) - (a-h)} = \frac{1}{2h} \quad \dots(7.14)$$

$$= 0, \text{ अन्यथा}$$

$$\text{जबकि } (a-h) < x < (a+h)$$



चित्र 7.7 आयताकार वटन

इस वटन का माध्य a और प्रसरण $\frac{h^2}{3}$ के बराबर होता है। चर के रेखीय रूपान्तरण द्वारा वटन के विचरण विस्तार को किसी भी अन्तराल में परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए चर,

$$U = \frac{X - a + h}{2h}$$

अन्तराल $(0, 1)$ में एक समान रूप से वटित है। इस स्थिति में,

$$f(u) = 1 \\ = 0, \text{ अन्यथा जबकि } 0 < u < 1$$

बीशी-बंटन

एक चर X के लिए बीशी-बंटन का बारम्बाराता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\pi a} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \mu}{a}\right)^2} \quad \dots (7.15)$$

जहाँ $-\infty < x < \infty$

द्वारा दिया जाता है।

इस फलन में μ और a दो प्राचल हैं यदि $\mu = 0$ और $a = 1$ हो तो बारम्बाराता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\pi (1+x^2)} \quad \dots (7.151)$$

होता है।

इस बंटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = e^{\mu it - a |t|} \quad \dots (7.16)$$

जहाँ $a > 0$

होता है।

बीशी-बंटन एक-बहुलकीय है और बिन्दु $x = \mu$ के परितः गम है। μ इस बंटन की माध्यिका और बहुलक है। इस बंटन में विचारी भी अपूर्ण या अस्तित्व नहीं है। इसके निम्न व उच्च चतुर्भुज ($\mu - a$) व ($\mu + a$) होते हैं और अर्ध-चतुर्भुजा परिसर a के समान है।

कार्ल-पर्सन बंटन

यह बंटन सर्वप्रथम हेल्मर्ट (Helmert) और कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने दिया। यदि X एक यादृच्छिक चर $N(0, 1)$ है तो X^2 का बारम्बाराता फलन,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \quad \dots (7.17)$$

होता है।

जबकि $x > 0$

और $f(x) = 0$

जबकि $x < 0$

X^2 के बंटन का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}} \quad \dots (7.18)$$

होता है।

माना कि n स्वतन्त्र यादृच्छिक चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं जिनमें से प्रत्येक $N(0, 1)$ वंशित है तो चर,

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 \text{ के होता है।}$$

(7.18) द्वारा हम जानते हैं कि प्रत्येक X_j^2 के वंश का अभिलक्षण फलन

$$(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$$

है। χ^2 के वंश का अभिलक्षण फलन निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E\left(e^{it\chi^2}\right) \\ &= E\left\{e^{it(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)}\right\} \\ &= E\left(e^{itX_1^2}\right)E\left(e^{itX_2^2}\right)E\left(e^{itX_3^2}\right)\dots E\left(e^{itX_n^2}\right) \\ &= (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad \dots(7.19)$$

(7.19) द्वारा दिये गये फलन $(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ को χ^2 वंश का अभिलक्षण फलन कहते हैं।

गामा-वंश

यदि किसी चर X के वंश का बारम्बारता फलन निम्नलिखित हो, तो उसे गामा वंश कहते हैं।

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} \quad \dots(7.20)$$

जबकि $x > 0$

$$= 0$$

जबकि $x < 0$

जहाँ $\alpha > 0, \beta > 0$ वंश के दो प्राचल हैं।

इस वंश का अभिलक्षण फलन,

$$\phi_x(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\beta} \quad \dots(7.21)$$

है। यदि इस अभिलक्षण फलन में

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ और } \beta = \frac{n}{2}$$

के समान हो तो अभिलक्षण फलन का रूप निम्नांकित हो जाता है —

$$f_x(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} \quad \dots(7.21.1)$$

(7.21.1) द्वारा यह निष्कर्ष निकलता है कि X^2 का बारम्बारता वक्र वही होगा जो

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ और } \beta = \frac{n}{2}$$

को परामा बटन के लिए है। अतः समीकरण (7.20) में

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{n}{2}$$

और x के स्थान पर X^2 रखने पर X^2 -बटन का प्रायिकता घनत्व फलन प्राप्त हो जाता है जो कि निम्नांकित है —

$$f_n(X^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (X^2)^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{X^2}{2}} \quad \dots(7.22)$$

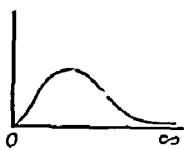
जबकि $x > 0$

$= 0$ अन्यथा

X^2 -बटन के एक मात्र प्राचल n को उत बटन की स्वतन्त्रता-कोटि¹ (degrees of freedom) कहते हैं।

कार्ई-वर्ग बंटन वक्र

स्वतन्त्रता कोटि 6 या इससे अधिक होने की स्थिति में X^2 -बटन के बारम्बारता वक्र का रूप चित्र (7-8) में दिखाया गया है।

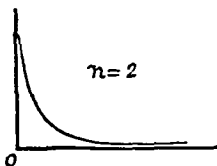


चित्र 7-8 कार्ई वर्ग बंटन वक्र जब $n > 6$

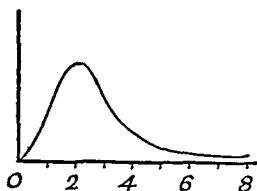
यह वक्र X -घटत पर 0 से ∞ तक विचरता है और इसका कोई भी भाग ऋण अनुभागीय में नहीं होता है। X^2 -बटन के बारम्बारता वक्र का रूप n के मान पर निर्भर

1. स्वतन्त्रता-कोटि का वर्णन चक्राव 9 में दिया गया है। इसे यहाँ समझे।

रहता है। यदि $n=2$ हो तो वक्र का रूप चित्र (7-9) और $n=4$ या 5 होने की स्थिति में वक्र का रूप चित्र (7-10) में दिखाया गया है।



चित्र 7-9 वार्ड-वर्ग वंटन वक्र जब $n=2$



चित्र 7-10 वार्ड-वर्ग वंटन वक्र जब $n=4$ या 5

वार्ड-वर्ग वंटन के आघूर्ण

χ^2 -वंटन का घूर्ण्य के परितः k वाँ आघूर्ण μ_k' निम्न होता है।

$$\mu_k' = \frac{2^k \left| \frac{n}{2} + k \right|}{\left| \frac{n}{2} \right|} \quad \dots(7.23)$$

सम्बन्ध (7.23) में k के मान 1, 2, 3, रखने पर χ^2 -वंटन के पहले, दूसरे, तीसरे क्रम के आघूर्ण ज्ञात हो जाते हैं। यहाँ केवल प्रथम दो आघूर्ण दिये गये हैं।

$$\mu_1' = \frac{2 \cdot \left| \frac{n}{2} + 1 \right|}{\left| \frac{n}{2} \right|} = n \quad \dots(7.23.1)$$

$$\mu'_2 = \frac{2^2 \left[\frac{n}{2} + 2 \right]}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = (n+2) \sigma \quad \dots(7.23.2)$$

घत X^2 का प्रसरण μ_2 निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_2' - (\mu_1')^2 \\ &= (n+2) \sigma - n^2 = 2n \end{aligned} \quad \dots(7.23.3)$$

घनोन्मीय कार्द-वर्ग बंटन

यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ स्वतन्त्र चर हैं, जहाँ X_i का बंटन $N(\mu_i, 1)$ है ($i=1, 2, 3, \dots, k$) तो चर

$$U = \sum_{i=1}^k X_i^2$$

के बंटन का घनत्व फलन निम्न होता है —

$$f_u(u) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^\beta}{(\beta!)^k} \frac{1}{2^{\frac{k}{2} + \beta}} \frac{u^{\beta + \frac{k}{2} - 1}}{\left[\beta + \frac{k}{2} \right]} e^{-\frac{u}{2}} \quad \dots(7.24)$$

जबकि $0 < u < \infty$

(7.24) में k प्रसामान्य चरों की संख्या है और

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \mu_i^2$$

है। इस बंटन को घनोन्मीय कार्द-वर्ग बंटन कहते हैं। k और τ इस बंटन के प्राचल हैं। τ को घनोन्मीयता प्राचल कहते हैं।

यदि $\tau = 0$ हो तो उपर्युक्त बंटन केन्द्रीय कार्द-वर्ग बंटन में परिवर्तित हो जाता है।

(7.24) द्वारा दिये गये U के बंटन का सापूणं जनक फलन,

$$\sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{e^{-\tau} \tau^\beta}{\beta!} (1 - 2t)^{-\left(\frac{k}{2} + \beta\right)} \quad \dots(7.25)$$

है।

टिप्पणी τ के विभिन्न मानों के लिए मिस एवलिन् फिक्स (Miss Evelyn Fix) ने घनोन्मीय कार्द-वर्ग बंटन के लिए सारणिणी बनायीं। ये सारणिणी बंनिचोनिया विश्व-विद्यालय प्रेस द्वारा 1949 में प्रकाशित हुई हैं।

स्टुडेंट का t -वंटन

मह बटन सर्वप्रथम डब्लू एस गॉसेट (W S Gosset) ने 1908 में दिया था। माना कि U और $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, (n+1)$ स्वतन्त्र यादृच्छिक चर हैं। इनमें से प्रत्येक का बटन प्रसामान्य है और इनके प्राचर $(0, \sigma)$ हैं।

माना कि,

$$V = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2} \quad \dots(7.26)$$

यहाँ केवल घनात्मक वर्गमूल ही लिया गया है।

चर $\frac{U}{V}$ को चर t कहते हैं।

$$t = \frac{U}{V} = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^2}} \quad \dots(7.27)$$

t का बटन फलन,

$$F(t) = P(t \leq x)$$

$$= P\left(\frac{U}{V} < x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\left|\frac{(n+1)}{2}\right|}{\left|\frac{n}{2}\right|} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dt \quad \dots(7.28)$$

व्यजक (7.28) में t बटन की स्वतन्त्रता की कोटियाँ n हैं। t का वारम्बारता फलन

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\left|\frac{n+1}{2}\right|}{\left|\frac{n}{2}\right|} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \dots(7.29)$$

$$\text{व्यजक } \frac{\sqrt{\pi} \left|\frac{n}{2}\right|}{\left|\frac{(n+1)}{2}\right|}$$

को $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ में भी सूचित किया जाता है।

इस वटन के प्रायस n का उसकी स्वतन्त्रता-कोटि बढ़ते हैं।

जबकि $n=1, 2, 3, \dots$

t वटन का माध्य 0 है और $n > 2$ के लिए प्रसरण $\frac{n}{n-2}$ है।

टिप्पणी यदि चर $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ का प्रसरण समान न हो तो उक्त स्थिति में प्रत्येक चर को उसके तदनुसार मानक विचलन से भाग दे देना चाहिये। इस प्रकार रूपान्तरित चर का प्रसरण 1 के समान होगा अर्थात् रूपान्तरित चरों के लिए $\sigma=1$ हो जायेगा।

साधारणतया t वटन को निम्न प्रकार से समझ सकते हैं। माना कि एक सामान्य समष्टि, जिसका माध्य μ और प्रसरण σ^2 है, में से n परिमाण के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकल्पित माध्य \bar{X} और मानक विचलन s हो तो परिकल्पना $H_0: \mu = \mu_0$ के अन्तर्गत

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{s} \quad \dots(7.30)$$

होता है।

चर t का बारम्बारता फलन (7.29) द्वारा दिया गया है। यदि n बृहद् हो तो चर t का वटन प्रसामान्य हो जाता है।

t-वटन के गुण

- (क) t-वटन का बारम्बारता वक्र एक-बहुलक है और बिन्दु 0 के परितः सममित है।
- (ख) $k < n$ के लिए k वाँ अपूर्ण परिमित होता है अर्थात् यदि $n > 2$ हो तो मानक विचलन और उच्च क्रम के अपूर्ण परिमित होते हैं।
- (ग) t-वटन सममित होने के कारण इसके सभी विषम क्रम के अपूर्ण शून्य होते हैं। अतः यदि $2r+1 < n$ हो तो $\mu_{2r+1} = 0$
- (घ) यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\mu_2 = \frac{n}{n-2} \quad \text{और} \quad \mu_4 = \frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$$

(ङ) 1 स्वतन्त्रता कोटि का t-वटन कीर्तो वटन होता है।

अकेन्द्रीय t-वटन

यदि X और U आदृष्टिक चर हों जिनमें से $X \sim N(D, \sigma)$ और चर U केन्द्रीय X_n^2 वटित हों तो अनुपात

$$\frac{\frac{X}{\sigma}}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

का बटन अकेन्द्रीय t -बटन कहलाता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि n है और अकेन्द्रीय प्राचल D है जो कि शून्य नहीं है। अनुपात

$$\frac{X}{\sigma} \\ \sqrt{\frac{U}{n}}$$

का प्रायिकता घनत्व फलन $f(t)$ निम्नांकित होता है —

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{D^2}{2\sigma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{D^2}{2n\sigma^2} \right)^k \frac{1}{k! \beta\left(\frac{n}{2}, k + \frac{1}{2}\right)} \\ \frac{t^{2k}}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2} + k + \frac{1}{2}}} \quad \dots(7.31)$$

जहाँ $-\infty < t < \infty$

टिप्पणी : अकेन्द्रीय बटन के लिए जी. जे. रेनिकोफ (G. J. Renikoff) और जी. जे. लिबरमैन (G. J. Liberman) ने सर्वप्रथम व्यापक सारणी दी और इसे स्टेनफोर्ड विश्व-विद्यालय ने 1957 में प्रकाशित किया।

F-बटन

माना कि स्वतन्त्र एवं प्रसामान्य $(n_1 + n_2)$ यादृच्छिक चर $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n_1}$ और $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n_2}$ हैं जिनमें से प्रत्येक के प्राचल $(0, \sigma)$ हैं।

$$\xi = \sum_{i=1}^{n_1} U_i^2 \quad \text{और} \quad \eta = \sum_{j=1}^{n_2} V_j^2$$

ξ और η के अनुपात के बटन को $F_{n_1, n_2}(\xi/\eta)$ द्वारा निरूपित करते हैं या इसे केवल F-बटन कहते हैं। स्पष्ट है कि ξ और η अलग-अलग $\sigma^2 X^2$ बटन का पालन करते हैं। इसका अभिप्राय है कि दो X^2 चरों के अनुपात का बटन F होता है।

माना कि

$$w = \frac{\xi/n_1}{\eta/n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} U_i^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} V_j^2/n_2} \quad \dots(7.32)$$

ξ और η स्वतंत्र एव घनात्मक हैं अत $w > 0$ है। यहाँ ξ व η क्रमश $X^2_{n_1} \sigma^2$ व $X^2_{n_2} \sigma^2$ बटित हैं अत यह सिद्ध किया जा सकता है कि w का वटन F-वटन होता है। यह वटन ξ और η के अलग अलग वारम्भारता फलन के समानान्तो के गुणनफल के समान होता है जोकि असम्भारता $\eta > 0$ और $0 < \xi < \eta w$ द्वारा दिये गये प्रदेश (domain) पर परिभाषित है।

व्यवहार में F-वटन का प्रयोग दो प्रसरण के अनुपात के लिए होता है। अत इसी को लेकर F-वटन का वर्णन दिया गया है।

प्रमेय 2 यदि एक समग्र $N (\mu, \sigma)$ हो और उसमें लिए गये प्रतिदर्शों प्रेषण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हों व इन प्रतिदर्शों का माध्य X और प्रसरण s^2 हो, तो चर $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ का वटन X^2 होता है जिसकी स्वतंत्रता-चोटियाँ $(n-1)$ हैं।

माना कि दो समग्रों से, जिनके प्रसरण समान हैं, परिमाण n_1 व n_2 के प्रतिदर्शों का अयन किया गया है। इन प्रतिदर्शों के प्रसरण क्रमश s_1^2 व s_2^2 हैं।

(7.32) के लिए दिये वर्णन के आधार पर प्रमेय 2 के उपयोग से निम्नांकित सम्बन्ध दिया जा सकता है :-

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} F_{\nu_1, \nu_2} = \frac{\nu_1 s_1^2 / \sigma^2}{\nu_2 s_2^2 / \sigma^2} = \frac{X^2_{\nu_1}}{X^2_{\nu_2}} \quad \dots (7.33)$$

जहाँ $\nu_1 - 1 = n_1$ और $\nu_2 - 1 = n_2$

उपर्युक्त सम्बन्ध से स्पष्ट है कि दो वार्ड वगैरे का अनुपात F-वटित है। यह अनुपात, माना x , एक बीटा चर है और इसका घनत्व फलन निम्न होता है -

$$f(x) dx = \frac{x^{p-1} (1+x)^{-p-q}}{\beta(p, q)} dx \quad \dots (7.34)$$

जहाँ $p = \frac{\nu_1}{2}$, $q = \frac{\nu_2}{2}$

और $0 < x < \infty$

यहाँ $F = \frac{\nu_2}{\nu_1} x$ या $dF = \frac{\nu_2}{\nu_1} dx$

अत F का घनत्व फलन (7.34) की ग्रहाणना से,

$$f(x) dx = g(F) \frac{\nu_1}{\nu_2} dF$$

$$\begin{aligned} \therefore g(F) dF &= \frac{\left(\frac{y_1}{y_2} F\right)^{p-1} \left(1 + \frac{y_1}{y_2} F\right)^{-(p+q)}}{\beta(p, q)} \frac{y_1 dF}{y_2} \\ &= \frac{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^p F^{p-1}}{\beta(p, q) \left(1 + \frac{y_1}{y_2} F\right)^{p+q}} dF \\ g(F) &= \frac{\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{y_1/2} F^{y_1/2-1}}{\beta\left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{2}\right) \left(1 + \frac{y_1}{y_2} F\right)^{\frac{y_1+y_2}{2}}} \end{aligned} \quad \dots(7.35)$$

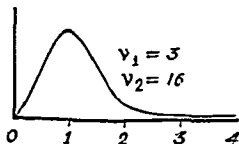
y_1 व y_2 को F बटन की स्वतंत्रता कोटि कहते हैं।

F-बंटन के गुण

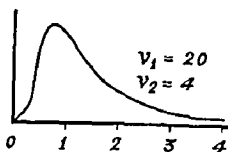
- (अ) F का मान कदापि ऋणात्मक नहीं हो सकता क्योंकि अंश व हर में प्रत्येक संकेत घनात्मक सम्बन्धित हैं। अतः इनका अनुपात भी घनात्मक ही होता है।
- (ब) F -बंटन एक घनात्मक-विषम बंटन है।
- (स) प्रतिदर्श F -बंटन वक्र का उच्चतम बिन्दु $F = \frac{n_2(n_1-2)}{n_1(n_2+2)}$ पर स्थित होता है

और इसका माध्य $F = \frac{n_2}{n_2-2}$ पर स्थित होता है। स्पष्टतः माध्य संकेत 1 से

बहुत बड़ा होता है। विभिन्न स्वतंत्रता कोटियों के लिए दो F वक्रों के रूप चित्र (7.11) और (7.12) में दिखाये गये हैं।



चित्र 7-11 F -बंटन वक्र जब $y_1=3, y_2=16$.



चित्र 7-12 F-वंटन वक्र जब $\nu_1=20$, $\nu_2=4$

अकेन्द्रीय F-वंटन

अकेन्द्रीय F, एक अकेन्द्रीय χ^2 और एक स्वतंत्र व केन्द्रीय χ^2 के अनुपात के समान होता है। माना कि इनकी स्वतंत्रता वोटिपी क्रमशः μ_1 और ν_2 है और माना कि अकेन्द्रीय फाई-वर्ग χ_1^2 से और केन्द्रीय फाई वर्ग χ_2^2 में प्रदर्शित किये गये हैं, तो अकेन्द्रीय F विवर निम्नांकित होता है।

$$F_1 = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2} \quad \dots (7.35)$$

यही अकेन्द्रीय F को F_1 द्वारा निरूपित किया गया है जिसकी स्व० वा० ν_1 व ν_2 है।

χ_1^2 -वंटन का अकेन्द्रीय प्राचल r है जबकि r एक घनात्मक घचर मान है और χ_2^2 का वंटन (7.22) के अनुसार है। घन χ_1^2 व χ_2^2 का सम्मिलित वंटन, दोनों वंटनों के गुणफल के समान है क्योंकि χ_1^2 व χ_2^2 स्वतंत्र है। सम्मिलित वंटन का χ_2^2 के

सम्बन्ध में प्राणिक समाकलन करने, $\frac{\nu_2 \chi_1^2}{\nu_1 \chi_2^2}$ के स्थान पर F_1 का प्रतिस्थापन करने पर

F_1 का अर्थात् अकेन्द्रीय-F का वंटन प्राप्त हो जाता है। घन F_1 का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न रूप में दिया जा सकता है।

$$f(F_1) = \frac{e^{-r}}{\left(\frac{\nu_2}{2}\right)^B} \sum_{B=0}^{\infty} \frac{r^B}{B!} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} + B} F_1^{\frac{\nu_1}{2} + B - 1} \left[\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + B \right] \dots (7.36)$$

$$\frac{\left(\frac{\nu_1}{2} + B\right) \left(1 + \frac{\nu_1 F_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + B}}{\dots}$$

जबकि $0 < F_1 < \infty$

फिशर का Z-बंटन

Z-बंटन के लिए फिशर ने माना कि

$$Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1}{2} \log_e F \quad \dots (7.37)$$

या $F = e^{2Z} \quad \dots (7.37.1)$

अतः (7.35) में F के स्थान पर e^{2Z} रखने पर फिशर का Z बंटन ज्ञात हो जाता है। इसलिए Z का प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(Z) dZ = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right)} \frac{(e^{2Z})^{\frac{\nu_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{2Z}\right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} 2e^{2Z} dz \quad \dots (7.38)$$

$$[\because 2e^{2Z} dz = dF]$$

$$f(Z) = 2 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}{\left[\frac{\nu_1}{2} \right] \left[\frac{\nu_2}{2} \right] \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{2Z} \right)^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}} e^{\nu_1 Z} \quad \dots (7.38.1)$$

बंटन F और e^{2Z} के लिए दिये गये फलनों में कोई मूल अन्तर नहीं है। यह एक ही बंटन के दो रूप हैं। इसी कारण F या e^{2Z} बंटन के लिए एक ही प्रायिकता सारणी दी जाती है।

बीटा-बंटन

माना कि

$$\theta = \frac{w}{1+w} = \frac{E}{E+w} \quad \dots (7.39)$$

जब कि w का मान (7.32) द्वारा दिया गया है। θ की सीमाएँ 0 से 1 हैं अर्थात् $0 < \theta < 1$ ।

यदि θ का बारम्बारता फलन,

$$f(\theta) = 0 \quad \text{जब कि } \theta < 0 \quad \text{या } \theta > 1$$

यदि θ का वटन फलन,

$$P(\theta < x) = P\left(w < \frac{x}{1-x}\right) = F_{\nu_1, \nu_2}\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \dots (7.40)$$

यदि θ का बारम्बारता फलन निम्नान्वित है —

$$f(\theta) = \frac{1}{(1-x)^2} f(\nu_1, \nu_2) \left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \dots (7.41)$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} + 1} \left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)}{\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}} x^{\nu_1} (1-x)^{\nu_2} \quad \dots (7.41.1)$$

$$= B\left(x, \frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) \quad \dots (7.41.2)$$

क्योंकि हम जानते हैं कि,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

बीटा-वटन का k वां आधुनिक

परिभाषा के अनुसार,

$$\mu'_k = \int_0^1 x^k \frac{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} - 1} \left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)}{\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}}} x^{\nu_1} (1-x)^{\nu_2} dx \quad \dots (7.42)$$

$$= \frac{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} + k} \left(\frac{\nu_2}{2} - 1\right)}{\left(\frac{\nu_1}{2}\right)^{\frac{\nu_1}{2} + k} \left(\frac{\nu_2}{2}\right)^{\frac{\nu_2}{2} + k}} \quad \dots (7.42.1)$$

व्यञ्जक (7.42.1) में k के विभिन्न मान रखने पर विभिन्न आधुनिक प्राप्त हो जाते हैं।

जब $k=1$ हो तो,

$$\mu_1' = \frac{\left| \frac{y_1 + y_2}{2} \right| \sqrt{\frac{y_1}{2} + 1}}{\left| \frac{y_1}{2} \right| \sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2} + 1}} = \frac{y_1/2}{(y_1 + y_2)^2} \quad \dots (7.43)$$

जब $k=2$ हो तो,

$$\begin{aligned} \mu_2' &= \frac{\left| \frac{y_1 + y_2}{2} \right| \sqrt{\frac{y_1}{2} + 2}}{\left| \frac{y_1}{2} \right| \sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2} + 2}} \\ &= \frac{\left(\frac{y_1}{2} + 1 \right) \left(\frac{y_1}{2} \right)}{\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + 1 \right) \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)} \\ &= \frac{y_1 (y_1 + 2)}{(y_1 + y_2) (y_1 + y_2 + 2)} \quad \dots (7.44) \end{aligned}$$

अतः बौटा बटन का प्रसरण,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_2' - \mu_1'^2 \\ &= \frac{y_1 (y_1 + 2)}{(y_1 + y_2) (y_1 + y_2 + 2)} - \frac{y_1^2}{(y_1 + y_2)^2} \\ &= \frac{2 y_1 y_2}{(y_1 + y_2)^2 (y_1 + y_2 + 2)} \quad \dots (7.45) \end{aligned}$$

इसी प्रकार किसी भी क्रम के माध्यमं ज्ञात किये जा सकते हैं।

Z, F, t और χ^2 में सम्बन्ध

ये सब प्रतिदर्शज एक दूसरे से भिन्न हैं और इनका प्रयोग परिस्थितियों के अनुसार होता है। किन्तु कुछ विशेष परिस्थितियों में ये एक दूसरे से सम्बन्धित हो जाते हैं। इन सबका विवरण इस अध्याय में दिया जा चुका है अतः यहाँ इनमें केवल सम्बन्ध ही के विषय में बताया गया है।

$$\text{फिचर } Z = \log_e \sqrt{F} \quad \dots (7.46)$$

यदि विभिन्न सायंकता स्तरों के लिए Z-सारणी दी गयी हो तो F का मान ज्ञात कर सकते हैं और यदि F-सारणी उपलब्ध हो तो Z का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$$t_{y_2} = \sqrt{F} \quad (1, y_2) \quad \dots (7.47)$$

जब कि प्रतिदर्शज t की स्व० को० ν_2 है और F की स्व० को० $(1, \nu_2)$ है। यहाँ भी यदि एन प्रतिदर्शज का सारणीबद्ध मान शात हो तो ग्रन्थ का मान (7 47) की सहायता से शात कर सकते हैं। यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि F में ग्रन्थ (प्रसरण या X^2) की स्व० को० 1 ही होना चाहिए, अर्थात् $\nu_1 = 1$

$$t^2_{\infty} = X^2_1 \quad \dots (7 48)$$

यहाँ t^2 की स्व० को० ∞ और X^2 की स्व० को० 1 है इस शृण के कारण इन दोनों को एक ही प्राण में दिसाया जा सकता है। X^2 के मान F -सारणी द्वारा भी प्राप्त किये जा सकते हैं। $\nu_2 = \infty$ स्व० को० के लिए F के मान को ग्रन्थ की स्व० को० में गुणा करने से X^2 का मान शात हो जाता है।

प्रथम सांख्यिकी

माना कि एक संतत वंटन वाले समग्र में से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का न्यून किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है। माना कि X का बारम्बारता फलन $f(x)$ है जो कि सीमाओं a व b में x के किसी मान के लिए घनात्मक है अर्थात् $a < x < b$ यदि प्रेक्षणों X_i में से सबसे छोटे प्रेक्षण को y_1 में, उसके बाद उसके बड़े को y_2, \dots और सबसे बड़े प्रेक्षण को y_n से से निरूपित कर दें तो $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n$ और इन प्रमित प्रेक्षणों के वंटन सम्बन्धी कुछ विशेष लक्षण होते हैं जिनको निम्नांकित प्रमेयों में दिया गया है। इसी को प्रथम सांख्यिकी कहते हैं।

प्रमेय 1 : यदि $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ प्रमित प्रेक्षण हैं तो इनका सम्मिलित वंटन,

$$f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) f(y_3) \dots f(y_n) \quad \dots (7 49)$$

जब कि $f(y_1), f(y_2), f(y_3), \dots, f(y_n)$ प्रथम $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ के बारम्बारता फलन हैं।

प्रमेय 2 : प्रमित प्रेक्षणों y_2, y_3, \dots, y_n में से प्रेक्षण y_1 का उपान वंटन फलन,

$$f_1(y_1) = n! \frac{\{1 - F(y_1)\}^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\{F(y_1)\}^{1-1}}{(1-1)!} f(y_1) \quad \dots (7 50)$$

जब कि $F(y_1), y_1$ का वंटन फलन है और $f(y_1), y_1$ का बारम्बारता फलन है।

प्रमेय 3 : प्रथम सांख्यिकी में y_1 और y_2 का सम्मिलित बारम्बारता फलन $f_{(1)}(y_1, y_2)$ निम्न होता है जब कि $1 < j$

$$f_{(1)}(y_1, y_2) = \frac{n!}{(j-1)! (j-1-1)! (n-j)!} [F(y_1)]^{j-1} \times$$

$$[F(y_2) - F(y_1)]^{j-1-1} \times [1 - F(y_2)]^{n-j} f(y_2) f(y_1) \quad \dots (7 51)$$

प्रमेय 4 : यदि प्रतिदर्श पराल $R = (y_n - y_1)$ हो तो R का उपान वंटन $f(R)$ निम्नांकित होता है :—

माना कि $y_1 = U$ और $y_n = y_1 + R = U + R$ तो उपांत बंटन $f(R)$, निम्नांकित होता है :—

$$f(R) = \int_a^{b-R} \frac{n!}{(n-2)!} [F(R+U) - (F)]^{n-2} \times f(U) f(R+U) dU \quad \dots(7.52)$$

प्रमेय 5 : माना कि समग्र से एक n परिमाण के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ का चयन किया गया है और $L_1 (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ व $L_2 (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ प्रतिदर्श प्रेक्षणों के दो फलन इस प्रकार हैं कि $L_1 \leq L_2$ और अन्तराल (L_1, L_2) में समग्र के एक निश्चित प्रतिशत का होना प्रत्याशित है, तो L_1 व L_2 को सहिष्णुता सीमाएँ कहते हैं। इन सहिष्णुता सीमाओं पर बारम्बारता फलन $f(X)$ के रूप का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

$$\text{माना कि } L_1 (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = y_1$$

$$\text{और } L_2 (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = y_n$$

तो y_1 और y_n के बीच में प्रेक्षणों का कम से कम α अनुपात होने की प्रायिकता β निम्न सम्बन्ध से ज्ञात कर सकते हैं।

$$P \left\{ (y_1 < X < y_n) > \alpha \right\} = \beta \quad (7.53)$$

सूत्र (7.51) की सहायता से, y_1 व y_n का सम्मिलित बारम्बारता फलन,

$$f_{1n}(y_1, y_n) = \frac{n!}{(n-2)!} \left[F(y_n) - F(y_1) \right]^{n-2} f(y_n) f(y_1) \quad (7.54)$$

$$\text{जहाँ } a < y_1 < y_n < b$$

यदि रूपान्तरण $F(y_1) = Z_1, F(y_n) = Z_n$ कर दिया जाय

$$\text{तो जैकोबियन } J = \frac{1}{f(y_1) f(y_n)}$$

$$\text{और } f(Z_1, Z_n) = \frac{n!}{n(n-2)!} (Z_n - Z_1)^{n-2} \quad (7.54.1)$$

$$\text{जहाँ } 0 < Z_1 < Z_n < 1$$

$$\text{अथवा } f(Z_1, Z_n) = 0$$

$$\text{फिर रूपान्तरण } Z_n - Z_1 = p \quad \text{और } Z_1 = m_1 \quad \text{कर दें तो,}$$

$$\text{जैकोबियन } J = 1$$

$$\text{और } f(m_1, p) = n(n-1)p^{n-2} \quad (7.54.2)$$

जहाँ $0 < p < 1$

p का उपांत वटन,

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^{1-p} f(m_1, p) dm_1 \\ &= \int_0^{1-p} n(n-1)p^{n-2} dm_1 \\ &= n(n-1)p^{n-2} \left(m_1 \right)_0^{1-p} \end{aligned}$$

$$= n(n-1)p^{n-2}(1-p) \quad (7.54.3)$$

प्रत (7.54.3) के आधार पर प्रमेय को निम्न रूप में लिख सकते हैं —

यदि घट्ट का संतत बारम्बारता वलन है और p इस समय मे से एक n परिमाण के घाटच्छदत प्रतिदशं के चरम प्रेशणो के बीच समय का अनुपात है तो p का बारम्बारता

वलन $f(p) = n(n-1)(p^{n-2} - p^{n-1})$

जहाँ $0 < p < 1$

अन्यथा $f(p) = 0$

व्यञ्जन (7.53) द्वारा दी गयी प्रायिकता के सूत्रो (7.54) और (7.54.3) की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं

$$P \{ (y_1 < X < y_n) > \alpha \} = \beta$$

$$\text{या } P \{ [F(y_n) - F(y_1)] > \alpha \} = \beta$$

$$P \{ (Z_n - Z_1) > \alpha \} = \beta$$

$$P \{ p > \alpha \} = \beta$$

$$\therefore \int_{\alpha}^1 n(n-1)p^{n-2} (1-p) dp = \beta$$

$$n(n-1) \left[\left\{ \frac{p^{n-1}}{n-1} \right\}_\alpha^1 - \left\{ \frac{p^n}{n} \right\}_\alpha^1 \right] = \beta$$

$$n(n-1) \left[\frac{1}{n-1} - \frac{\alpha^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{\alpha^n}{n} \right] = \beta$$

$$\therefore 1 - n\alpha^{n-1} + (n-1)\alpha^n = \beta \quad (7.55)$$

α के निश्चित मान के लिए (7.55) द्वारा प्राप्त प्रायिकता n का फलन है अतः β के दिये हुए मान के लिए यह फलन केवल n पर निर्भर है। सामान्य रूप में यह फलन n , α और β पर निर्भर है जबकि $L_1 = y_1$ और $L_2 = y_n$ (L_1, L_2) स्वतन्त्र सहिष्णुता सीमाएँ हैं।

उदाहरण 14.9 :—प्रतिदर्श परिमाण कितना हो, कि प्रतिदर्श के चरम प्रेक्षणों y_1 और y_n के बीच 90 प्रतिशत समग्र के घटक होने की प्रायिकता 95 है इसे निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —यहाँ $\alpha = 90$, $\beta = 95$

अथ समीकरण (7.55) द्वारा

$$1 - n(90)^{n-1} + (n+1)(90)^n = 95$$

$$(90)^n = 95 - n(90)^{n-1} + n(90)^n$$

$$= 95 - n(90)^{n-1} (10)$$

$$(90)^n + \frac{n}{10}(90)^{n-1} = 95$$

$$(90)^{n-1} \left\{ 90 + \frac{n}{10} \right\} = 95$$

$$(90)^{n-1} (9+n) = 95$$

$$\therefore (90)^{n-1} = \frac{95}{9+n}$$

$$\text{या } (90)^n = \frac{45}{9+n}$$

n का मान जाँच और भूल विधि (Trial and error method) द्वारा पाठक स्वयं ज्ञात कर सकते हैं।

कोटियों द्वारा प्रसरण-विश्लेषण

कोटियों द्वारा प्रसरण विश्लेषण अत्यन्त सुगम है और इसका मुख्य लाभ यह है कि इसके लिए प्रेक्षणों का बटन प्रसामान्य मानन या प्रसरण की सजानीयता के प्रति कल्पना नहीं करनी होती है इस विधि के अन्तर्गत शोधकों के परिणामों को कोटियों में परिवर्तित कर दिया जाता है और इसके पश्चात् प्रयोग में लिये गये प्रेक्षणों का प्रयोग करके शोधकों में अन्तर के प्रति परिवर्तना की परीक्षा कर ली जाती है। यहाँ इन विधियों का विवरण नहीं दिया गया है क्योंकि विधियाँ अधिक प्रचलन में नहीं हैं। इस अध्याय में जो विधियाँ दी गयी हैं, उनमें विषय का समुचित ज्ञान मिल जाता है।

प्रश्नावली

1 : यदि X एक संतत चर है जिसका बारम्बारता फलन $f(x)$ है और बंटन फलन $F(x)$ है, तो रेखीय फलन $(ax+b)$ का बंटन ज्ञात कीजिये।

2 प्रसामान्य बंटन के गुणों का वर्णन कीजिये।

(बी कॉ बम्बई 1970)

3 : अप्राचल बंटन से आप क्या समझते हैं ? स्पष्ट कीजिये।

4 : बताइये कि, t -बंटन वक्र में और प्रसामान्य बंटन वक्र में क्या अन्तर होता है ?

5 : किसी बंटन के अभिलक्षण फलन से आप क्या समझते हैं ? स्पष्ट कीजिये और यह भी बताइये कि इनका बंटन की दृष्टि से क्या महत्व है ?

6 क्या विन्ही दो बंटनों के अभिलक्षण फलन एक से हो सकते हैं ? उत्तर की पुष्टि कीजिये।

7 नीचे दिये गये संतत बंटन के लिए,

$$dF = \frac{1}{B(m, n)} (1-x)^{m-1} x^{n-1}, \quad 0 < x < 1, m, n > 0$$

ज्ञात करिये कि,

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{m}{m+n}, \quad \text{हरारमक माध्य} = \frac{m-1}{m+n-1},$$

$$\text{और प्रसरण} = \frac{mn}{(m+n)^2 (m+n+1)}$$

संस्थापन कीजिये कि

$$A H > H M$$

(भागरा, 1954)

□ □ □

अनेक बार किसी समग्र में बारम्बारता बंटन का ज्ञान नहीं होता है परन्तु यदि हम उसमें से एक बृहत् प्रतिदर्श लें तो प्रतिदर्श माध्य के बंटन का सन्निकटन किया जा सकता है। सन्निकटन (approximation) प्रायिकता सिद्धान्त के कुछ प्रमेयों पर आधारित है जो सीमा प्रमेय कहलाते हैं।

चेबीचेफ असमिका

माना X एक यादृच्छिक चर है, जिसके लिए,

$E(X) = \mu$ और $V(X) = \sigma^2$ है जहाँ, μ और σ^2 परिमित हैं, तो एक अशून्यात्मक राशि k के लिए,

$$P(|X - \mu| > k) < \frac{\sigma^2}{k^2} \quad (8.1)$$

प्रमाण : माना कि चर X का प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ है। तो

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\mu - k} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu - k}^{\mu + k} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &\quad + \int_{\mu + k}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

(8.2.1) में बीच के समाकलन का मान सदैव धनात्मक है तथा प्रथम और तृतीय समाकलन में $(x - \mu)^2 > k^2$ है।

$$\begin{aligned} \therefore \sigma^2 &> k^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu - k} f(x) dx + \int_{\mu + k}^{\infty} f(x) dx \right] \\ &> k^2 P(|X - \mu| > k) \end{aligned}$$

$$\text{या } P(|X - \mu| > k) < \frac{\sigma^2}{k^2}$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

विभिन्न प्रकार के अभिसरणों की परिभाषा

माना कि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है।

(क) प्रायिकता-अभिसरण या दुर्बलता से अभिसरण

प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिए यदि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - C| > \epsilon) = 0 \quad (8.3)$$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ प्रायिकता में स्थिरांक C की ओर अभिसृत हो

रहा है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{P} C$ का प्रयोग किया जाता है।

(ख) सबल या सगमय निश्चित अभिसरण

$$\text{यदि } \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = C) = 1 \quad (8.4)$$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ सबल या निश्चित रूप से स्थिरांक C की ओर अभिसृत होता है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{a.s.} C$ का प्रयोग किया जाता है।

(ग) द्विघात-माध्य अभिसरण

$$\text{यदि } \lim_{n \rightarrow \infty} P[(X_n - C)^2] = 0 \quad (8.5)$$

हो तो हम कहते हैं कि अनुक्रम $\{X_n\}$ द्विघात माध्य में स्थिरांक C की ओर अभिसृत होता है। इसके लिए प्रतीक $X_n \xrightarrow{q.m.} C$ का प्रयोग किया जाता है।

यहाँ अनुक्रम के अभिसरण के विषय में सामान्य रूप से ही बयान किया गया है। इसके पूर्ण विवरण या प्रमाण के लिए प्रायिकता सिद्धान्त पर लिखित पुस्तकों का अध्ययन कीजिये।

बृहत् संख्या का नियम

माना कि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक चर सर्वोत्तम बंटित है और उनका माध्य परिमित है।

$$Z_n = \left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)}{n} \right]$$

अभिसरण की भावना में शून्य की ओर प्रवृत्त होना है जब n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है।

यदि Z_n प्रायिकता में 0 की ओर अभिसृत होता है तो अनुक्रम $\{X_n\}$ दुर्बल बृहत् संख्या के नियम को पालन करता हुआ कहा जाता है।

यदि Z_n प्रायिकता 1 से 0 की ओर अभिसृत होता है तो अनुक्रम $\{X_n\}$ सबल बृहत् संख्या के नियम का पालन करता हुआ कहा जाता है। जिन परिस्थितियों में ये अभिसरण होते हैं उनका विवरण कुछ नियमों में दिया हुआ है जो बृहत् संख्या के नियम कहलाते हैं।

बृहत् संख्या का दुर्बल नियम

इस नियम के अन्तर्गत (6.3 के अनुसार) यह सिद्ध करना है कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right\} = 0 \quad (8.6)$$

$n \rightarrow \infty$

जब कि ϵ एक घनात्मक अत्यणु जात राशि है।

प्रमाण : यह ज्ञात है कि,

$$E \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \right) = E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$\text{और } V \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \right) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

चेबीचेफ प्रमेय के अनुसार,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \epsilon \right\} < \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \quad (8.7)$$

जब कि ϵ एक अत्यणु घनात्मक संख्या है।

$$\text{या } \lim_{n \rightarrow \infty} P (|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

(8.7.1)

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

यदि यह भी मानें कि प्रेक्षण स्वतन्त्र न होकर युग्मतः असहसंबन्धित (pairwise uncorrelated) हैं तो भी यह प्रमेय सत्य रहता है क्योंकि

$$V \left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

बृहत् संख्या का सबल नियम

इस नियम को कोलमोगोरव प्रमेय (Kolmogorov theorem) भी कहते हैं। यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमें प्रत्येक X_i स्वतन्त्र एवं सर्वसम बंटित है तो \bar{X} के μ की ओर लगभग निश्चित रूप से अभिभूत होने के लिए यह आवश्यक और पर्याप्त है कि $E(X_i)$ का अस्तित्व है और $E(X_i) = \mu$ है।

इस प्रमेय को यहाँ सिद्ध नहीं किया गया है क्योंकि इसके प्रमाण के लिए कुछ आवश्यक विषयों का वर्णन इस पुस्तक के क्षेत्र से बाहर रखा गया है।

खिचिन-प्रमेय

यह प्रमेय भी बृहत् संख्या के दुर्बल नियम में सम्बद्ध है। इसमें और चेबीचेफ प्रमेय में केवल इतनी भिन्नता है कि यदि हम यह न मानें कि यादृच्छिक चर X_i का प्रसरण परिमित है तो भी यह नियम सत्य रहता है। इस प्रमेय में केवल इतनी ही कल्पना की गयी है कि

प्रत्येक चर X_i का बंटन सर्वसम है जिसका माध्य μ परिमित है। खिचिन प्रमेय का प्रकल्पन हम प्रकार है —

माना कि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ स्वतन्त्र एव सर्वसम n यादृच्छिक चर हैं और इनमें से प्रत्येक चर का बंटन फलन $F(x)$ है तथा $F(x)$ का परिमित माध्य μ है तो चर

$$\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n \text{ प्रायिकता में माध्य } \mu \text{ की ओर अभिसृत होता है।}$$

केन्द्रीय सीमा प्रमेय

यदि n यादृच्छिक चरों का अनुक्रम $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है जिसमें प्रत्येक X_i स्वतन्त्र एव सर्वसम बंटित है और

$$E(X_i) = \mu$$

$$V(X_i) = \sigma^2$$

तो सबल या दुर्बल बृहत् सत्ता नियम के अनुसार हम जानते हैं कि जैसे $n \rightarrow \infty$ तो \bar{X}_n माध्य μ की ओर प्रवृत्त होता है किन्तु इससे \bar{X}_n के बंटन के विषय में कोई ज्ञान नहीं होता है।

केन्द्रीय सीमा प्रमेय के अनुसार किसी प्रतिदर्श के माध्य \bar{X}_n का बंटन ऐसे प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है जिसका माध्य μ और प्रसरण $\frac{\sigma^2}{n}$ है, यदि प्रतिदर्श परिमाण n बृहत् हो।

इस प्रमेय में यह बात ध्यान देने योग्य है कि यादृच्छिक चर X_i के बंटन के विषय में कुछ नहीं कहा गया है अर्थात् हम चर का बंटन कुछ भी हो सकता है। अतः यदि n बृहत् हो तो परिमित प्रसरण वाले किसी भी समूह से अवनष्ट प्रतिदर्शों का माध्य सन्निकट प्रसामान्यत बंटित होता है। इसी कारण बृहत् प्रतिदर्शों पर आधारित विभिन्न समूहों के न्यास प्रसामान्य बंटित मान लिए जाते हैं।

द-मॉयवर (De-Moivre) ने यह भी सिद्ध किया कि किसी चर X का बंटन कुछ भी हो, n चरों का योग लगभग प्रसामान्यत बंटित होता है, यदि n बृहत् हो।

लिडवर्ग और लेबी-प्रमेय

यदि n यादृच्छिक चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं जो कि स्वतन्त्र एव सर्वसम बंटित हैं और $E(X_i) = \mu$ व $V(X_i) = \sigma^2$ है। यह भी कल्पना की गयी है कि μ व σ^2 का अस्तित्व है तो Z_n का बंटन फलन $F(Z_n)$, प्रसामान्य बंटन फलन की ओर प्रवृत्त होता है जहाँ यादृच्छिक चर,

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \quad \dots(8 \text{ } \S)$$

माना कि $\phi(t)$, चर $(X_1 - \mu)$ का अभिलक्षणिक फलन है। चर $(X_1 - \mu)$ के पहले दो मापूण $0, \sigma^2$ हैं क्योंकि दो मापूणों का अस्तित्व है, तो

$$\phi(t) = 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + o(t^2) \quad \dots(8.9)$$

जब कि (8.9) में पद $o(t^2)$, t के वर्ग से उच्च क्रम के पदों को निरूपित करता है

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \text{ का अभिलक्षणिक फलन,}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \left\{ \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right\}^n \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 + o\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2 \right\}^n \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2n} t^2 + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \right\}^n \end{aligned}$$

$$\log \{\phi_n(t)\} = n \log \left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \right\}$$

$$\rightarrow -\frac{t^2}{2} \quad \text{जब } n \rightarrow \infty$$

$$\text{क्योंकि } o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{जब } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \phi_n(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \dots(8.10)$$

जब $n \rightarrow \infty$

हम जानते हैं $e^{-\frac{x^2}{2}}$ प्रसामान्य बंटन $N(0, 1)$ का अभिलक्षणिक फलन है। अतः (8.10) से यह निष्कर्ष निकलता है कि Z_n का बंटन फलन $F(Z_n)$, n बृहत् होने की स्थिति में प्रसामान्य बंटन $F(x)$ की ओर प्रवृत्त होता है, जबकि

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(Z_n) = F(x) \quad \dots(8.11)$$

(8.11) द्वारा स्पष्ट है कि \bar{X} का बंटन सन्निकट प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है जिसके प्राचल μ और $\frac{\sigma^2}{n}$ है जबकि n का मान बृहत् हो ।

लिन्हापुनोव-प्रमेय

यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, n यादृच्छिक चरों का एक अनुक्रम है जिसमें $E(X_i) = \mu_i$ और $E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 < \infty$ माना कि माध्य के परितः तीसरा निरपेक्ष अपूर्ण ρ_i^3, n के प्रत्येक मान के लिए परिमित है और इसका प्रतिरत्व है जहाँ,

$$\rho_i^3 = E(|X_i - \mu_i|)^3$$

यदि सम्बन्ध $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\sigma} = 0$ सत्य है जबकि

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots + \rho_n^2,$$

तो योग $\sum X_i$ अनन्तस्पर्शतः प्रसामान्य होता है जिसका

$$\text{माध्य } \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

$$\text{और प्रसरण } \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \text{ है ।}$$

प्रमेय 8.1 यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ एक द्विपद बंटित चरों का अनुक्रम है जिनके माध्य व प्रसरण क्रमशः np व npq हैं तो सिद्ध करना है कि चर X , सफलताओं की संख्या, का बंटन प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है जैसे-जैसे n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है ।

प्रमाण क्योंकि सभी चर स्वतन्त्र और सर्वसम बंटित हैं और उनके माध्य एवं प्रसरण परिमित हैं, इस लिए यह लिटबर्ग-लेवी प्रमेय का ही एक अनुप्रयोग है । इसी प्रमेय के प्रयोग को यहाँ प्रदर्शित किया गया है ।

अध्याय 6 में दिया गया है कि n परीक्षणों में X सफलताएँ होने की स्थिति में प्रायिकता फलन $\binom{n}{X} p^X q^{n-X}$ है । इस बंटन का अभिलक्षणिक फलन

$$\phi(t) = (q + pe^{it})^n \text{ है ।}$$

माना कि

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

यदि यह सिद्ध कर दें कि Z का अभिलक्षणिक फलन

$$\phi_Z(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

जब $n \rightarrow \infty$

है, तो प्रमेय सिद्ध हो जायेगा ।

हम जानते हैं कि $E(Z) = 0$ और $V(Z) = 1$ है।
यहाँ

$$\phi_Z(t) = E\left(e^{itZ} \right)$$

$$\text{या } \phi_Z(t) = \sum_{X=0}^n e^{it(X-np)} \binom{n}{X} p^X q^{n-X} \quad \dots (8.12)$$

$$= e^{-i\sqrt{\frac{npq}{q}} t} \left[q + pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}}} \right]^n$$

$$= \left[q e^{-i\sqrt{\frac{p}{nq}} t} + pe^{\frac{it}{\sqrt{npq}} - i\sqrt{\frac{p}{nq}} t} \right]^n$$

$$= \left[p e^{it\sqrt{\frac{q}{np}}} + q e^{-it\sqrt{\frac{p}{nq}}} \right]^n$$

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \left[p \left\{ 1 + it\sqrt{\frac{q}{np}} + \frac{1}{2!} \left(it\sqrt{\frac{q}{np}} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(it\sqrt{\frac{q}{np}} \right)^3 + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + q \left\{ 1 - \left(it\sqrt{\frac{p}{nq}} \right) + \frac{1}{2!} \left(it\sqrt{\frac{p}{nq}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(it\sqrt{\frac{p}{nq}} \right)^3 + \dots \right\} \right]^n \\ &= \left[p \left\{ 1 + it\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2!} t^2 \frac{q}{np} - \frac{it^3}{3!} \frac{q}{n^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + q \left\{ 1 - it\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2!} t^2 \frac{p}{nq} + \frac{1}{3!} it^3 \left(\frac{p}{nq} \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right\} \right]^n \\ &= \left[(p+q) - \frac{1}{2n} t^2 + \text{पद जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात है} \right]^n \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t^2 + \text{पद जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात है}$$

$$\phi_Z(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{जब } n \rightarrow \infty$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

प्रमेय 2 . यदि X एक गार्हच्छिक चर है जिसका बंटन 1 स्वतन्त्रता-कोटि के साथ χ^2 है और अभिलक्षणिक फलन $\phi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{1}{2}}$ है तो

$$E_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

का χ_n^2 बंटन, जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि n है, प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है जब n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता है ।

प्रमाण उपर्युक्त प्रमेय लिडबर्ग लेवी प्रमेय का अनुप्रयोग है । इसी की सहायता से यहाँ प्रमेय को सिद्ध किया गया है ।

मध्याय 7 में दिया जा चुका है कि χ_n^2 का अभिलक्षण फलन

$$\phi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

और $E(E_n) = n$ व $V(E_n) = 2n$

$$\therefore \text{मानक चर } E = \frac{E_n - n}{\sqrt{2n}}$$

E का अभिलक्षण फलन

$$\begin{aligned} \psi(t) &= E \left(e^{itE} \right) \\ &= E \left\{ e^{\frac{it(E_n - n)}{\sqrt{2n}}} \right\} \\ &= e^{it\sqrt{\frac{n}{2}}} E \left(e^{\frac{itE_n}{\sqrt{2n}}} \right) \\ &= e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1 - \frac{2it}{\sqrt{2n}} \right)^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \log \psi_n(t) = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \log \left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}} \right)$$

$$\log \psi_n(t) = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \left(-it\sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2}{n} + \text{पर जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं।} \right)$$

$$= -it\sqrt{\frac{n}{2}} + it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{t^2}{2} + \text{पर जिनके हर में } n^{\frac{3}{2}} \text{ या उच्चतर घात हैं}$$

$$= -\frac{1}{2} t^2 + o\left(\frac{-\frac{1}{2} t^2}{n}\right)$$

$$\log \psi_n(t) = -\frac{t^2}{2} \quad \text{जब } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \psi_n(t) = e^{-\frac{1}{2} t^2}$$

$e^{-\frac{1}{2} t^2}$, प्रसामान्य बंटन का अभिलक्षणिक फलन है अतः X^2 बंटन भी प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है जबकि प्रेक्षणों की संख्या n बृहत् हो।

प्रश्नावली

1. केन्द्रीय सीमा प्रमेय को समझाकर लिखिए और बताइये कि इसे प्रत्यक्ष महत्वपूर्ण प्रमेय क्यों समझा जाता है ?
2. सीमा प्रमेयों का क्या महत्त्व है और इनका सांख्यिकी में किस प्रकार प्रयोग होता है ?
3. यदि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ प्वासो बंटित स्वतन्त्र चरों का अनुक्रम है और इनके प्राचल α हैं तो सिद्ध कीजिये कि जब n का मान अनन्त की ओर प्रवृत्त

होता है तो $\sum_{i=1}^n X_i$ का बंटन प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्त होता है।

□ □ □

किसी प्रतिदर्श का अध्ययन समय के प्रति जानकारी के हेतु किया जाता है, न कि स्वयं प्रतिदर्श की जानकारी के उद्देश्य से। इस अध्ययन में एक तो किसी परिवर्तन की परीक्षा की जाती है और दूसरे किन्हीं प्राचल का परिवर्तन करना होता है। इस अध्ययन में परिकल्पना—परीक्षा के विषय में जानकारी दी गयी है। विभिन्न परीक्षाओं को जानने से पूर्व विभिन्न परिभाषाओं तथा मूल सिद्धान्तों को जानना आवश्यक है। अतः पाठकों को निम्न विवरण भली भाँति समझना चाहिये।

सांख्यिकीय परिकल्पना

साधारणतया हमको किसी भी बटन के प्राचल ज्ञात नहीं होते हैं अर्थात् समय के विषय में पूर्ण ज्ञान नहीं होता है। किन्तु किसी सिद्धान्त, अनुभव या ध्वन्य परीक्षाओं के आधार पर यह अनुमान लगाया जाता है कि किसी प्राचल का इतना मान होना चाहिये या किन्हीं एक से अधिक समूहों के प्राचल में कोई विशेष सम्बन्ध होना चाहिये। अतः अपने इस ज्ञान को एक परिवर्तन के रूप में स्थापित करते हैं और फिर किसी भी उचित सांख्यिकीय परीक्षा का प्रयोग करके यह निश्चय करना होता है कि निराकरण योग्य परिवर्तन स्वीकृत करने योग्य है या नहीं। कोश में परिवर्तन शब्द का अर्थ है कि कोई सिद्धान्त, अनुभव या अनुमान जिसको कि किसी ध्वन्य ध्वनेषण के हेतु मान लिया जाता है किन्तु सांख्यिकीय परिवर्तन से अभिप्राय किसी समय के विषय में या मुख्यतया समय के एक या एक से अधिक प्राचलों के विषय में किसी कथन से है जैसे, एक सिक्के को उछालें तो इसके शीर्ष की ओर से गिरने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। इसी प्रकार एक पाशक को फेंके तो ऊपर फलक पर किसी बिन्दु के घाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

परिकल्पना को H द्वारा निरूपित करते हैं। माध्य एवं प्रसरण के लिए कुछ परिवर्तनानुसंगों को सामान्य रूप में इस प्रकार दिया जा सकता है।—

H: $\mu = \mu_0$ (जबकि μ समय माध्य है और μ_0 एक स्थिरांक है जिसका कोई भी मान हो सकता है।)

H: $\mu < \mu_0$ या $\mu > \mu_0$

H: $\mu_1 > \mu_2$ या $\mu_1 < \mu_2$ (जबकि μ_1 और μ_2 दो भिन्न समूहों के माध्य हैं।)

या H: $\mu_1 = \mu_2$

H: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (जबकि σ^2 एक समय का प्रसरण है और σ_0^2 एक घटक मान है।)

H: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ या $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (जबकि σ_1^2 व σ_2^2 दो भिन्न समूहों के प्रसरण हैं।)

निराकरणाय परिकल्पना

किसी अनुसंधानकर्ता के लक्ष्य को प्रायः परिकल्पना के रूप में दिया जाता है और इस परिकल्पना के विषय में यह निश्चित करना होता है कि इसे स्वीकार किया जाय या नहीं किया जाय। ऐसी परिकल्पना को निराकरणाय परिकल्पना कहते हैं और इसे H_0 द्वारा निरूपित करते हैं। निराकरणाय परिकल्पना को दो प्रकार से विभाजित किया गया है—

(क) सरल परिकल्पना — एक परिकल्पना जो कि सम्बन्धित चर के बटन फलन का पूर्णतया उल्लेख करती है सरल परिकल्पना कहलाती है। जैसे परिकल्पना H_0 कि एक सिक्का अनभिन्न है अर्थात् हेड या टेल आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

(ख) संयुक्त परिकल्पना — प्रायः वह निराकरणाय परिकल्पना ' H_0 ' जो सरल नहीं है संयुक्त परिकल्पना कहलाती है। इसको निम्नांकित उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है—

H_0 : चर X का बटन प्रसामान्य है।

इस परिकल्पना में बटन के प्राचलो (माध्य एवं प्रसरण) का कोई उल्लेख नहीं है इस कारण बटन फलन का उल्लेख पूर्ण नहीं है केवल बटनों के एक समूह का उल्लेख है जिनमें से कोई भी एक प्रेषित चर का बटन हो सकता है।

वैकल्पिक परिकल्पना

निराकरणाय परिकल्पना के विपरीत परिकल्पना को वैकल्पिक परिकल्पना कहते हैं और इसे प्रायः H_1 या H_A द्वारा निरूपित किया जाता है। व्यवहार में सदैव निराकरणाय परिकल्पना H_0 की ही परीक्षा की जाती है। वैकल्पिक परिकल्पना किसी प्रयोगकर्ता की अनुसंधान परिकल्पना का सक्रियात्मक बयान (Operational statement) है। अतः H_1 उस दृढबयान का गठन करता है जिसको कि H_0 के अस्वीकार किये जाने पर, स्वीकार कर लिया जाता है। इसके विपरीत, यदि H_0 को स्वीकार किया जाता है तो H_1 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

निराकरणाय व वैकल्पिक परिकल्पना के कुछ उदाहरण निम्न हैं। यहाँ सभी संकेत वही हैं जो परिकल्पना के साथ दिये गये हैं।

निराकरणाय परिकल्पना	वैकल्पिक परिकल्पना
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
$H_0 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
$H_0 : \sigma^2 > 0$	$H_1 : \sigma^2 > 0$
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
आदि।	

परिकल्पना परीक्षा में त्रुटियाँ

निराकरणीय परिवर्तन H_0 को स्वीकार करना है या नहीं इस बात का निर्णय, प्रतिद्वंद्व प्रश्नों के आधार पर किसी भी उपयुक्त सांख्यिकीय परीक्षा का प्रयोग करके, करना होता है। परीक्षा कोई भी हो इस निर्णय में दो प्रकार की त्रुटि होने की संभावना सदैव रहती है। इन्हीं दो प्रकार की त्रुटियों का वर्णन निम्न प्रकार है —

प्रथम प्रकार की त्रुटि यदि H_0 को अस्वीकार कर दें जब कि H_0 वास्तव में सत्य है। प्रथम प्रकार की त्रुटि होने की प्रायिकता को α द्वारा निरूपित करते हैं।

द्वितीय प्रकार की त्रुटि यदि H_0 को स्वीकार कर लिया जाये जब कि H_0 असत्य या मिथ्या है तो इसे द्वितीय प्रकार की त्रुटि कहते हैं। द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता को β द्वारा निरूपित करते हैं।

इन दोनों प्रकार की त्रुटियों को इस प्रकार समझ सकते हैं —

माना कि एक व्यक्ति ने कुछ अपराध किया है पर न्यायाधीश द्वारा वह व्यक्ति छोड़ दिया जाता है। यह प्रथम प्रकार की त्रुटि है।

एक व्यक्ति ने अपराध नहीं किया है किन्तु उसे दोषी मान लिया जाता है और दण्ड दे दिया जाता है। यह द्वितीय प्रकार की त्रुटि है।

इस उदाहरण से स्पष्ट है कि इन दोनों प्रकार की त्रुटियों में द्वितीय प्रकार की त्रुटि अधिक हानिकारक है। धन कोई भी निर्णय करते समय यह ध्यान रिया जाता है कि किसी भी प्रकार की त्रुटि न हो जोकि पूर्णतया संभव नहीं है। अतः मुख्यतया यह ध्यान रहता है कि प्रथम प्रकार की कोई त्रुटि चाहे हो जाय, पर द्वितीय प्रकार की त्रुटि कम से कम होनी चाहिये।

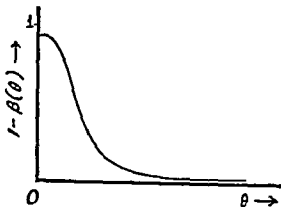
सापेक्षता-स्तर

प्रथम प्रकार की त्रुटि होने की प्रायिकता को सापेक्षता स्तर कहते हैं। व्यावहारिक दृष्टि में यह प्रथम प्रकार की त्रुटि की मात्रा है जिसकी कि कोई निर्णय लेते समय जीवन (risk) ली जाती है। यदि यह प्रायिकता α है तो सापेक्षता स्तर को प्रायः 100α प्रतिशत घण्टे के रूप में दिया जाता है। जैसे माना $\alpha = 0.05$ है तो सापेक्षता स्तर 5 प्रतिशत कहलाता है। इसी प्रकार $\alpha = 0.01$ होने की स्थिति में सापेक्षता स्तर 1 प्रतिशत कहलाता है। किसी परिवर्तन की परीक्षा में सापेक्षता स्तर कितना रचना है इसका निश्चय प्रयोग करने से पूर्व कर लेना आवश्यक है अन्यथा निर्णय करने समय व्यक्तिगत अभिनिष्ठता आ सकती है। अधिकतर परिवर्तन परीक्षाएँ 5 या 1 प्रतिशत सापेक्षता स्तर पर ही की जाती हैं। यह एक व्यावहारिक नियम है।

परीक्षा की सामर्थ्य

किसी परीक्षा द्वारा मिथ्या परिवर्तन के अस्वीकार किये जाने की प्रायिकता को उस परीक्षा की सामर्थ्य कहते हैं। यह प्रायिकता संकल्पित परिवर्तन के अनन्त वास्तविक प्रापस मान θ पर आधारित होती है और उसे $(1 - \beta)$ द्वारा सूचित रिया जाता है जहाँ β द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता है। अतः $(1 - \beta)$ का मान अधिक होगा

है उतनी परीक्षा अच्छी समझी जाती है। यदि दो परीक्षाएँ समान प्रतिदर्श परिमाण व समान सार्यकता स्तर पर आधारित हैं तो एक परीक्षा दूसरे से अधिक शक्तिशाली कहलाती है जब पहली परीक्षा में द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता दूसरी परीक्षा की अपेक्षा कम हो। प्राचल θ व परीक्षा की सामर्थ्य $\{1 - \beta\}$ के मानों का लेकर आलेखित बिन्दुओं द्वारा प्राप्त वक्र को सामर्थ्य वक्र कहते हैं और इसका रूप प्रायः चित्र (9-1) जैसा होता है।



चित्र 9-1 सामर्थ्य वक्र का एक रूप।

स्वतंत्रता-कोटि

जिन्ही प्रेक्षणों के समुच्चय में स्वतंत्र प्रेक्षणों की संख्या को स्वतंत्रता-कोटि कहते हैं। इस परिभाषा को इस प्रकार भी समझ सकते हैं — किसी समुच्चय के प्रेक्षणों की संख्या में से इस समुच्चय सम्बन्धी ज्ञात प्रतिबन्धों की संख्या घटा दें तो स्वतंत्रता-कोटि ज्ञात हो जाती है। जैसे, माना कि एक प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं। यह ज्ञात है कि इन प्रेक्षणों के योग का सदैव एक नियत मान होता है। अतः इनमें से $(n - 1)$ प्रेक्षणों के मान ज्ञात हो तो शेष एक प्रेक्षण का मान सदैव ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार केवल $(n - 1)$ स्वतंत्र प्रेक्षण हैं। अतः इस प्रतिदर्श के लिए स्वतंत्रता-कोटि $(n - 1)$ है। यदि कोई एक अन्य प्रतिबन्ध अर्थात् प्रेक्षणों में सम्बन्ध ज्ञात हो तो इस प्रतिदर्श के लिए स्वतंत्रता-कोटि $(n - 2)$ होगी। यह ध्यान रहे कि निम्न-भिन्न प्रतिदर्शों के लिए स्वतंत्रता-कोटि भी भिन्न भिन्न हो सकती है।

निराकरण-क्षेत्र

एक परीक्षा के लिए निराकरण क्षेत्र R , किसी परीक्षा प्रतिदर्शज के वास्तविक मानों का वह उपसमुच्चय है जिसमें परिकल्पना को परीक्षा के अन्तर्गत अस्वीकार कर दिया जाता है। किसी परीक्षा में क्षेत्र R की सीमाओं (bounds) को त्रातिक मान (critical values) कहते हैं। उदाहरणार्थ यदि किसी t -परीक्षा में H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जब $t \geq t_\alpha$ हो तो t_α त्रातिक मान है।

एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा

यदि निराकरण क्षेत्र निम्नांकित में से किसी प्रकार का हो,

$$t < x_1$$

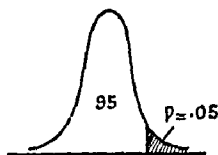
अथवा $t > x_2$

तो इन दोनों ही अवस्थाओं में परीक्षा को एक पुच्छ परीक्षा कहते हैं, जबकि t परीक्षा-प्रतिदर्शज है।

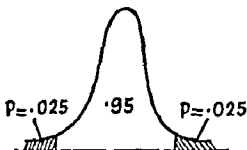
यदि निराकरण-क्षेत्र निम्न प्रकार का हो,

$$x_1 < t < x_2$$

तो परीक्षा को दो पुच्छ परीक्षा कहते हैं। इनके नामों की साधकता प्रतिदर्शज के बारम्बारता वक्र के एक सिरे पर है या दोनों सिरो पर। यदि यह क्षेत्र एक सिरे पर हो तो इसे एक पुच्छ परीक्षा और दोनों सिरो पर हो तो इसे दो पुच्छ परीक्षा कहते हैं। इस क्षेत्र का क्षेत्रफल साधकता स्तर α के समान होता है। $\alpha = 0.5$ अर्थात् 5 प्रतिशत साधकता-स्तर के लिए एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में निराकरण क्षेत्र क्रमशः चित्र (9-2) व (9-3) में दिखाया गया है।



चित्र 9-2 एक पुच्छ परीक्षा में $\alpha = 0.5$ के लिए देखाच्छादित क्षेत्र, क्रान्तिक क्षेत्र है।



चित्र 9-3 दो पुच्छ परीक्षा में $\alpha = 0.5$ के लिए देखाच्छादित क्षेत्र क्रान्तिक क्षेत्रों को अवगत करते हैं।

स्टुडेन्ट t-परीक्षा

यदि इस परिकल्पना की परीक्षा करना है कि समग्र माध्य का मान μ_0 है तो t-परीक्षा का उपयोग होता है जिसको नीचे समझाया गया है। यह परीक्षा एक प्रतिदर्श के मान पर आधारित होती है जिसका बटन t-बटन के समान होता है। परीक्षा के नाम का यही कारण है। स्टुडेन्ट t-परीक्षा का प्रयोग केवल एक समग्र माध्य या दो समग्र माध्यों के प्रति परिकल्पना की परीक्षा के लिए ही किया जाता है जिनका वर्णन इस अध्याय में दिया गया है। इस परीक्षा का प्रयोग एक या दो सहसम्बन्ध गुणाको या समाश्रमण गुणाको से सम्बन्धित परिकल्पनाओं की परीक्षा के लिए भी किया जाता है जिनका वर्णन आगामी अध्यायों में दिया गया है।

मान लीजिये कि समग्र मे से n परिमाण का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श चुना गया जिसमें प्रेक्षण-मान $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं। यदि इन मानों का माध्य \bar{X} और मानक विचलन s से सूचित किया जाय तो प्रतिदर्श के,

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad \dots (9.1)$$

का बटन (n - 1) स्वतंत्रता कोटि के t-बटन के समान होता है।

t-परीक्षा के प्रति अभिधारणाएँ

यदि प्रयोग में निम्नांकित कल्पनाएँ सत्य प्रतीत होती हैं तो t-परीक्षा द्वारा प्राप्त परिणाम शुद्ध होते हैं।

- (क) यादृच्छिक चर X का बटन प्रसामान्य है।
- (ख) प्रतिदर्श प्रेक्षण परस्पर स्वतंत्र हैं।
- (ग) प्रेक्षणों के अभिलेखन में कोई त्रुटि नहीं हुई है।
- (घ) प्रतिदर्श परिमाण बृहत् नहीं है। इसके लिए कोई विरोध सख्या बताना तो सम्भव नहीं है फिर भी यह माना जाता है कि प्रतिदर्श का परिमाण 50 से अधिक नहीं होना चाहिये। यदि प्रतिदर्श बृहत् हो तो t-बटन प्रसामान्य बटन के तुल्य हो जाता है।

परीक्षा निकष

यदि X एक t_{n-1} चर है तो इस बटन की भुजाक्ष t_α वह मान है जिसके लिए

$P(x > t_\alpha) = \alpha/2$ यहाँ α पूर्व-निर्धारित सायंकता स्तर होता है।

$H_0 : \mu = \mu_0$ की $H_1 : \mu \neq \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु,

यदि $|t| > t_\alpha$ हो तो H_0 अस्वीकृत है

और यदि $|t| < t_\alpha$ हो तो H_0 स्वीकृत है

$H_0 : \mu = \mu_0$ की $H_1 : \mu > \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु एक पुच्छ परीक्षा का उपयोग होता है।

यहाँ यदि परिकल्पित t का मान ऋणात्मक हो तो परीक्षा निकप का बिना प्रयोग किये ही H_0 को स्वीकार किया जा सकता है।

यदि परिकल्पित t का मान धनात्मक है तो t_{α} वह मान है जिसके लिए $P(x > t_{\alpha}) = \alpha$ है।

इस स्थिति में परीक्षा निकप इस प्रकार है —

यदि $t > t_{\alpha}$ हो तो H_0 अस्वीकृत है अर्थात् H_1 स्वीकृत है

और यदि $t < t_{\alpha}$ हो तो H_0 की H_1 $\mu < \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा हेतु

भी एक पुच्छ का उपयोग होता है।

इस स्थिति में परिकल्पित t का मान यदि धनात्मक हो तो H_0 को बिना परीक्षा निकप का प्रयोग किये ही अस्वीकार किया जा सकता है।

यदि t का परिकल्पित मान ऋणात्मक हो तो परीक्षा निकप निम्नांकित है —

यदि $-t < -t_{\alpha}$ हो तो H_0 अस्वीकृत है अर्थात् H_1 स्वीकृत है

और यदि $-t > -t_{\alpha}$ हो तो H_0 स्वीकृत है अर्थात् H_1 अस्वीकृत है।

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि यदि उपर्युक्त अक्षमिका को -1 से गुणा कर दें अर्थात् t के चिह्नो को नहीं लिया जाये तो परीक्षा निकप, H_0 $\mu > \mu_0$ के लिए निकप के तुल्य हो जाता है।

यदि कभी ऐसी स्थिति आ जाए कि परिकल्पित t का मान सारणीबद्ध t के मान के समान हो तो किसी अन्य परीक्षा का प्रयोग करना चाहिये यदि ऐसा करना उचित हो, या एक नया प्रतिदर्श लेकर फिर से t -परीक्षा करनी चाहिये। इसके अतिरिक्त एक उपाय यह भी है कि इस परीक्षा द्वारा H_0 के स्वीकार होने की प्रायिकता ज्ञान करली जाय और समस्या के महत्व के अनुसार निर्णय कर लिया जाय।

टिप्पणी यदि t बटन के लिए सारणी दोनो पुच्छों पर निराकरण क्षेत्र में लिए उप-समूह हो, तो एक पुच्छ परीक्षा में t_{α} का मान देखते समय α सरपंक्ता स्तर में लिए, 2α प्रायिकता पर सारणी का मान देखना होता है क्योंकि निराकरण क्षेत्र का क्षेत्रफल इस स्थिति में एक पुच्छ पर α ही होगा।

उदाहरण 9 I. पहले किये गये प्रयोगों के आधार पर ऐसा समझा जाता है कि बधिया पशुओं (steers) की प्रति दिन औसत ग्रहण शक्ति 7.5 किलोग्राम है। एक नये प्रयोग में प्रति दिन ग्रहण शक्ति सम्बन्धी निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए।

प्रति दिन औसत

ग्रहण शक्ति (कि० ग्राम) 7.53, 5.84, 6.72, 6.78, 7.72, 7.54, 5.71,

तो परीक्षा करनी है कि यह प्रेक्षण पहले दो गयी 7.5 कि० ग्राम प्रति दिन ग्रहण शक्ति का समर्थन करते हैं।

इस प्रयोग में परिवर्तना

$$H_0 \quad \mu = 7.5 \text{ किलोग्राम की } H_1 \quad \mu \neq 7.5$$

के विरुद्ध परीक्षा करनी है। अतः t -परीक्षा का प्रयोग किया गया है। इस परीक्षा के लिए,

$$\Sigma X = 53.91,$$

$$\Sigma X^2 = 368.144$$

$$\bar{X} = 6.7438,$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} \right\}$$

$$= \frac{1}{7} (368.144 - 363.286)$$

$$= \frac{1}{7} \times 4.858$$

$$= 0.6940$$

$$\therefore s = 0.83$$

$$t = \frac{6.738 - 7.5}{83/\sqrt{8}}$$

$$= \frac{-76}{293}$$

$$= -2.60$$

सारणी परि० 1 घ-3) द्वारा $\alpha = 0.5$ और स्व को² 7 के लिए $t(0.5) = 2.365$ सारणीबद्ध t का मान परिकल्पित t के मान से कम है अतः $\alpha = 0.5$ के लिए H_0 को अस्वीकार कर दिया। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि नये प्रयोग के आधार पर 7.5 कि० ग्राम ग्रहण शक्ति से सहमति नहीं है।

यदि यहाँ $H_0 \quad \mu = 7.5$ की $H_1 \quad \mu < 7.5$ के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुच्छ परीक्षा करनी होगी। इस स्थिति में $t(0.5, 7) = 1.895$ है। t का परिकल्पित मान सारणीबद्ध t के मान से अधिक है। अतः H_0 अस्वीकृत है या H_1 स्वीकृत है।

दो समग्र माध्यों के प्रति परिकल्पनाओं की परीक्षा

माना कि दो प्रसामान्य समग्र हैं जिनके प्राचल प्रमथ

$$(\mu_1, \sigma_1^2) \text{ और } (\mu_2, \sigma_2^2) \text{ हैं। परिवर्तना}$$

1. परि०—परिदिष्ट

2. स्व० को०—स्वतंत्रता कोटि

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ की } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

के विरुद्ध परीक्षा करनी है

माना कि इन समग्रों में से क्रमशः n_1 और n_2 परिमाण के यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन किया गया है।

इन प्रतिदर्शों में प्रेक्षण इस प्रकार हैं।

$$\text{प्रतिदर्श 1 } \cdot X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1n_1}$$

$$\text{प्रतिदर्श 2 } X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2n_2}$$

H_0 की परीक्षा दो स्थितियों में की जा सकती है —

(क) जब $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और अज्ञात है (ख) जब $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और ये प्रसरण अज्ञात हैं।

स्थिति (क) $\cdot H_0 : \mu_1 = \mu_2$ जब $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और अज्ञात है।

परिकल्पना H_0 की परीक्षा के लिए निम्न प्रतिदर्शज t का प्रयोग करना होता है

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \dots (9.2)$$

जब कि व्यञ्जक (9.2) में \bar{X}_1 व \bar{X}_2 क्रमशः प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के माध्य हैं। s_p एकत्रित मानक विचलन है। इनका परिष्कृत निम्नांकित सूत्रों द्वारा करते हैं —

$$\bar{X}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}/n_1, \bar{X}_2 = \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}/n_2$$

$$\text{और } s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (X_{2j} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \quad \dots (9.3)$$

$$s_p^2 = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 - \frac{(\sum X_{1i})^2}{n_1} \right\} + \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}^2 - \frac{(\sum X_{2j})^2}{n_2} \right\}}{(n_1 + n_2 - 2)} \quad \dots (9.3.1)$$

$$= \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \quad \dots (9.3.2)$$

जब कि s_1^2 व s_2^2 क्रमशः प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के प्रसरण हैं।

t के परिवर्तित मान की, $t_{n_1+n_2-2}$ के α बिन्दु t_{α} से तुलना करके पिछले खण्ड में दिये गये नियमानुसार H_0 की स्वीकृति या अस्वीकृति के विषय में निर्णय लिया जाता है।

उदाहरण 9.2 : एक डेरी फार्म पर दोरों की गर्भावधि पाडा (male) या पडिया (Female) जन्मने के अनुसार निम्नांकित सारणी में दी गयी है —

गर्भावधि पाडे के लिए, X_1 (दिन)	गर्भावधि पडिया के लिए X_2 (दिन)
288 60	287 95
289 44	286 47
291 24	285 20
290 61	287 95
291 04	287 17
288 50	287 63
289 29	286 49
289 86	287 87
289 87	287 95
288 75	287 59
289 45	286 72
291 43	

परीक्षा करनी है कि पाडे के जन्मने में माध्य गर्भावधि μ_1 और पडिया के जन्मने में गर्भावधि μ_2 समान हैं अर्थात् $H_0: \mu_1 = \mu_2$ की $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि पाडा व पडिया के जन्मने की गर्भावधि का प्रसरण समान है अर्थात् $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. यहाँ,

$$\bar{X}_1 = 289.84,$$

$$\bar{X}_2 = 287.18$$

$$(n_1 - 1) s_1^2 = 116582$$

$$(n_2 - 1) s_2^2 = 76991$$

$$s_p^2 = 0.9218$$

$$s_p = 0.96$$

$$\begin{aligned} \text{घोर } t &= \frac{28984 - 28718}{96 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{11}}} \\ &= 6.645 \end{aligned}$$

$\alpha = 0.5$ और स्क्व को $= 21$ के लिए सारणी (परि प-3) द्वारा t का मान $t_{0.5} = 2.080$ है जो कि परिवर्तित t के मान से अधिक है। अतः H_0 अस्वीकृत है अर्थात् पादा व पक्षिया के लिए गर्भावधि समान नहीं है।

स्थिति ख परिवर्तन

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ की $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ के विरुद्ध परीक्षा करने है, जब कि $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और वे अज्ञात हैं।

स्थिति 'क' की भाँति यहाँ भी सब उन्हीं सन्तानों का प्रयोग किया गया है। परिवर्तन की यह परीक्षा फिशर बरहेन (Fisher and Berhen) ने दी थी। $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ की स्थिति में अज्ञात प्राप्ति के लिए पूर्ण व पर्याप्त प्रतिदर्श का अस्तित्व है किन्तु 'ख' में पूर्ण व पर्याप्त प्रतिदर्श का अस्तित्व है या नहीं, यह जानना असम्भव है। अतः (9.2) द्वारा इस परिवर्तन की परीक्षा नहीं की जा सकती। इस स्थिति में निम्नान्वित प्रतिदर्श का प्रयोग करना होता है —

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (9.4)$$

इस सूत्र में s_1^2 और s_2^2 प्रथम व द्वितीय प्रतिदर्शों के क्रमशः प्रसरण हैं।

इस सूत्र द्वारा परिवर्तित t के मान की सारणी (परि प-3) से प्राप्त α के मान से तुलना नहीं कर सकना क्योंकि यहाँ t की स्क्व को $(n_1 - 1, n_2 - 2)$ नहीं है।

तुलना के लिए शुद्ध स्क्व का निम्नान्वित सूत्र द्वारा ज्ञान करने, सारणीबद्ध t का मान ज्ञात कर लिया जाता है और दूसरी परिचित t से तुलना करते H_0 का विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

$$\text{शुद्ध स्क्व को} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}} \quad 2 \quad (9.5)$$

पूर्वनिर्धारित सापेक्षता स्तर α ही रहता है।

उपर्युक्त सूत्र (9.5) याद रखने की दृष्टि से कुछ कठिन प्रतीत होता है इस कारण (9.4) द्वारा परिवर्तित t की एक अन्य मान t' से भी तुलना की जाती है। जब $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ हो तो,

$$t' = \frac{\frac{s_1^2}{n_1} \times t_1 + \frac{s_2^2}{n_2} \times t_2}{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \quad (96)$$

(96) में t_1 और t_2 क्रमशः (n_1-1) व (n_2-1) स्व को और α सा स्त पर सारणीबद्ध मान है व t_1 और t_2 के क्रमशः भार s_1^2/n_1 और s_2^2/n_2 हैं। अतः t' एक भारित मान है। इस स्थिति में भी पहले की भांति निर्णय लेना होता है अर्थात् यदि $t > t'$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और यदि $t < t'$, तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि $n_1 = n_2 = n$ हो तो t' का मान, स्व को $(n-1)$ व α सा स्त पर सारणीबद्ध t मान के समान हो जाता है।

टिप्पणी — यदि दो प्रसरण σ_1^2 व σ_2^2 समान नहीं हों, तो t -परीक्षा बंध नहीं रहती है। अतः प्रतिदर्श t को दो विभिन्न रूपों में एक तो फिशर व बरहेन द्वारा और अन्य वेल्ड व एसपिन (Welch and Aspin) द्वारा दिया गया है। किन्तु स्थिति 'ब' व 'ख' में कोकरन (Cochran) द्वारा दिया गया मत्रिकट मान परीक्षा के हेतु पर्याप्त परिशुद्ध हैं और विशेषता यह है कि इनके लिए साधारण t सारणी का प्रयोग करना होता है। यही कारण है कि (92) व (94) का ही अधिकांश प्रयोग होता है।

उदाहरण 9.3 यदि उदाहरण (9.2) में यह माने कि पाठा या पढिया की गर्भाबंध का प्रसरण समान नहीं है अर्थात् $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और अज्ञात होने की स्थिति में, $H_0: \mu_1 = \mu_2$ की $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —
परिक्लन करने पर,

$$\bar{X}_1 = 289.84, \bar{X}_2 = 287.18$$

$$s_1^2 = \frac{116582}{11} = 106$$

$$s_2^2 = \frac{76991}{10} = 0.77$$

सूत्र (9.4) द्वारा,

$$\begin{aligned} t &= \frac{289.84 - 287.18}{\sqrt{\frac{106}{12} + \frac{0.77}{11}}} \\ &= \frac{2.66}{\sqrt{0.883 + 0.0700}} \\ &= \frac{2.66}{.398} = 6.68 \end{aligned}$$

सूत्र (95) द्वारा,

$$\begin{aligned} \text{शुद्ध स्व को} &= \frac{(1583)^2}{\left(\frac{0883}{13}\right)^2 + \left(\frac{07}{12}\right)^2} - 2 \\ &= 2290 \end{aligned}$$

स्वतन्त्रता कोटि एक पूर्णांक है अतः 229 का समायोजन करने 23 लिया जा सकता है।

$\alpha = 0.5$ व 23 स्व को के लिए सारणी (परि प-3) द्वारा $t_{(05)} = 2069$ है जो कि परिवर्तित t के मान 668 से कम है अतः H_0 अस्वीकृत है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि पाडा व पडिया के हेतु गर्भावधि बाल समान नहीं समझे जा सकते।

यदि चाहे तो शुद्ध स्व को ज्ञात न करने t के आधार पर निम्न निम्न प्रकार से ले सकते हैं —

सूत्र (96) द्वारा,

$$t' = \frac{0.0883 \times 2201 + 0.07 \times 2228}{0.0883 + 0.0700}$$

जहाँ सारणी (परि प-3) द्वारा,

$$t_{(05, 11)} = 2201 \text{ और } t_{(05, 10)} = 2228$$

परिकलन करने पर, $t' = 2213$

परिवर्तित t का मान t' से अधिक है अतः H_0 के विषय में वही निष्कर्ष निकलता है जो कि ऊपर दिया जा चुका है।

विश्वास्यता अन्तराल तथा विश्वास्यता सीमाएँ

यदि दो मान t_1 और t_2 जो कि केवल प्रतिद्वन्द्व प्रेशणों के फलन हैं, ज्ञात करने सम्भव हैं और प्राचल θ जितना प्रागणन करना है वह इस प्रकार है कि

$$P(t_1 < \theta < t_2) = 1 - \alpha \quad (96)$$

जब कि α एक निश्चित प्राधिक्यता है तो t_1 और t_2 के बीच का अन्तराल विश्वास्यता अन्तराल कहलाता है। इसका अभिप्राय है कि व्यवहार में प्राचल θ के इन दो मानों, t_1 और t_2 के बीच में होने की प्रायिकता $1 - \alpha$ है।

इस विश्वास्यता अन्तराल के अग्रतम न्यूनतम व अधिकतम मान t_1 व t_2 ही विश्वास्यता सीमाएँ कहलाते हैं।

विश्वास्यता अन्तराल का वर्णन अध्याय (12) में भी दिया गया है। अधिक स्पष्टीकरण के लिए इसे प्रतिचयन निदान के अध्याय में भी पढ़ें।

विश्वास्यता-गुणांक

प्राधिक्यता माप जो कि प्राचल के अन्तराल में स्वीकृत होने की प्रायिकता बताता है विश्वास्यता-गुणांक कहलाता है।

विश्वास्यता क्षेत्र

यदि अनेक प्राचलों का भागणन करा हो और प्राचल अवकाश में ऐसा क्षेत्र निर्धारित करना सम्भव हो कि प्राचलों के इस क्षेत्र में समावेश होने की प्रायिकता $(1-\alpha)$ है तो इस क्षेत्र को विश्वास्यता क्षेत्र कहते हैं।

समग्र माध्य μ की विश्वास्यता सीमाएँ

यदि एक चयनकृत प्रतिदर्श में n स्वतन्त्र प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है तो इनके द्वारा $(1-\alpha)$ प्रायिकता पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए प्रतिदर्श t का प्रयोग करना होता है जब कि α सा स्त² या प्रथम प्रकार की त्रुटि है।

यह ज्ञात है कि प्रतिदर्शज,

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

यदि $\sqrt{n} (\bar{X} - \mu)/s$ का मान सा स्त α पर $-\alpha$ और α के बीच में स्थित है अर्थात् स्वीकृत क्षेत्र में है तो समग्र माध्य μ का आगणित मान स्वीकृत होने की प्रायिकता $(1-\alpha)$ है।

अन्यथा इसका मान स्वीकृत नहीं है। अतः μ के विश्वास्यता अन्तराल के लिए निम्न असमिका का सत्य होना आवश्यक है।

$$-t_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha \quad (97)$$

जब कि $\alpha, (n-1)$ स्व को α सा स्त के लिए सारणीबद्ध मान है।

$$\begin{aligned} \text{या } t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} &\leq (\bar{X} - \mu) < t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \\ \text{या } \bar{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} &\leq \mu < \bar{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (98)$$

असमिका (98) में \bar{X} , s और n के मान प्रतिदर्श के आधार पर प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं। t_α का मान t -वटन सारणी (पृष्ठ 3) द्वारा देखकर प्रतिस्थापित कर

दिया जाता है। यहाँ μ का मान सीमाओं $(\bar{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}})$ और $(\bar{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}})$

के बीच स्वीकृत है अतः μ की उपरि सीमा $\bar{X} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$ और निम्न $\bar{X} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$ तक

है या μ की विश्वास्यता सीमाएँ $\bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}$ के समान हैं। (9 9)

उपरि सीमा व निम्न सीमा के अन्तर का विश्वास्यता अन्तराल कहते हैं।

दो समग्र माध्यों में अन्तर, $(\mu_1 - \mu_2)$ की विश्वास्यता सीमाएँ

$(\mu_1 - \mu_2)$ किसी भी प्राचल की विश्वास्यता सीमाएँ पिछले खण्ड में दिये गये सिद्धान्त से ज्ञात कर सकते हैं। व्यञ्जक (9 9) को देखने से पता चलता है कि विश्वास्यता अन्तराल की सीमाएँ ज्ञात करने हेतु उस प्राचल के आवर्तन में जिसका विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है, इस आगणक के मानक विचलन को प्रतिदर्शज के सारणीबद्ध-मान से गुणा करके एक बार जोड़ देने व एक बार घटा देने पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात हो जाती हैं। इसी बात को ध्यान में रखकर $(\mu_1 - \mu_2)$ की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ भी दो स्थितियों, (क) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ और अज्ञात हैं (ख) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ और अज्ञात हैं के अन्तर्गत सीमाएँ ज्ञात करनी होंगी।

स्थिति 'क' में $(\mu_1 - \mu_2)$ की विश्वास्यता सीमाएँ

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\alpha}, (n_1 + n_2 - 2) \quad (9 10)$$

हैं

यूत्र (9 10) में संकेतन यूत्र (9 2) के अनुसार है।

$t_{\alpha}, (n_1 + n_2 - 2)$, का α सा स्त व $(n_1 + n_2 - 2)$ स्व को के लिए। का

सारणीबद्ध मान हैं। यूत्र में सभी संकेतना के मान रखकर $(\mu_1 - \mu_2)$ का विश्वास्यता अन्तराल या सीमाएँ ज्ञात कर सकते हैं। स्थिति 'ख' में $(\mu_1 - \mu_2)$ विश्वास्यता सीमाएँ हैं,

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \cdot t' \quad (9 11)$$

यूत्र (9 11) में सभी संकेतन यूत्र (9 4) के अनुसार हैं जब कि t' का भारत मान यूत्र (9 6) के अनुसार है। यदि चाहें तो t' के स्थान पर शुद्ध स्व को व α सा स्त पर सारणीबद्ध मान का प्रतिस्थापन कर सकते हैं। सभी संकेतना के मान, यूत्र (9 11) में रख कर, विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 9 4 उदाहरण (9 1) में दिये गये प्रतिदर्श प्रेशनों के द्वारा समग्र माध्य μ की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

यूत्र (9 9) द्वारा μ के लिए बि सी,³

$$= 6738 \pm 293 \times 2365$$

$$= 6738 \pm 683$$

यूत्र (9 6) में $\bar{X}, s/\sqrt{n}$ व t_{α} के मान उदाहरण 9 1 द्वारा प्रतिस्थापित कर दिये गये हैं। अतः निम्न सीमा

$$L = 6055 \text{ और उपरि सीमा } U = 742$$

3. बि सी. \equiv विश्वास्यता सीमाएँ

उदाहरण 9 5 : उदाहरण (9 2) में दिये न्यास के आधार पर $(\mu_1 - \mu_2)$ की 99% विश्वास्यता सीमाएँ सूत्र (9 10) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

स्व को 21 के लिए वि सी (जब कि $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$= 2.66 \pm 4.089 \times 2.831$$

$$= 2.66 \pm 1.16$$

यहाँ सूत्र (9 10) में $(X_1 - \bar{X}_2)$, $s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ के मान उदाहरण (9 2)

द्वारा प्रतिस्थापित किये गये हैं और $t_{0.01, 21}$

$$= 2.831 \text{ है (t का मान सारणी द्वारा देखा गया है)}$$

अतः निम्न सीमा $L = 1.50$ और उपरि सीमा $U = 3.82$

युगल t-परीक्षा

इस परीक्षा का प्रयोग तब करते हैं जब कि युगल प्रेक्षण एक ही या एक रूप जीव या निर्जीव पर लिए गये हँ। समग्र में इन युगल प्रेक्षणों के अन्तर के माध्य के प्रति निराकरणिय परिकल्पना $H_0: \bar{D} = 0$ की $H_1: \bar{D} \neq 0$ या C (जब कि C एक वास्तविक ज्ञात मान है) के विरुद्ध परीक्षा की जाती है। माना कि प्रतिदर्श में n युगल प्रेक्षण एव इनमें तदनुसार अन्तर निम्नांकित है —

युगल प्रेक्षण		अन्तर 'd'
(X_1)	(X_2)	$(X_1 - X_2)$
X_{11}	X_{21}	$X_{11} - X_{21} = d_1$
X_{12}	X_{22}	$X_{12} - X_{22} = d_2$
X_{13}	X_{23}	$X_{13} - X_{23} = d_3$
⋮		⋮
X_{1n}	X_{2n}	$X_{1n} - X_{2n} = d_n$

युगल प्रेक्षणों में अन्तर 'd' ज्ञात करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि अन्तर $(X_1 - X_2)$ या $(X_2 - X_1)$ कोई भी ले सकते हैं किन्तु जो क्रम एक अन्तर के लिए है वही सब अन्तरो के लिए रहता है। जो अन्तर ऋणात्मक हो उन्हें ऋणात्मक ही रखा जाता है और परिवर्तन करते समय इनका विचार करना होता है। अन्तरो को ज्ञात करके, H_0 की परीक्षा निम्नांकित प्रतिदर्शज द्वारा करते हैं।

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}}{s_d / \sqrt{n}} \quad \dots (9.12)$$

यहाँ t की स्वतन्त्रता कोटि $(n - 1)$ है।

सूत्र (9.12) में,

$$\bar{d} = \sum_i d_i / n$$

$$\text{और } S_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (d_i - \bar{d})^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_i d_i - \frac{\left(\sum_i d_i\right)^2}{n} \right\}$$

S_d^2 का वर्गमूल लेकर d का मानक विचलन S_d प्राप्त हो जाता है।

\bar{D} का मान H_0 के अनुसार रखा जाता है। अधिकतर H_0 $\bar{D} = 0$ की ही परीक्षा करते हैं।

(9.12) द्वारा परिकल्पित t , की α सा० स्त० व $(n - 1)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके H_0 के विषय में पहले की भक्ति निर्णय कर लिया जाता है।

परिकल्पित $t < t_{\alpha}$ होने पर H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है इसका अभिप्राय है कि समग्र में अन्तरों का माध्य शून्य के समान है। $t > t_{\alpha}$ होने की स्थिति में H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि वास्तव में इन युग्म प्रेक्षणों में अन्तर है न कि युग्म प्रेक्षणा में अन्तर को सत्यापन के कारण अन्तर समझकर छोड़ा जा सकता है।

\bar{D} का विश्वास्यता अन्तराल

\bar{D} का विश्वास्यता अन्तराल (9.9) के अनुरूप सूत्र

$$\bar{d} \pm \frac{S_d}{\sqrt{n}} t_{\alpha} \quad \dots (9.13)$$

द्वारा ज्ञात किया जाता है। इस सूत्र में सभी सकेतन (9.12) में दिये प्रतिदर्शज के अनुसार है। t_{α} α सा० स्त० (जो कि दृष्टिगत हो) और $(n - 1)$ स्व० को० पर। का सारणीबद्ध मान है। सभी सकेतनों के मान प्रतिदर्श के अनुसार सूत्र में रखकर, एक बार (+) चिह्न और एक बार (-) चिह्न को लेकर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात होती हैं। उपरि सीमा में से निम्न सीमा घटाकर विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण 9.6. 12 ग्राम जैब सामग्री को अलग-अलग प्लेटिनम व मिलिका की प्यालियों में भरित किया गया और प्रत्येक प्रकार की 9 प्यालियों में कुल भरन की निम्नांकित मात्रा पायी गयी :-

प्याली संख्या	प्लैटिनम की प्याली में भस्म की मात्रा (X)	चिनिदा की प्याली में भस्म की मात्रा (Y)
1	16 99	16 71
2	17 84	17 94
3	16 44	16 76
4	12 45	13 37
5	13 84	14 13
6	12 03	11 49
7.	18 45	17 81
8	14 79	13 62
9	11 27	12 26

परिक्ल्पना, कि दो प्रकार की प्यालिया द्वारा प्राप्त भस्म की माध्य मात्राएँ म अन्तर शून्य के समान है अर्थात्

$H_0 \bar{D} = 0$ की $H_1 \bar{D} \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज (9 12) द्वारा कर सकते हैं।

अन्तर $(X-Y) = d \quad 28, -10, -32, -92, -29, 54, 64, 117, -99$

$$\sum_1 d_i = 001, \quad \sum_1 d_i^2 = 41715$$

$$\therefore \bar{d} = 0001$$

$$\text{और } s_d^2 = \frac{1}{8} \left\{ 41715 - \frac{(001)^2}{9} \right\}$$

$$= 05214$$

$$\therefore s_d = 0722$$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{.722}{3} = 2406$$

$$\therefore t = \frac{0001}{02406}$$

$$= 00044$$

सारणी (परि० प-3) द्वारा $t_{05,8} = 2306$

यहाँ $t < t_{0.05; 8}$ है।

अतः परिकल्पना H_0 को स्वीकार न किया जाता है जिसका अर्थ है कि दोनों प्रकार की प्धातियों द्वारा भस्म की समान मात्रा प्राप्त होती है।

किन्हीं दो वास्तविक वारम्बारता, प्रतिशत या अनुपात में अन्तर की सार्थकता परीक्षा

व्यवहार में प्रेक्षणों को वारम्बारता बटन के रूप में दिया जाता है। यह बटन या तो पूर्ण संख्या, प्रतिशत या अनुपात के रूप में दिये जाते हैं। किन्हीं दो वर्गों की वारम्बारता या प्रतिशत में अन्तर की सार्थकता परीक्षा की प्रायः आवश्यकता होती है। इस परिकल्पना की परीक्षा प्रतिदशज t द्वारा की जाती है।

माना कि वर्गीकृत वारम्बारता बटन निम्न प्रकार है —

वर्ग	समग्र में यूनिटों की संख्या	प्रतिदश में यूनिटों की संख्या	प्रतिदश में प्रतिशत
(i)	(ii)	(iii)	(iv)
G_1	N_1	f_1	P_1
G_2	N_2	f_2	P_2
G_3	N_3	f_3	P_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
G_k	N_k	f_k	P_k
	$N = \sum_{i=1}^k N_i$	$\sum_{i=1}^k f_i = n$	

N_i और N_j के अन्तर $(i, j = 1, 2, 3, \dots, k, i \neq j)$

की सार्थकता परीक्षा करने के लिए प्रतिदशज

$$t = \frac{(f_i - f_j)}{s_{DF}} \sim t_{n-1} \quad \dots (9.14)$$

को निकल माना जाता है

जहाँ

$$s_{DF} = \sqrt{\frac{2}{n-1} (nf - f^2)} \quad \dots (9.15)$$

यहाँ

$$f = \frac{f_i + f_j}{2}$$

(9.14) में सभी संकेतों का मान रखकर, परिवर्तित t ज्ञात हो जाता है इस t को $(n-1)$ स्व० को० व a सा० स्त० पर सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके समग्र के लिए इन चारम्बारताओं में अन्तर के प्रति परिवर्तना की सार्थकता के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि वर्गों के तदनुसार प्रतिशत दिये गये हों, (जो ऊपर सारणी के चौथे स्तम्भ में दिये गये हैं) तो समग्र में दो प्रतिशता p_1 व p_2 ($1 \neq 2$) की समानता के प्रति परिवर्तना की परीक्षा, प्रतिदर्शज

$$t_{n-1} = \frac{p_1 - p_2}{s_{Dp}} \quad \dots (9.16)$$

जन्म

$$s_{Dp} = \sqrt{\frac{2 p_0 q_0}{n-1}} \quad \dots (9.17)$$

यहाँ

$$p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad q_0 = (100 - p_0)$$

द्वारा की जाती है।

पहले की भाँति प्रतिशतों में अन्तर की सार्थकता के प्रति निर्णय कर सकते हैं।

यदि दो भिन्न समग्रों में अनुपातों के समान होने की परिवर्तना की परीक्षा करनी हो तो इस स्थिति में (9.17) में s_{Dp} का मान निम्न सूत्र में ज्ञात करते हैं —

$$s_{Dp} = \sqrt{p_0 q_0 \left(\frac{1}{n_1-1} + \frac{1}{n_2-1} \right)} \quad \dots (9.18)$$

उदाहरण 9.7 एक जनान्विकीय (Demographic) चर सम्बन्धी अध्ययन द्वारा प्राप्त आँकड़े ग्रामीण तथा नगरीय जनसंख्या के लिये आयु के अनुसार निम्न सारणी में दिये गये हैं।

वर्तमान आयु (वर्षों में)	बारं०	नगरीय		ग्रामीण	
		संख्या	प्रतिशत	संख्या	प्रतिशत
15—19	f_1	2	0.3	52	9.7
20—24	f_2	56	9.4	136	25.4
25—29	f_3	137	22.9	121	22.5
30—34	f_4	152	25.3	101	18.8
35—39	f_5	149	24.8	57	10.7
40—44	f_6	83	13.8	41	7.6
45 या अधिक	f_7	21	3.5	28	5.3
योग		600		536	

(1) परिवर्तना H_0 कि नगरीय जनसंख्या के लिए (25—29) और (30—34) आयु वर्गों की बारम्बारताओं में कोई सार्थक अन्तर नहीं है, की परीक्षा (9.14) में दिये गये प्रतिदर्श t द्वारा करते हैं।

यहाँ $f_3=137$, $f_4=152$

$$\begin{aligned} \text{जबकि } f &= \frac{137+152}{2} \\ &= 144.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{DP} &= \sqrt{\frac{2}{600-1} (600 \times 144.5 - 144.5^2)} \\ &= \sqrt{219.76} \\ &= 14.82 \end{aligned}$$

सूत्र (9.14) के अनुसार,

$$t = \frac{137 - 152}{14.8} = -1.01$$

$t_{0.05; 599} = 1.96 > |t|$ अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

(ii) H_0 : नगर और ग्राम दोनों में आयु वर्ग (35—39) का प्रतिशत बराबर है अर्थात्

$H_0 : p_1 = p_2$ की $H_1 : p_1 \neq p_2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं—

$$p_0 = \frac{24.8 + 10.7}{2} = \frac{35.5}{2} = 17.75$$

$$\therefore q_0 = 100 - 17.75 = 82.25$$

$$\begin{aligned} s_{DP} &= \sqrt{17.75 \times 82.25 \left(\frac{1}{599} + \frac{1}{535} \right)} \\ &= \sqrt{1459.94 (0.036)} = \sqrt{525.58} = 22.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore t &= \frac{24.8 - 10.77}{22.9} \\ &= 6.16 \end{aligned}$$

$\alpha = 0.05$ और 1135 स्व. को. पर t का सारणीबद्ध मान 1.96 है जो कि t से कम है। अतः परिवर्तना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि नगरीय तथा ग्रामीण व्यक्तियों की प्रतिशत, आयु वर्ग (35—39) में समान नहीं है।

K समूहों के माध्यों की समानता की परीक्षा जबकि $K > 2$

माना कि k समूहों के माध्य समूह $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ हैं। तो परिवर्तना

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$$

की, H_1 : (कि कम से कम कोई दो माध्य समान नहीं हैं) के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि H_0 की परीक्षा के लिए k समग्र m k स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनके परिमाण क्रमशः

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$$

हैं। i वें प्रतिदर्श के j वें प्रेक्षण को X_{ij} द्वारा निरूपित किया गया है जबकि

$$i = 1, 2, 3, \dots, k \quad \text{और} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_i$$

है। यह कल्पना करते हैं कि

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_k^2$$

या यह कहे कि समग्र प्रसरण समान हैं तो परिवर्तना H_0 की परीक्षा स्नेडेकर (Snedecor) F -परीक्षा द्वारा की जाती है और प्रतिदर्शज,

$$F = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \sim F_{k-1; n-k} \dots (9.19)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} \dots (9.19.1)$$

$$\text{जहाँ } \sum n_i = n$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k \frac{X_i^2}{n_i} - \frac{G^2}{n}}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \frac{X_i^2}{n_i}} \cdot \frac{n-k}{k-1} \dots (9.19.2)$$

(जहाँ G कुल प्रेक्षणों का योग है और n कुल प्रेक्षणों की संख्या है। X_i i वें प्रतिदर्श में प्रेक्षणों का योग है।)

यदि परिवर्तित F का मान α सा० स्त० और $\{(k-1), \sum (n_i - 1)\}$ स्वतन्त्रता कोटि पर सारणीबद्ध F से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। प्रायः k माध्यों की समानता की परीक्षा प्रसरण विश्लेषण-सारणी द्वारा करते हैं जिसका विवरण अध्याय (19) में दिया गया है।

उदाहरण 9.8 : मटर की कृषिजोपजाति (Pea cultivars) के माध्य शुष्क भार पर तीन तापक्रमों का प्रभाव देखा गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रेशण निम्न मारणी में दिये गये हैं। प्रेशणों की सहायता से परिकल्पना H_0 (तीनों तापक्रमों का, माध्य शुष्क भार पर समान प्रभाव है) की परीक्षा F -परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

मटर	माध्य शुष्क भार (ग्राम)		
	तापक्रम		
	12°C	17°C	25°C
शुष्कभार :	X_1	X_2	X_3
1	9.0	13.0	6.6
2	7.3	9.3	7.9
3	7.7	8.9	7.5
4	9.7	7.6	4.7
5	4.4	8.6	6.6
6	3.0	9.1	4.2
7	4.8	5.7	4.9
8	4.3	5.6	
9	2.9		
10	2.7		
योग	55.8	67.8	42.4

यहाँ $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ की $H_1 : ($ कि कम से कम कोई दो तापक्रमों का माध्य प्रभाव समान नहीं है) के विरुद्ध परीक्षा की गयी है।

घोर $k=3$

कुल योग $G=166.0$, $\therefore \bar{X}=166.0/25=6.64$

$$\sum_j X_{1j}^2 = 373.26$$

$$\sum_j X_{2j}^2 = 613.08$$

$$\sum_j X_{3j}^2 = 269.52$$

$$\sum_{l=1}^3 \sum_j X_{lj}^2 = 1255.86, \quad \frac{G^2}{n} = \frac{(166)^2}{25} = 1102.24$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{X_i^2}{n_i} = \frac{(558)^2}{10} + \frac{(678)^2}{8} + \frac{(424)^2}{7}$$

$$= 1142.792$$

सूत्र (9.19.2) द्वारा

$$F = \frac{1142.79 - 1102.24}{1255.86 - 1142.79} \times \frac{22}{2} = \frac{40.55}{113.07} \times 11$$

$$= 3.94$$

$\alpha = 0.5$ और (2, 22) स्वतन्त्रता कोटि पर सारणी (परिघ-5.2) से $F = 3.44$ जो कि परिकलित F से कम है। अतः H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि तीनों तापक्रमों का, माध्य शुष्क भार पर, समान प्रभाव नहीं है।

प्रसामान्य विचर परीक्षा

यदि एक समग्र से, जिसका माध्य μ व मानक विचलन σ है, परिमाण n के यथा सम्भव प्रतिदर्शों का चयन किया जाय तो इन प्रतिदर्शों माध्यों \bar{X} के बटन का माध्य μ व मानक विचलन σ/\sqrt{n} होता है जैसा कि अध्याय 8 में बृहत् सख्या के दुर्बल नियम में दिया जा चुका है।

माना कि एक चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है और σ ज्ञात है। तो इस स्थिति में एक परिमाण n के प्रतिदर्शों के आधार पर परिकल्पना,

$H_0: \mu = \mu_0$ की $H_1: \mu \neq \mu_0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रसामान्य विचर द्वारा करते हैं जिसके लिए निम्न सूत्र है —

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \dots (9.20)$$

यदि पूर्व निर्धारित सांख्यिकीय $\alpha = 0.5$ पर परीक्षा करनी है तो, परिकलित Z की 1.96 से तुलना करते हैं। यदि $Z > 1.96$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 स्वीकृत होता है। इसका अर्थ है कि \bar{X} व μ के मान में सार्थक अन्तर है। इसी प्रकार $\alpha = 0.1$ होने पर Z की तुलना 2.58 से करते हैं। अन्य किमी भी सार्थकता स्तर के लिए प्रसामान्य बटन सारणी से Z का मान ज्ञात करके और परिकलित Z से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

किन्तु व्यवहार में अधिकतर σ ज्ञात नहीं होता है। किन्तु यह विदित है कि n बृहत् होने की स्थिति में t_{n-1} बटन प्रायः मानक प्रसामान्य बटन के समान होता है और इस कारण t_{n-1} की सारणी के स्थान पर $N(0, 1)$ की सारणी से ही काम चलाया जा सकता है। सूत्र (9.20) में σ के स्थान पर बृहत् प्रतिदर्शों के मानक विचलन s को रखना

होता है। यहाँ भी परिकल्पित Z के मान की सारणीबद्ध Z के मान से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय ले लिया जाता है।

इस प्रकार बृहत् प्रतिदर्शों की स्थिति में $H_0: \mu_1 = \mu_2$ की परीक्षा t के स्थान पर प्रसामान्य विचर परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

द्विपक्ष चर के लिए परिकल्पना-परीक्षा

एक सिक्के को उछाल कर बरतूली परीक्षण किया। किसी भी एक परीक्षण में सिक्का या तो शीर्ष की ओर से गिरेगा या सन् की ओर से। माना कि एक परीक्षण में सिक्के के शीर्ष की ओर से गिरने की प्रायिकता P है और सन् की ओर से गिरने की प्रायिकता Q है जबकि $P+Q=1$ है।

सिक्के को n बार उछाला गया है और माना कि इन परीक्षणों में सिक्का r बार शीर्ष की ओर से गिरता है। इस परीक्षण के आधार पर एक परीक्षण में शीर्ष के ऊपर की ओर होने की प्रायिकता $\frac{r}{n}$ है। यदि इस परिकल्पना की, कि किसी भी परीक्षण में शीर्ष ऊपर होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है अर्थात् $P = \frac{1}{2}$ है, परीक्षा बरती है, तो n बृहत् होने की स्थिति में परिकल्पना की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं। व्यापक रूप में परिकल्पना,

$H_0: p = p_0$ की $H_1: p \neq p_0$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए मानक प्रसामान्य विचर निम्नांकित है:—

जहाँ p_0 एक अचर मान है।

माना कि घटनाएँ n हैं और इन n घटनाओं में से r वह है जो प्रायिकता p से सफल है। परिकल्पना की परीक्षा के हेतु मानक प्रसामान्य विचर Z का मान निम्न सूत्रों में प्राप्त कर लिया जाता है।

$$\text{स्थिति 1: } Z = \frac{(r + 0.5) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \quad \text{जब } r < np_0 \quad \dots (9.21)$$

$$\text{स्थिति 2: } Z = \frac{(r - 0.5) - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \quad \text{जब } r > np_0 \quad \dots (9.22)$$

यदि Z का परिकल्पित मान प्रसामान्य बटन सारणी द्वारा देने भये मान $Z_{\alpha/2}$ से कम या समान हो, या $Z_{1-\alpha/2}$ से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। (अर्थात् यदि $Z < Z_{\alpha/2}$ या $Z > Z_{1-\alpha/2}$ तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है)।

उदाहरण 9.9: एक रोग से पीड़ित 186 रोगियों में से 80 म्रियं भी। इस परिकल्पना की कि इस रोग से पीड़ित स्त्री व पुरुषों की समान प्रायिकता है परीक्षा इस प्रकार

करते हैं :—

यहाँ $H_0 : p = \frac{1}{2}$ की $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

$$r = 80 \text{ और } np_0 = 186 \times \frac{1}{2} = 93$$

यहाँ $r < np_0$ है इसलिए सूत्र (9 21) का प्रयोग करना होगा।

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(80 + 0.5) - 93}{\sqrt{186 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{-12.5}{\sqrt{46.5}} = \frac{-12.5}{6.82} = -1.83 \end{aligned}$$

सारणी (परि० घ-2) द्वारा सा० स्त० $\alpha = 0.05$ के लिए $Z = 1.96$ है जो कि Z के परिकल्पित मान से अधिक है, अतः परिकल्पना H_0 कि $p = \frac{1}{2}$ स्वीकृत है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि 5 प्रतिशत मा० स्त० पर रोगियों में पुरुषों व स्त्रियों की संख्या समान है।

इसी प्रकार पुरुषों की संख्या 106 लेकर सूत्र (9 22) का प्रयोग करके निष्कर्ष निकाला जा सकता है।

काई-वर्ग द्वारा सार्थकता परीक्षा

χ^2 एक सामंजस-गुण्यता (goodness of fit) की परीक्षा है। χ^2 द्वारा कारकों (factors) की स्वतंत्रता या विषमता (heterogeneity) की परीक्षा की जाती है।

यदि परिवर्तित बटन के अनुसार n प्रेक्षणों की विभिन्न वर्गों में प्रत्याशित बारम्बारताएँ क्रमशः $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ और वास्तविक बारम्बारताएँ $O_1, O_2, O_3, \dots, O_k$ हों तो,

$$\chi^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \frac{(O_3 - E_3)^2}{E_3} + \dots + \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2 / E_i \quad \dots (9 23)$$

$$= \sum_{i=1}^k O_i^2 / E_i - n \quad \dots (9 23 1)$$

यदि n इतना बृहत् हो कि कोई भी प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम न हो तो निश्चित किया जा सकता है कि χ^2 का बटन लगभग χ^2_{k-1} के समान होगा। अनुलग्न (suffix) $(k - 1)$, χ^2 की स्वतंत्रता कोटि को सूचित करता है।

यदि χ^2 का परिकल्पित मान χ^2_{k-1} के α बिन्दु से अधिक होता है तो परिकल्पना को α सार्थकता स्तर पर अस्वीकार कर दिया जाता है।

द्विपक्षीय प्रत्यक्ष स्थिति में प्रेषित बारम्बारताओं का योग और प्रत्यागित (या सैद्धांतिक) बारम्बारताओं का योग समान होता है अर्थात्

$$\sum_i O_i = \sum_i E_i$$

प्रासंग सारणी

यह एक द्वि-मार्गी है जिसमें निम्नी दो अभिव्यक्तियाँ या कारक A व B के विभिन्न वर्गों में पडित बारम्बारता लिखने की विधि है। माना कारक A में p वर्ग और B में q वर्ग हैं। यदि कारक A की पक्ति की और B को स्तम्भ की ओर विभाजित किया गया है तो p पक्ति और q स्तम्भों वाली मार्गी को (p × q) क्रम की प्रासंग मार्गी कहते हैं। प्रत्यक्ष कोष्ठिका में इन अभिव्यक्तियों के अनुसार प्रेषित बारम्बारता O_{ij} के रूप में लिख देने हैं। इसके स्पष्ट ज्ञान हो जाता है कि iवीं पक्ति और jवें स्तम्भ के अन्तर्गत बिन्दु पर कोष्ठिका की बारम्बारता O_{ij} है। यह उन युनिटों की संख्या है जिनमें कारक A_i व B_j के लक्षण विद्यमान हैं। तिनो भी पक्ति या स्तम्भ के योग का उचित योग कहते हैं।

(p × q) क्रम की प्रासंग सारणी

A/B	B ₁	B ₂	B ₃ ... B _j	... B _q	योग
A ₁	O ₁₁	O ₁₂	O ₁₃ O _{1j}	O _{1q}	O ₁
A ₂	O ₂₁	O ₂₂	O ₂₃ O _{2j}	O _{2q}	O ₂
A ₃	O ₃₁	O ₃₂	O ₃₃ O _{3j}	O _{3q}	O ₃
⋮					⋮
A _i	O _{i1}	O _{i2}	O _{i3} O _{ij}	O _{iq}	O _i
	:	:	:	:	⋮
A _p	O _{p1}	O _{p2}	O _{p3} O _{pj}	O _{pq}	O _p
योग	O ₁	O ₂	O ₃ O _j	O _q	O = n

उपरोक्त मार्गी में O_i और O_j क्रमशः iवीं पक्ति व jवें स्तम्भ के उचित योग हैं जहाँ i = 1, 2, 3, ..., p और j = 1, 2, 3, ..., q के हैं। बारम्बारताओं का कुल योग O = n है जो कि प्रतिदर्श परिमाण के समान है। साथ ही,

$$\sum_{i=1}^p O_i = \sum_{j=1}^q O_j = O = n$$

यदि परिकल्पना यह है कि कारक A और B स्वतंत्र हैं तो (i, j)वीं कोष्ठिका (cell) में बारम्बारता O_{ij} का प्रत्यागित मान E_{ij} निम्न सूत्रों में प्राप्त होगा—

$$E_{ij} = \frac{O_i \times O_j}{n} \quad \dots (9.24)$$

$$= \frac{(\text{1वीं पंक्ति का योग}) \times (\text{jवें स्तम्भ का योग})}{\text{कुल प्रेक्षण-संख्या}}$$

सूत्र (9.24) द्वारा प्रत्येक कोष्ठिका की प्रेक्षित बारम्बारता के समत प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात करली जाती है।

O_{ij} व E_{ij} के मानों को निम्न प्रतिदर्शज χ^2 में रखकर परिकल्पना H_0 (कि कारक A और B स्वतंत्र हैं) की परीक्षा करने की विधि इस प्रकार है —

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad \dots (9.25)$$

$(p \times q)$ क्रम की घासग सारणी की स्थिति में χ^2 की स्वतंत्रता कोटि $(p - 1)(q - 1)$ होती है।

यदि α सापेक्षता स्तर व $(p - 1)(q - 1)$ स्व. को. के लिए χ^2 बटन सारणी (परि० घ-4) द्वारा प्राप्त मान χ^2_{α} परिकल्पित χ^2 के मान से कम हो, तो H_0 को प्रस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.10 व्यक्तियों की संख्या उनके स्थान एवं पेस्टीसाईड उद्योग के बारे में अभिवृत्ति के अनुसार निम्न सारणी में दी गयी है —

पेस्टीसाईड उद्योग के प्रति अभिवृत्ति	रहने का स्थान		
	नगर	गाँव	योग
अनुकूल	74 (86)	55 (43)	129
प्रतिकूल	43 (38)	15 (20)	58
उदासीन	82 (75)	31 (38)	113
योग	199	101	300

परिकल्पना H_0 (कि रहने के स्थान और पेस्टीसाईड उद्योग के प्रति अभिवृत्ति स्वतंत्र हैं) की परीक्षा, χ^2 -परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं:—

यह एक (3×2) क्रम की प्रामाण्य मारणी है। प्रत्येक बोग बारम्बारता की तदनुसार सैद्धान्तिक बारम्बारता सूत्र (9.24) द्वारा ज्ञान कर सकते हैं।

$$E_{11} = \frac{129 \times 199}{300} = 85.57 = 86$$

इसी प्रकार अन्य सैद्धान्तिक बारम्बारताएँ परिवर्तित की गयी हैं और पूर्णांकन करके इन्हें उपर्युक्त मारणी में कोष्ठकों में दिया गया है।

सूत्र (9.25) द्वारा,

$$\begin{aligned} \chi^2 = & \frac{(74 - 86)^2}{86} + \frac{(55 - 43)^2}{43} + \frac{(43 - 38)^2}{38} + \frac{(15 - 20)^2}{20} \\ & + \frac{(82 - 75)^2}{75} + \frac{(31 - 38)^2}{38} = 8.855 \end{aligned}$$

5 प्रतिशत सापेक्षता स्तर व हम χ^2 की 2 स्व. को. के लिए सारणी (परि० प-4) द्वारा प्राप्त मान $\chi^2(0.05) = 5.991$ है।

परिवर्तित χ^2 का मान $\chi^2(0.05)$ से अधिक है। अतः परिकल्पना H_0 अस्वीकृत है। इसका अभिप्राय है कि पम्प्रीकाइड उद्योग के विषय में अभिवृत्ति पर रहने के स्वभाव का प्रभाव पड़ता है।

दो समान्तर प्रतिदर्शों की सजातीयता की परीक्षा

माना कि दो समूहों में दो प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनमें k वर्ग हैं। ये वर्ग या तो पृथक्-पृथक् होते हैं या मग्न चर की स्थिति में अन्तर्गत होते हैं। माना कि इन प्रतिदर्शों के k वर्गों में प्रेक्षित,

बारम्बारता $O_{11}, O_{12}, O_{13}, \dots, O_{1k}$

और $O_{21}, O_{22}, O_{23}, \dots, O_{2k}$ हैं।

यदि $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ और $r'_1, r'_2, r'_3, \dots, r'_k$

समूहों के अनुसार क्रमशः वर्ग बारम्बारताओं के सैद्धान्तिक अनुमान हैं तो परिकल्पना H_0 (कि दोनों प्रतिदर्शों का चयन अभिन्नशक्त के अनुसार स्वतंत्र समूहों से किया गया है) की परीक्षा करनी है जबकि वास्तविक बटन के विषय में कुछ ज्ञान नहीं है अर्थात्

$H_0: r_1 = r'_1$ की $H_1: r_1 \neq r'_1$ के विपक्ष परीक्षा करनी है,

जबकि $i = 1, 2, 3, \dots, k$

परिकल्पना H_0 की परीक्षा, χ^2 -परीक्षा द्वारा करते हैं।

प्रतिदर्शज χ^2 का मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

प्रतिदर्श	वर्ग				योग
	1	2	3.....K		
1	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{1k}	n_1
2	O_{21}	O_{22}	O_{23}	O_{2k}	n_2
योग	$(O_{11} + O_{21})$	$(O_{12} + O_{22})$	$(O_{13} + O_{23})$	$(O_{1k} + O_{2k})$	$n_1 + n_2 = n$

यदि r_1 और r_1' ज्ञात हो तो परीक्षा के हेतु

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_{1i} - n_1 r_i)^2}{n_1 r_i} + \sum_{i=1}^k \frac{(O_{2i} - n_2 r_i')^2}{n_2 r_i'} \quad \dots (9.26)$$

यहाँ χ^2 की स्व० को $2(k-1)$ है।

यदि $r_1 = r_1'$ हो तो एकत्रित अनुपात,

$$r_1 = r_1' = \frac{(O_{11} + O_{21})}{n_1 + n_2} \quad \dots (9.27)$$

(9.26) में r_1 व r_1' का (9.27) द्वारा मान रखने पर

$$\chi^2 (k-1) = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^k \frac{(O_{1i} n_2 - O_{2i} n_1)^2}{(O_{1i} + O_{2i})} \quad \dots (9.28)$$

व्यवहार में r_1 (या r_1') का आगणन निम्न प्रकार से कर लिया जाता है :—

$$P_1 = \frac{O_{11}}{O_{11} + O_{21}}, P_2 = \frac{O_{12}}{O_{12} + O_{22}}, P_3 = \frac{O_{13}}{O_{13} + O_{23}},$$

$$\dots, P_k = \frac{O_{1k}}{O_{1k} + O_{2k}}$$

और एकत्रित आगणित अनुपात,

$$P = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

इन अनुपातों को प्रयोग करके χ^2 का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा कर सकते हैं :—

$$\chi^2_{k-1} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^k (O_{1i} + O_{2i}) P_i^2 - n_1 \quad \dots (9.29)$$

$$\chi^2_{k-1} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^k O_{1i} P_i - n_1 \quad \dots (9.30)$$

परिकल्पित χ^2 की, $(k - 1)$ स्व० को० व α सा० स्त० पर सारणीबद्ध χ^2 से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.11 : प्रायु के अनुसार उन स्त्रियों व पुरुषों का बटन नीचे दिया है जो कृमि (worms) के लिए धनात्मक थे।

	रोगियों के दो प्रतिदर्शों में प्रायु-वर्ग (वर्षों में)						योग
	(<4)	(5-9)	(10-14)	(15-19)	(20-24)	(>25)	
पुरुष	6	19	26	13	11	21	96
स्त्री	9	26	18	9	12	16	90
योग	15	45	44	22	23	37	186

परिकल्पना H_0 (कि ये दोनों प्रतिदर्श कृमि की दृष्टि से एक ही समग्र के लिये गये हैं) की परीक्षा करना है, तो सूत्र (9.30) को प्रयोग करना उचित है।

यहाँ

$$P_1 = \frac{6}{15} = .40, P_2 = \frac{19}{45} = .42, P_3 = \frac{26}{44} = .59,$$

$$P_4 = \frac{13}{22} = .59, P_5 = \frac{11}{23} = .48, P_6 = \frac{21}{37} = .57$$

$$\text{घोर } P = \frac{96}{186} = .516$$

सूत्र (9.30) के अनुसार,

$$\chi^2 = \frac{1}{.516} (6 \times .40 + 19 \times .42 + 26 \times .59 + 13 \times .59 + 11 \times .48 + 21 \times .57) - 96$$

$$= \frac{1}{.516} (50.64) - 96$$

$$= 98.14 - 96$$

$$= 2.14,$$

माना कि 5 प्रतिशत सापेक्षता स्तर पर परीक्षा करनी है, तो सारणी (पार०-य-4) द्वारा $\alpha = .05$ घोर 4 स्व० को० के लिए $\chi^2(.05) = 11.1$ है जो कि परिकल्पित χ^2 से कम है। अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि

हमि की दृष्टि से स्त्रियों व पुरुषों के प्रतिदर्श एक ही अनुपात से लिए गये माने जा सकते हैं।

(2×2) क्रम की घासंग सारणी

माना कि घनिलक्षण A और B के वेदल दो ही वर्ग हैं और इनकी स्वतन्त्रता की परीक्षा करना है। इन वर्गों और तदनुसार कोष्ठिका बारम्बारताओं को निम्न (2×2) घासंग सारणी में प्रदर्शित किया गया है।

A/B	B ₁	B ₂	योग
A ₁	a	b	(a+b)
A ₂	c	d	(c+d)
योग	(a+c)	(b+d)	a+b+c+d=n

A और B की स्वतन्त्रता की χ^2 -परीक्षा करने का एक विधि तो यह है कि कोष्ठिकाओं की सैद्धान्तिक बारम्बारता ज्ञात करके ऊपर दिये उदाहरण के अनुसार χ^2 के मान का परिकलन किया जा सकता है। किन्तु इन विधि का प्रयोग करके सैद्धान्तिक बारम्बारताओं a, b, c, और d के पदों में रखकर χ^2 के लिए एक सुगम सूत्र प्राप्त हो जाता है। इन सूत्र में a, b, c, और d घासि के मान प्रतिस्थापित करके प्रतिदर्शज χ^2 का मान ज्ञात हो जाता है। यहाँ χ^2 की स्व० को० सदैव एक होती है।

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \quad \dots (9.31)$$

जब कि $(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)$ ज्ञात योगों का गुणनफल है।

परिकलित χ^2 की α सा० स्त० व 1 स्व० को० के लिए सारणीद्वय χ^2 -मान से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.12 : सीलोन (Ceylon) के एक गाँव में फुफ्फुस क्षत (Pulmonary lesion) सम्बन्धी सर्वेक्षण के अन्तर्गत स्त्रियों व पुरुषों में निम्न सारणी के अनुसार घटनाएँ मिलीं। सर्वेक्षण में 344 अणिकों का अध्ययन किया गया।

फुफ्फुस क्षत की घटनाएँ

अणिक	स्त्री	पुरुष	योग
क्षत सहित	9	69	78
क्षत रहित	27	239	266
योग	36	308	n=344

परिकल्पना H_0 (कि श्रमिकों में शन की घटना निग (sex) में स्वतन्त्र है) की परीक्षा हम प्रकार पर सकते हैं --

उपरोक्त सारणी (2×2) तब की है अतः χ^2 का मान सूत्र (9.26) से परिकल्पित कर सकते हैं।

[स्रोत का स्रोत British journal of industrial medicine]

$$\chi^2 = \frac{344 (239 \times 9 - 69 \times 27)^2}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

$$= \frac{344 \times 288 \times 288}{78 \times 266 \times 36 \times 308}$$

$$= 124$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा $\alpha = 0.05$ और 1 स्व० को० के लिए $\chi^2 = 3.841$ है। χ^2 का सारणीबद्ध मान परिकल्पित χ^2 के मान से अधिक है अतः परिकल्पना H_0 स्वीकृत है।

सधु प्रतिदर्श की स्थिति में स्वतन्त्रता-परीक्षा

किसी परिकल्पना की χ^2 -परीक्षा का प्रयुक्त करने में यह अनुभव किया गया है कि प्राचल के यथार्थ मान का वृद्ध प्रतिदर्श घटन की स्थिति में प्रतिदर्श पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। परन्तु सधु प्रतिदर्श की स्थिति में χ^2 -घटन की कल्पना सम्पाप्त हो जाती है। ऐसी दशा में यथार्थता-परीक्षा का यथार्थ होना सम्भव नहीं है क्योंकि प्रायिकता घटन में कुछ प्रभाव प्राचल विद्यमान रहते हैं जिनको अपवृण (nuisance) प्राचल कहते हैं।

यदि (2×2) भाग्य सारणी में कोष्ठिका बारम्बारता सधु हो अर्थात् पाँच से कम हो तो χ^2 -घटन वक्र का सातत्य नहीं रहता है। अतः सूत्र (9.31) द्वारा परिकल्पित χ^2 का मान वास्तविक मान से अधिक होता है और प्रसाभाव्य विचर Z त्रिकोण माध्य 0 और प्रसरण 1 हो χ से बड़ा हो जाता है। अतः सधु प्रतिदर्श होने पर χ^2 -परीक्षा में असंगति (discrepancy) उत्पन्न हो जाती है। यह असंगति निम्न विधियों द्वारा दूर की जा सकती है।

येट्स-शुद्धि

एक त्रुटि को कम करने के हेतु येट्स ने सुझाव दिया कि (2×2) भाग्य सारणी की सधु बारम्बारता में 0.5 जोड़ दें और वृद्ध बारम्बारता में 0.5 इस प्रकार घटा दें कि उपाय योग बहो रह अर्थात् इस पर कोई प्रभाव न पड़े तो सूत्र (9.31) द्वारा χ^2 का परिकल्पन करने पर यथार्थ प्रायिकता मान प्राप्त हो जाता है।

येट्स शुद्धि का प्रयोग सातत्य के हेतु किया जाता है। येट्स शुद्धि के लिए 0.5 जिना जोड़े व घटाये हुए निम्न सूत्र द्वारा, χ^2 का मान सीधे प्राप्त कर सकते हैं और इस सूत्र द्वारा χ^2 का बही मान प्राप्त होता है जो 0.5 जोड़ कर व घटाकर प्राप्त होता है। इसका

कारण यह है कि शुद्धि के पश्चात् जो मान आते हैं उनको विचारधीन रख कर ही सूत्रीकरण कर दिया गया है।

$$X_1^2 = \frac{n(|ad - bc| - n/2)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(c+d)} \quad \dots (9.32)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\left(|O_{ij} - E_{ij}| - \frac{n}{2}\right)^2}{E_{ij}} \quad \dots (9.32.1)$$

यह ध्यान आवश्यक रखना चाहिये कि उपर्युक्त शुद्धि केवल (2×2) आसग सारणी के लिए ही की जाती है। सूत्र (9.32) में भी सबेतरन सूत्र (9.31) के स्वरूप है।

उदाहरण 9.13 : हैजे द्वारा महामारी के समय लिये गये एक गाँव के आँकड़ों को निम्न सारणी में प्रदर्शित किया गया है।

	हैजे से पीड़ित	हैजे से पीड़ित नहीं	योग
टीका लगा था	3	47	50
टीका नहीं लगा था	18	132	150
योग	21	179	200

यदि परिवर्तना H_0 (कि हैजे के रोग को रोकने में टीका प्रभावी नहीं है) की परीक्षा करनी है तो X^2 -परीक्षा का प्रयोग करना उचित है, किन्तु यहाँ एक कोष्ठिका की बारम्बारता केवल 3 है अतः येल्स शुद्धि का प्रयोग करना या बैकल्पिक सूत्र (9.32) का प्रयोग करना आवश्यक है। यहाँ दोनों का प्रयोग करके परीक्षा करने की विधि दिखायी गयी है। इसके द्वारा पाठकों को यह भी ज्ञात हो जायेगा कि ये दोनों विधियाँ एक ही सूत्र के दो रूप हैं।

येल्स शुद्धि द्वारा, सारणी में 0.5 को 3 में जोड़कर व 18 से घटाकर और 47 में 0.5 जोड़कर व 132 में से 0.5 घटाने पर सारणी का रूप निम्नांकित होता जाता है।

	हैजे से पीड़ित	हैजे से पीड़ित नहीं	योग
टीका लगा था	3.5	46.5	50
टीका नहीं लगा था	17.5	132.5	150
योग	21	179	200

सूत्र (9 26) द्वारा,

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{200(132.5 \times 3.5 - 46.5 \times 17.5)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times 350 \times 350}{28192500} \\ &= 869 \end{aligned}$$

वैकल्पिक सूत्र (9 32) द्वारा,

$$\begin{aligned} &= \frac{200 \left(|13 \times 132 - 18 \times 47| - \frac{200}{2} \right)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 (|-450| - 100)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times 350 \times 350}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{24500000}{28192500} \\ &= 869 \end{aligned}$$

उपर्युक्त परिकल्पना में स्पष्ट है कि दोनो विनियमों द्वारा प्राप्त X^2 के मान समान हैं। सारणी (परि० प-4) द्वारा $\alpha = 5$ और 1 स्व० को० के लिए $X_1^2 = 3.84$ है क्योंकि $X^2 < X_1^2$ है, H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इसमें यह निष्कर्ष निकलता है कि हैजे में पीछित होने का टीका लगाने में कोई सम्बन्ध नहीं है।

डांडेकर-शुद्धि

इस शुद्धि को वी० एम० डांडेकर (V M Dandekar) ने सुझाया। इसके चलते तीन विभिन्न X^2 के मान X_0^2 , X_{-1}^2 , और X_1^2 दी हुई (2×2) सामग्री सारणी द्वारा जान करले होते हैं। X_0^2 का मान दी हुई सारणी में, X_{-1}^2 का मान सामग्री सारणी की न्यूनतम बारम्बारता में एक जोड़ कर और X_1^2 का मान न्यूनतम बारम्बारता में से एक परिवर्तन और अन्य कोष्ठित बारम्बारताओं में समायोजन (adjustment) इस प्रकार करते हैं कि उपांत भोगों में कोई अन्तर न पड़े। इन X_0^2 , X_{-1}^2 , X_1^2 के मान निम्न सूत्र में रणकर, बार्ड-वर्ग के शुद्ध मान X_c^2 को जान कर लिया जाता है।

$$X_c^2 = X_0^2 - \frac{X_0^2 - X_{-1}^2}{X_1^2 - X_{-1}^2} (X_1^2 - X_0^2) \quad \dots (9 33)$$

साधारणतया डाइकेर शुद्धि, येट्म शुद्धि की अपेक्षा अच्छी है। किन्तु, इसको परिकलित करना बठिन है क्योंकि इसमें तीन विभिन्न X^2 -मानों को परिकलित करना होता है। यही कारण है कि यह अधिक चयन में नहीं है।

उदाहरण 9.14 : उदाहरण (9.12) के लिए ही डाइकेर शुद्धि द्वारा X^2 का शुद्ध मान X_0^2 ज्ञात करके परिकल्पना की परीक्षा की गयी है।

$$\begin{aligned} X_0^2 &= \frac{200 (132 \times 3 - 18 \times 47)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times (396 - 846)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times 450 \times 450}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= 1.4366 \end{aligned}$$

X_{-1}^2 ज्ञात करने के लिए बारम्बारता 3 में 1 जोड़ कर तथा मारणी में समायोजन करके निम्न रूप में लिखना होता है —

	पीहित	पीहित नहीं	योग
टीका लगा	4	46	50
टीका नहीं लगा	17	133	150
योग	21	179	200

$$\begin{aligned} X_{-1}^2 &= \frac{200 (133 \times 4 - 17 \times 46)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{12500000}{28192500} \\ &= .4434 \end{aligned}$$

इसी प्रकार X_1^2 के लिए बार० 3 में से 1 घटाकर तथा मारणी में समायोजन करने निम्न रूप में लिखना होता है —

	पीहित	पीहित नहीं	योग
टीका लगा	2	48	50
टीका नहीं लगा	19	131	150
योग	21	179	200

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{200 (131 \times 2 - 19 \times 48)^2}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{200 \times 650 \times 650}{50 \times 150 \times 21 \times 179} \\ &= \frac{84500000}{28192500} \\ &= 29973 \end{aligned}$$

सूत्र (9.33) द्वारा,

$$\begin{aligned} x_0^2 &= 1.4366 - \frac{1.4366 - 4434}{29973 - 4434} (29973 - 1.4366) \\ &= 1.4366 - \frac{9932}{25539} \times 15607 \\ &= 1.4366 - .6070 \\ &= .8296 \end{aligned}$$

यहाँ भी वही निष्कर्ष निकलता है जो उदाहरण (9.12) में दिया गया है।

K-वर्गों की हिपति में χ^2 -परीक्षा

यह आवश्यक नहीं है कि बारम्बारता सदैव एक घासग सारणी में दी जाय। यदि किसी अभिलक्षण या काल के k वर्ग हैं और उनमें किसी प्रयोग या परीक्षण द्वारा प्राप्त बारम्बारताएँ क्रमशः $O_1, O_2, O_3, \dots, O_k$ हैं, एवम्

यदि सरल परिकल्पना H_0 , (जि किसी पूर्व जानकारी या मिदाल के अनुसार वे बारम्बारताएँ k वर्गों में $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ अनुपात में पटित होती हैं) की χ^2 -परीक्षा करनी होती है और मानते कि प्रेषित बारम्बारताओं का योग, n है,

$$\text{जहाँ } O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_k = n$$

तो प्रतिदर्श परिणाम n को दिये हुए अनुपात में विभाजित कर लिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त सन्नुसार बारम्बारताएँ ही सैदायितक बारम्बारताएँ होती हैं जो कि क्रमशः $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ हैं।

$$\text{माना कि } r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_k = r$$

$$\text{तो } E_i = \frac{n}{r} \times r_i \quad \dots (9.34)$$

$$\text{जबकि } i = 1, 2, 3, \dots, k$$

इस मानने से कि प्रत्येक $(O_i - E_i)^2 / E_i$ में χ^2 का मान प्राप्त होना है जिसकी स्म०

को 1 है। इस प्रकार k वर्गों की स्थिति में हम χ^2 का परिवर्तन कर लेते हैं जबकि

$$\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \dots + \chi_k^2$$

यहाँ χ^2 में केवल $(k-1)$ स्वतन्त्र प्राचल हैं अतः χ^2 की स्व० को० $(k-1)$ है। इस स्थिति में χ^2 के लिए सूत्र (9.23) दिया जा चुका है। अतः

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

परिवर्तित χ^2 की पूर्वं निर्धारित α मा० स्न० व $(k-1)$ स्व० कोटि के लिए सारणी-बद्ध χ^2 से तुलना करके नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.15 क्रोमेटिड में द्विघामकरण (double cross) के घन्तर्गन दो बलयक (strand), तीन बलयक व चार बलयक में अनुपात 1 : 2 : 1 होने का अनुमान किया जाता है। एक नये सकरण प्रयोग द्वारा द्विघा-विन्मयी संख्या (number of double exchanges) दो, तीन व चार बलयक के लिए क्रमशः 25, 32 और 14 पायी गयी।

परिकल्पना H_0 (कि ये संख्याएँ अनुमानित अनुपात का अनुमोदन करती हैं) की परीक्षा प्रतिदर्शज χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

$$\text{यहाँ } n = 25 + 32 + 14 = 71 \quad \text{और } r = 4$$

$$\text{प्रेक्षित संख्या } 25, 32, 14$$

$$\text{सैद्धान्तिक संख्या } 17.75, 35.50, 17.75$$

$$\therefore E_1 = \frac{1}{4} \times 71 = 17.75, E_2 = \frac{2}{4} \times 71 = 35.5, E_3 = \frac{1}{4} \times 71 = 17.75$$

सूत्र (9.23) की सहायता से,

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(25 - 17.75)^2}{17.75} + \frac{(32 - 35.5)^2}{35.5} + \frac{(14 - 17.75)^2}{17.75} \\ &= \frac{52.56}{17.75} + \frac{12.25}{35.5} + \frac{14.06}{17.75} \\ &= 2.961 + 345 + 792 \\ &= 4.098 \end{aligned}$$

सारणी (परि० घ-4) द्वारा $\alpha = 0.05$ और स्व० को० 2 के लिए $\chi_{0.05}^2 = 5.991$ जो कि 4.098 से अधिक है। अतः H_0 स्वीकृत है। इसका अभिप्राय यह है कि प्रेक्षित संख्याएँ अनुमानित अनुपात का अनुमोदन करती हैं।

दो वर्गों की स्थिति में χ^2 -परीक्षा

उपरोक्त विधि का प्रयोग इस स्थिति में भी किया जा सकता है। किन्तु इस विशेष स्थिति में χ^2 का परिवर्तन बिना सैद्धान्तिक बारम्बारता ज्ञात किये निम्न सूत्र द्वारा सुगमता से किया जा सकता है। इस स्थिति में χ^2 की स्व० को० 1 होती है।

यदि दो वर्गों में प्रेषित आरम्भारत्नाएँ a और b हैं और उनमें परिवर्तनात्तरक अनुपात $r : 1$ हो तो,

$$\chi^2 = \frac{(a - rb)^2}{r(a+b)} \quad \dots (9.35)$$

यहाँ χ^2 की स्व० को० 1 है।

यह आशयक नहीं है कि सदैव कल्पनात्तरक अनुपात $r = 1$ के रूप में ही दिया जाय, यह $r_1 : r_2$ के रूप में भी बहुधा दिया जाता है। इस स्थिति में r_2 में भाग करने अनुपात

को $\frac{r_1}{r_2} : 1$ के रूप में मश परिवर्तित किया जा सकता है। यहाँ $r = \frac{r_1}{r_2}$ के है।

परिवर्तित χ^2 की, 1 स्व० को० व α सा० स्त० पर सारणीबद्ध χ^2 से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 9.16 : मूँगफली (Peanut) बीजों द्वारा नियोजन के अन्तर्गत सामान्य वृद्धि प्रवृत्ति (normal growth habits) और कष्प तणु प्रवृत्ति (sterile brachytic habits) में अनुपात 15 : 1 होने का अनुमान लगाया जाता है। प्रयोग करने पर सामान्य और तणु प्रवृत्ति के लिए क्रमशः संख्याएँ 5,388 और 295 प्राप्त हुईं तो परिवर्तना H_0 (कि प्रेषित संख्याएँ 15 : 1 अनुपात का समर्थन करती हैं) की परीक्षा χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं।

सूत्र (9.35) द्वारा,

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(5388 - 15 \times 295)^2}{15(5388 + 295)} \\ &= \frac{(963)^2}{15 \times 5683} \\ &= 10.87 \end{aligned}$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा $\alpha = 0.1$ और 1 स्व० को० के लिए $\chi_{1, 0.1}^2 = 6.63$ $\chi^2 > \chi_{1, 0.1}^2$, अतः नये धाँकड़े 15 : 1 अनुपात का समर्थन नहीं करते हैं।

आसंग-गुणांक

यदि किसी $(p \times q)$ आसंग सारणी में बारको की स्वतन्त्रता की परीक्षा करने पर, स्वतन्त्रता के प्रति परिवर्तना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है तो हमसे यह निष्कर्ष निकाला जाता है कि बारक या घमिनसण एक दूसरे पर आश्रित हैं। किन्तु हमसे उनकी पराश्रयता की मात्रा का पता नहीं चलता। इस पराश्रयता की मात्रा का माप करने के लिए आसंग गुणांक C का परिवर्तन करना होता है जबकि

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \quad \dots (9.36)$$

यहाँ χ^2 किसी भी आसग सारणी के लिए परिवर्तित मान है और n प्रेक्षित बार-बारताओं का योग अर्थात् प्रतिदर्श परिमाण है।

C का न्यूनतम मान शून्य होता है जबकि $\chi^2 = 0$ हो और अधिकतम मान 1 के समिकट हो सकता है जो कि 1 से सदैव कम है यदि C का मान 5 से अधिक हो तो कारको या अभिलक्षणा में पराश्रयता अधिक ममभी जाती है और C का मान 0.5 से कम हो तो पराश्रयता अल्प ममभी जाती है।

इस पराश्रयता माप का लाभ यह है कि उसम चर के बटन के प्रति कल्पना नहीं करनी पड़ती। चाहे बटन सतत हो या अमतत, आसग-गुणाक स्वीकार करने योग्य है।

सूत्र (9.36) से स्पष्ट है कि C का मान n पर निर्भर है। अतः दो आसग गुणाको की तुलना करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रतिदर्श परिमाण समान हो।

आसग गुणाक C का परिकलन तभी करना चाहिये जबकि χ^2 -परीक्षा द्वारा कारको की पराश्रयता के प्रति परिकल्पना को स्वीकार किया गया हो अन्यथा C का मान ज्ञात करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 9.17 उदाहरण (9.10) में H_0 को अस्वीकार किया गया है।

$$\text{वहाँ } \chi^2 = 8.855, \quad n = 300 \text{ है।}$$

अतः पराश्रयता का परिमाण जानने के लिए आसग-गुणाक ज्ञात करना आवश्यक है। सूत्र (9.36) द्वारा,

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{8.855}{300 + 8.855}} \\ &= \sqrt{\frac{8.855}{308.855}} \\ &= \sqrt{0.0287} \\ &= 0.17 \end{aligned}$$

C का मान अल्प है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि रहने के स्थान व पेस्टीमाइड उद्योग के प्रति अभिवृत्ति में अल्प सम्बन्ध है।

समंजन-सुष्ठुता की परीक्षा

एक विचाराधीन चर का कोई विशेष बटन होने की कल्पना बटुपा की जाती है। जैसे प्रायः यह मान लिया जाता है कि प्रतिदर्श का चयन प्रसामान्य समग्र से किया गया है। किन्तु इस अभिधारणा की वैधता सदेहपूर्ण है। अतः इसकी पुष्टि χ^2 -परीक्षा द्वारा की जाती है जिसकी विधि निम्न प्रकार है —

परीक्षा के हेतु प्रेक्षित मानों O और उनके तदनुसार प्रत्याशित मानों E को ज्ञात करना होता है। प्रत्याशित मान कल्पित बटन को प्रयोग करके ज्ञात किये जाते हैं। इन मानों O व E को सूत्र (9.23) में रखकर χ^2 के मान का परिकलन कर लिया जाता

है। यहाँ X^2 की स्व० को० $(k-m-1)$ होती है, जहाँ k वर्गों की संख्या है और m उन प्राचलों की संख्या है जिनका प्रतिदर्श द्वारा आगणन किया गया है। जैसे प्रसामान्य बंटन की अभिधारणा की वंघता की परीक्षा करने में यदि μ व σ का आगणन \bar{X} और s^2 में होगा और इस स्थिति में X^2 की स्व० को० $(k-3)$ होगी। यदि प्वासो बंटन की वंघता की परीक्षा करनी है तो X^2 की स्व० को० $(k-2)$ होगा क्योंकि इस बंटन में एक ही प्राचल का आगणन करना होता है। इसी प्रकार किसी भी अन्य कल्पित बंटन के लिए X^2 की स्व० को० ज्ञात कर सकते हैं।

परिवर्तित X^2 का α सायंकता स्तर व $(k-m-1)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध X^2 से तुलना करके निर्णय कर लिया जाता है कि प्रेक्षण कल्पित बंटन वाले समग्र से है या नहीं। इस विधि के प्रयोग को निम्नांकित उदाहरण द्वारा दिखाया गया है —

उदाहरण 9.18 एक 200 पृष्ठों की पुस्तक में अक्षुद्धियों की संख्या और तदनुसार पृष्ठों की संख्या इस प्रकार थी —

अक्षुद्धियाँ (x)	पृष्ठों की संख्या (f)	(fx)
0	65	00
1	45	45
2	47	94
3	28	84
4	10	40
5	5	25
योग	200	288

यह देखने के लिए कि यह बंटन प्वासो-बंटन का पालन करता है, समग्र-मुष्टुना की परीक्षा करनी है जो इस प्रकार है —

$$\text{इस बंटन का माध्य } m = \frac{288}{200} = 1.44$$

हम जानते हैं कि प्वासो बंटन के लिए r संभवताओं की प्रायिकता,

$$P(r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

और $(r+1)$ संभवताओं की प्रायिकता,

$$P(r+1) = \frac{e^{-m} m^{r+1}}{(r+1)!}$$

$$\therefore \frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{m^{r+1}}{(r+1)!} \times \frac{r!}{m^r}$$

$$\text{या } P(r+1) = \frac{m}{r+1} P(r)$$

सफलताओं की प्रायिकता को प्रतिदर्श परिमाण n से गुणा करने पर प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात हो जाती है।

$$\text{यहाँ } P(0) = e^{-m}$$

$$P(1) = m \times P(0)$$

$$P(2) = \frac{m}{2} \times P(1)$$

$$P(3) = \frac{m}{3} \times P(2)$$

उपर्युक्त सूत्रों एवं सम्बन्धों की सहायता से प्रत्याशित बारम्बारता ज्ञात की गयी है :-

$$P(0) = e^{-m} = e^{-1.44}$$

$$\text{माना कि } y = e^{-1.44}$$

$$\log_e y = -1.44$$

$$\log_{10} y = \frac{-1.44}{2.3026} \quad (\because \log_e 10 = 2.3026)$$

$$\therefore \log_{10} y = -0.62538$$

$$= \bar{1}.37462$$

$$y = 0.237 \quad \text{या } P(0) = 0.237$$

$$E_1 = P(0).n = 0.237 \times 200 = 47.4$$

$$E_2 = P(1).n = m.n.P(0) = m.E_1 = 68.3$$

$$E_3 = P(2).n = \frac{m}{2}.P(1).n = \frac{m}{2}.E_2 = 49.2$$

$$E_4 = P(3).n = \frac{m}{3}.P(2).n = \frac{m}{3}.E_3 = 23.6$$

$$E_6 = P(4), n = \frac{m}{4} \quad P(3) \quad n = \frac{m}{4} \quad E_4 = 8.5$$

$$E_6 = P(5) \quad n = \frac{m}{5} \quad P(4) \quad n = \frac{m}{5} \quad E_6 = 2.4$$

प्रेक्षित तथा प्रत्याशित बारम्बारताएँ ज्ञात होने के पश्चात् च्वासो-बटन के समजन की χ^2 -परीक्षा कर सकते हैं।

O_i	E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2/E_i$
65	47.4	17.6	6.53
45	68.3	23.3	7.94
47	49.2	2.2	0.09
28	23.6	4.4	0.82
10	8.5	4.1	1.56
5	2.4		
योग			16.94

उपयुक्त सारणी में प्रतिम पक्ति की बारम्बारताओं को पाँचवी पक्ति में इस कारण जोड़ दिया गया है कि प्रतिम प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम है। इस प्रकार यहाँ $K=5$ है और χ^2 की स्व. को. 3 है।

5 प्रतिशत साध्यता स्तर व 3 स्व. को. के लिए χ^2 का सारणी (परि. प-4) द्वारा प्राप्त मान 7.815 है जो कि χ^2 के परिकल्पित मान 16.94 से कम है। अतः परिकल्पना, कि दिया हुआ बटन च्वासो-बटन है अस्वीकृत है।

टिप्पणी (1) ऊपर सारणी में प्रत्याशित बारम्बारता का योग 200 के कुछ कम है। यह अंतर प्रत्याशित बारम्बारताओं के निवटन के कारण है। किन्तु यह परीक्षा की दृष्टि से उपेक्षणीय है।

(2) यदि किसी वर्ग की प्रत्याशित बारम्बारता 5 से कम हो तो χ^2 -बटन के सारण्य को बढ़ाकर रखने के लिए इस वर्ग को किसी अन्य वर्ग में मिला देते हैं जिनमें कि ऐसा करना उचित हो और साथ ही प्रत्याशित बारम्बारता 5 या 5 से अधिक हो जाती हो।

प्रसामान्य समग्र के लिए $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ की परीक्षा

माना कि एक प्रसामान्य समग्र से n परिमाण के प्रतिमों के प्रतिमों का चयन किया गया है और इन चयनित एकों पर प्रतिम प्रयोग $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ है। इन प्रयोगों

के आधार पर परिकल्पना $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ की $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा प्रति-
दर्शज χ^2 द्वारा की जाती है, जहाँ σ_0^2 एक ज्ञान मूल्य मान होता है।

α पायकता स्तर पर परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है यदि असमिका

$$\chi^2(\alpha/2) (n-1) < \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2(1-\alpha/2)(n-1) \quad \dots (9.37)$$

सत्य हो और जहाँ χ^2 की मूल्य को $(n-1)$ हो।

अन्यथा H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

प्रसामान्य समग्र के लिए $H_0 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ की $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए परीक्षा निकष निम्नान्वित होता है — यहाँ अभी सकेतन ऊपर दिये वर्णन के अनुरूप हैं।

H_0 को अस्वीकार कर लिया जाता है यदि असमिका

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2(1-\alpha) (n-1) \quad \dots (9.38)$$

सत्य हो। अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

इसी प्रकार $H_0 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ की $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए निकष निम्न प्रकार है —

H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है कि यदि असमिका

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / \sigma_0^2 < \chi^2(\alpha) (n-1) \quad \dots (9.39)$$

सत्य हो।

अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यह अध्याय 7 में दिया जा चुका है कि $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ का χ^2 -वर्णन होता है। इसी तथ्य का ऊपर परिकल्पना परीक्षा में उपयोग किया गया है।

एक प्रसामान्य बंटन के प्रसरण σ^2 का विश्वास्यता अन्तराल

प्रायः समग्र में परिवर्तित जानने के लिए प्रतिदर्श द्वारा σ^2 के प्रागणक s^2 का परिकल्पना करना होता है। समग्र माध्य की भाँति, समय-प्रसरण ' σ^2 ' के विश्वास्यता अन्तराल को भी ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। प्रसामान्य समग्र की स्थिति में प्रतिदर्शज χ^2 की सहायता से इनका परिकल्पना किया जाता है।

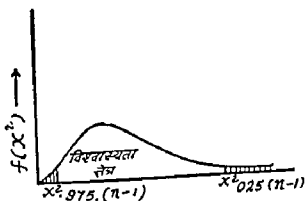
माना कि प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं और इनके द्वारा परिकल्पित प्रसरण s^2 है जहाँ,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$$

यदि 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है तो सचयी कार्ड-वर्ग बटन सारणी में राशि $\chi^2_{.975}$ और $\chi^2_{.025}$ ज्ञात कर लेते हैं क्योंकि χ^2 के कोई मान की, जिसका यादृच्छिक प्रतिदर्श से परिकलन किया गया हो, इन दो सीमाओं के मन्दर होने की प्रायिकता = $.975 - .025 = .95$ है।

अतः σ^2 का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं -

$$\chi^2_{.975} \leq \frac{(n-1)s^2}{2} \leq \chi^2_{.025}$$



चित्र 9.4 .95 विश्वास्यता क्षेत्र को प्रदर्शित करता हुआ कार्ड-वर्ग बटन वक्र।

यहाँ χ^2 की स्व० को० $(n-1)$ है और $\chi^2_{.975}$ में 975 और $\chi^2_{.025}$ में 025, क्रम में मुजा अक्ष पर बिन्दुओं की कोटि के दायी ओर का क्षेत्र है जैसा कि चित्र (9-4) में दिखाया गया है।

$$\chi^2_{.975} < \frac{\sum X_i^2}{\sigma^2} < \chi^2_{.025}$$

जबकि $(n-1)s^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$

$$\text{या } \frac{\sum X_i^2}{\chi^2_{.025}} < \sigma^2 < \frac{\sum X_i^2}{\chi^2_{.975}} \quad \dots (9.40)$$

यदि किसी अन्य प्रतिशत के लिए विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना हो तो χ^2 के मान उसी के अनुसार सारणी द्वारा ज्ञात करने (9.40) के समरूप सूत्र निम्नरूप ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 9.20 . चारह वर्ष की आयु के बच्चों की ऊँचाई में समग्र प्रसरण का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है ।

$$\text{जबकि } \sum_i X_i = 721100 \text{ सें. मी.}, \quad \sum_i X_i^2 = 98414850$$

और $n=53$ ज्ञात है । (यहाँ चर X ऊँचाई को निरूपित करता है और प्रतिदर्श परिमाण n है)

$$\begin{aligned} \sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i)^2}{n} &= 98414850 - \frac{(721100)^2}{53} \\ &= 30443302 \end{aligned}$$

विश्वास्यता अन्तराल के लिए,

$$\frac{30443302}{738} < \sigma^2 < \frac{30443302}{340}$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा,

$$\chi^2(0.25)(52) = 73.8 \quad \text{और} \quad \chi^2(0.975)(52) = 34.0$$

अतः $41.25 < \sigma^2 < 89.54$

ऊपर दी हुई असमिका से स्पष्ट है कि σ^2 की 95 प्रतिशत सा० स्त० ५०, उपरि सीमा 89.54 और निम्न सीमा 41.25 है ।

दो प्रसामान्य समग्रों के प्रसरणों की समानता की परीक्षा

माना कि दोनो प्रसामान्य समग्रों में से स्वतंत्र एक यादृच्छिक प्रतिदर्शों का अध्ययन किया जाता है जिनके परिमाण क्रमशः n_1 और n_2 हैं । इन प्रतिदर्शों के प्रेक्षण निम्नांकित हैं -

प्रतिदर्श 1

X_{11}

X_{12}

X_{13}

\vdots

X_{1n_1}

प्रतिदर्श 2

X_{21}

X_{22}

X_{23}

\vdots

X_{2n_2}

यहाँ प्रेक्षणों X_{ij} में अनुक्रम 1 प्रतिदर्श सख्या और j प्रेक्षण सख्या को निरूपित करता है ।

इन प्रतिदर्शों का अलग-अलग प्रसरण निम्न सूत्रों द्वारा परिवर्तित कर लिया जाता है । माना कि पहले प्रतिदर्श का प्रसरण s_1^2 और दूसरे का s_2^2 है, जबकि

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 - \frac{(\sum X_{1i})^2}{n_1} \right\}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}^2 - \frac{(\sum X_{2j})^2}{n_2} \right\}$$

यह प्रध्याय 6 में बताया जा चुका है कि दो प्रसरण के अनुपात का बटन F होता है अतः

$H_0 \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ को $H_1 \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा, F-परीक्षा द्वारा करते हैं। जबकि

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (9.41)$$

प्रतिदर्शज (9.41) में बड़े प्रतिदर्श प्रसरण को s_1^2 लिया जाता है।

यदि परिकल्पित F-मान α सां. स्तं. व (ν_1, ν_2) स्व. को $\{$ जबकि $\nu_1 = (n_1 - 1)$ और $\nu_2 = (n_2 - 1)$ $\}$ के लिए $F(\alpha/2) (\nu_1, \nu_2)$ से बड़ा हो, तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और यदि कम हो तो स्वीकार कर लिया जाता है। इसी प्रकार यदि परिकल्पित-F का मान सारणीबद्ध $F(1 - \alpha/2) (\nu_1, \nu_2)$ से कम हो तो H_0 को

अस्वीकार कर दिया जाता है।

यदि $H_0 \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ को $H_1 \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ के विरुद्ध करनी हो तो प्रतिदर्शज F का ही प्रयोग करना होता है किंतु इस स्थिति में परीक्षा एक पुच्छ परीक्षा है।

यदि परिकल्पित $F < F(1 - \alpha) (\nu_1, \nu_2)$ हो तो H_0 अस्वीकृत है।

इसी प्रकार $H_0 \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ को $H_1 \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए एक पुच्छ F-परीक्षा करनी होती है।

यदि परिकल्पित $F > F(\alpha) (\nu_1, \nu_2)$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

उपहरण 9.20 सात वर्ष की आयु के 67 बच्चों के और आठ वर्ष की आयु के 100 बच्चों के सिरों की परिधि सेंटीमीटर में नापी गयी और परिवर्तन करने पर इन प्रतिदर्शों के प्रसरण क्रमशः 3.12 और 3.02 प्राप्त हुए।

परीकल्पना कि सात वर्ष व आठ वर्ष की आयु के बच्चों के सिर की परिधि के प्रसरण समान हैं।

यहाँ $H_0 \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ को $H_1 \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सूत्र (9.40) के अनुसार,

$$F = \frac{3.12}{3.02} = 1.033$$

यहाँ H_0 की दो-पुच्छ परीक्षा करनी होगी। माना कि 10 प्रतिशत सापेक्षता स्तर पर परीक्षा करनी है यहाँ $\nu_1=66$ और $\nu_2=99$ है।

सारणी (परि० घ-5.2) द्वारा $F(05)(66, 99)=1.47$ है। यह मान परिकलित F के मान से अधिक है अतः H_0 स्वीकृत है।

यदि $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ को $H_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी हो तो एक पुच्छ F -परीक्षा करना होगा। इसके लिए $F(90)(66, 99)=0.733$ है। यह मान परिकलित F के मान से कम है। अतः H_0 स्वीकृत है।

दो से अधिक प्रसामान्य समूहों के प्रसरणों की सजातीयता की परीक्षा

माना कि k समूह हैं और इनके प्रसरणों की समानता के हेतु परिकल्पना,

$$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\dots=\sigma_k^2$$

को, H_1 : (कि कम से कम कोई दो प्रसरण असमान हैं) के विरुद्ध परीक्षा करनी है जबकि

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \dots, \sigma_k^2$$

समूहों के क्रमशः प्रसरण हैं। यहाँ $k>2$ होना आवश्यक है क्योंकि यदि $k=2$ है तो H_0 की F -परीक्षा करना उचित है। H_0 की परीक्षा विभिन्न रीतियों द्वारा की जा सकती है किन्तु यहाँ केवल बार्टलेट (Bartlett) की विधि का ही वर्णन किया गया है।

बार्टलेट-परीक्षा

माना कि k समूहों में से k स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया गया है जिनके परिमाण क्रमशः $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ हैं और इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकलित किसी चर X के प्रसरण क्रमशः $s_1^2, s_2^2, s_3^2, \dots, s_k^2$ हैं।

H_0 की परीक्षा के हेतु प्रतिदर्शों X^2 निर्भन्नांकित होता है —

$$X^2_{k-1} = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot \log_e \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log s_i^2 \dots (9.42)$$

जबकि

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \left\{ \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2 \right\} \dots (9.43)$$

सूत्र (9.42) द्वारा प्राप्त X^2 के परिवर्तन को सुगम बनाने के लिए लघुगणक (\log) को आधार 10 के प्रति लेना चाहिये और इस प्रकार जो मान प्राप्त हो उसको $\log_e 10$ अर्थात् 2.3026 से गुणा कर देना चाहिये जिससे X^2 का मान आधार e के प्रति प्राप्त हो जाता है। (आधार परिवर्तन के लिए परिशिष्ट (ख-6) को पढ़िए)।

सूत्र (9.42) द्वारा प्राप्त χ^2 का मान कुछ अभिन्नत होता है और कुछ ऊर्ध्व-मुत्ती होता है। घत χ^2 का शुद्ध मान ज्ञात करने के लिए χ^2 में संशोधन करना होता है। χ^2 को एक संशोधन कारक (correction factor) C से भंग दे दिया जाता है।

जबकि

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{\sum (n_i-1)} \right\} \quad (9.44)$$

यदि $\frac{\chi^2}{C}$ का मान माफणोवद $\chi^2_{\alpha, k-1}$ से बड़ा हा तो H_0 को घरवीकार करना

होता है। इसका अर्थ है कि k प्रसरणो से कम से कम कोई दो प्रसरण एक दूसरे से सांशंक रूप मे भिन्न है। यदि $\chi^2 < \chi^2_{\alpha, k-1}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया

जाता है। इसका अभिप्राय है कि k प्रसरण सजातीय है।

उदाहरण 9.21 एक लाक्षणिक सर्वेक्षण के अन्तर्गत विभिन्न आयु के बच्चों के भारों मे प्रसरण और प्रतिदर्श परिमाण निम्नांकित थे —

आयु	प्रतिदर्श परिमाण	प्रतिदर्श प्रसरण	प्रसरण के अनुपात
5 वर्ष	54	4.72	674
6 „	102	4.27	630
7 „	77	7.23	859
8 „	100	7.67	885
9 „	75	7.23	859
10 „	81	11.68	1067

परिकल्पना H_0 कि 5 से 10 वर्ष तक की आयु के बच्चों के भारों मे समान विचलन होता है अर्थात्

$$H_0 \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2 = \sigma_6^2$$

की, H_1 (कम से कम कोई दो प्रसरण असमान है) के विरुद्ध परीक्षा, बार्ट्नेट-परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

सूत्र (9.43) द्वारा,

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{483} (53 \times 4.72 + 101 \times 4.27 + \dots + 80 \times 11.68)$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{483} (3459.66)$$

$$= 7.162$$

सूत्र (9.42) द्वारा,

$$\chi^2 = \{483 \log_{10} 7.162 - (53 \times .674 + 101 \times .630 + 80 \times 1.067) \times 2.3026\}$$

$$= (483 \times 0.855 - 401.177) \times 2.3026 = 11.788$$

सूत्र (9.44) द्वारा,

$$C = 1 + \frac{1}{3 \times 5} (0.780 - .00207) = 1 + \frac{.07593}{15}$$

$$= 1.00506$$

$$\text{संशोधित } \chi^2 = \frac{11.788}{1.00506} = 11.728$$

सारणी (परि० घ-4) द्वारा $\alpha = .05$ सा० स्त० तथा 5 स्व० को० पर χ^2 का मान 11.7 है। परिकल्पित χ^2 , सारणीबद्ध χ^2 के मान से अधिक है। अतः परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जात है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि कम से कम कोई दो प्रसरण एक दूसरे के समान नहीं हैं अर्थात् H_1 स्वीकृत है।

प्रश्नावली

- रेनाड-फिनामना (Raynaud's Phenomenon : RP) की व्यापकता घूमपान करने वालों और नहीं करने वालों में निम्न सारणी में दी गयी है :—

RP की व्यापकता

श्रमिक	घूमपान करने वाले	घूमपान न करने वाले
मशीन पर काम करने वाले	49	42
जंगलों में मशीन पर काम करने वाले	19	5
घरेलू	9	9

तो इस परिकल्पना की परीक्षा कीजिये कि श्रमिकों के प्रकार और घूमपान करने वालों में (RP) की व्यापकता की दृष्टि से कोई सम्बन्ध नहीं है ?

2. एक अस्पताल में वर्ष के विभिन्न महीनों में बच्चों के जन्मने की संख्या इस प्रकार है :—

महीना :	जनवरी,	फरवरी,	मार्च,	अप्रैल,	मई	जून
जन्मने की संख्या	132	119	123	101	107	90
	जुलाई,	अगस्त,	सितम्बर,	अक्टूबर,	नवम्बर,	दिसम्बर,
	115	113	139	136	137	146

परीक्षा कीजिये कि वर्ष के विभिन्न महीनों में जन्मने की संख्या समान रूप से वित्त है ?

3. दो शोधनों का अलूचे पर प्रभाव देखने के लिए प्रयोग किया गया। इस प्रकार प्रति फेड द्वारा प्राप्त अलूचों को सुखाने पर निम्न मात्राएँ प्राप्त हुयी।

शोधन A (चार किलोग्राम में)	शोधन B (चार किलोग्राम में)
31.3	25.4
32.1	14.1
42.0	40.0
48.0	34.3
68.8	37.3
48.0	40.6
45.8	28.6
32.1	11.1

परीक्षा कीजिये कि दोनों शोधनों के माध्य प्रभाव में सार्थक अंतर है या नहीं,

4. सिद्ध कीजिये कि एक $(2 \times n)$ प्रश्न की आगम गारणी के लिए

$$\chi^2 = \sum_r N_1 N_2 \frac{\left(\frac{a_{1r}}{N_1} - \frac{a_{2r}}{N_2} \right)^2}{\frac{a_{1r}}{N_1} + \frac{a_{2r}}{N_2}}$$

जब कि a_{1r} और a_{2r} r वें स्तम्भ में बारम्बारताएँ हैं और N_1 व N_2 दोनों पंक्तियों की बारम्बारताओं का योग है.

(आगरा, 1953)

5. बम्बई की 98 कपड़ा मितों के सन्निवेश द्वारा प्राप्त एक वर्ष में दुपेटनाओं की संख्या निम्न प्रकार थी.—

वर्ष में दुर्घटनाओं की संख्या	0	1	2	3	4
मिलों की संख्या	24	38	22	11	3

(1) इस न्यास में प्वासों वटन का समान कीजिये ।

(बम्बई, 1966)

- 6 एक समूह के निम्नांकित धायु वटन की प्रमाणात्मक वटन में, ममजन सुष्ठुता की परीक्षा कीजिये —

धायु (वर्षों में)	घटियों की संख्या
10 — 20	3
20 — 30	8
30 — 40	14
40 — 50	21
50 — 60	7
60 — 70	6
70 — 80	2
80 — 90	1

7. एक महाविद्यालय के जलपान-गृह से प्रति दिन जाने वालों की संख्या 500 में से 350 थी । किन्तु कुछ समय पश्चात् दरों में लगभग दूनी वृद्धि कर दी गयी । अब प्रति दिन जाने वालों की संख्या 250 रह गयी । परीक्षा कीजिये कि जल पान करने वालों के अनुपात में सार्थक कमी है या नहीं ।
- 8 एक विशेष प्रकार के घागे के 50 टुकड़ों के प्रतिदर्श की परीक्षा की गयी । इन घागों की माध्य टूटने की सामर्थ्य 14.5 पौंड थी । परीक्षा कीजिये कि यह घागों का प्रतिदर्श उस समग्र से है जिसकी माध्य टूटने की शक्ति 15.6 पौंड और मानक विचलन 2.2 पौंड है ।

(कलकत्ता, 1963)

- 9 एक किसान एक सस्य को दो खेतों A व B में उगाता है । खेत A में दम रुपये प्रति एकड़ और खेत B में बीस रुपये प्रति एकड़ खर्च डालता है । दोनों खेतों का पिछले पाँच वर्षों का शुद्ध प्रतिफल इस प्रकार था —

वर्ष	1	2	3	4	5
खेत A (रुपये प्रति एकड़)	34	28	42	37	38
खेत B (रुपये प्रति एकड़)	36	33	48	38	50

यदि अन्य बातें समान हों, तो बताइये कि क्या इन दो खाद पर प्रतिक्रिया व्यक्त करना लाभप्रद है या नहीं।

(पंजाब 1966)

(उत्तर $t=3.814$, है।)

10. छ चयनकृत मल्लाहों की ऊँचाई 66", 67", 68", 69", 71", 72" है। दस चयनकृत सिपाहियों की ऊँचाई 61", 62", 65", 66", 69", 70", 71", 72", 69" और 73" है। क्या इन ऊँचाइयों से निष्कर्ष निकलता है कि सिपाहियों की माध्य ऊँचाई, मल्लाहों की माध्य ऊँचाई, से कम है?
11. छोटी सामान्य दुकानों के प्रतिद्वंद्व से यह सूचना प्राप्त हुई —

	दुकानें		योग
	शहरों में	गाँवों में	
पुरुषों द्वारा चलित	17	18	35
स्त्रियों द्वारा चलित	3	12	15
योग	20	30	50

क्या यह कहा जा सकता है कि शहरों की प्रपेसा गाँवों में स्त्रियों द्वारा छोटी सामान्य दुकानों अधिक चालित हैं?

(मेरठ, 1969)

[उत्तर $\chi^2=3.57$; हाँ]

12. एक पदार्थ के कुट्टकर भावों की चार शहरों A, B, C, D में तुलना करने के लिए चयनकृत दुकानों से एक पदार्थ की दूर पैमानों में एकत्रित की गयीं जो कि इस प्रकार थीं —

A · 82, 79, 73, 69, 69, 63, 61

B · 84, 82, 80, 79, 76, 68, 62

C · 88, 84, 80, 68, 68, 66, 66

D · 79, 77, 76, 74, 72, 68, 64

क्या इस ग्यारह से यह पता चलता है कि इन चार शहरों के भावों में अंतर सार्थक है?

(भाद० सो० ए० भाद०, 1957)

13. एक उद्दीपन (stimulus) को 12 मरीजों को देने पर उनके रक्त दाब में निम्न वृद्धियाँ हुईं :—

5, 2, 8, -1, 3, 0, 6, -2, 1, 5, 0, 4

क्या यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इस उद्दीपन में सामान्यता मायंक वृद्धि होती है ?

(उदयपुर, 1968)

14. पहले दिये गये प्रश्न न० 12 के न्याम को प्रयोग करके परीक्षा कीजिये कि मित्रों द्वारा चालित दुकानों का शहरों में व गाँवों में अनुपात कती है।
15. क्षय रोग में पशुओं के प्रति रक्षण हेतु एक प्रयोग किया गया और इसमें निम्नान्वित परिणाम प्राप्त हुए —

	क्षय-रोग से	
	प्रभावित	अप्रभावित
टीका लगा	12	26
टीका नहीं लगा	16	6

बताइये कि टीका क्षय रोग की रोक घाम में प्रभावी है या नहीं।

(आई० ए० एम०, 1942)

16. आठ विभिन्न शोधनों के लिए चार समयों पर उपलब्ध नाइट्रोजन की मात्रा इस प्रकार थी :—

शोधन	समय			
	30 दिन	50 दिन	70 दिन	100 दिन
1.	32 0	20 0	18 0	16 0
2.	45 0	11 0	42 0	12 0
3.	23 0	23 0	23 0	7 0
4.	24 0	38 0	53 0	55 0
5.	64 0	53 0	54 0	48 0
6.	41 0	91 0	99 0	43 0
7.	60 0	35 0	51 0	55 0
8.	81 0	42 0	43 0	36 0

परीक्षा कीजिये कि उपलब्ध नाइट्रोजन में विभिन्न समयों पर विचलन समान है।

17. किसी संकरण (cross) के अन्तर्गत F_2 विचोजन (segregation) में गहरे भूरे और पीले भूरे, पौधों की संख्या क्रमशः 193 और 63 थी। इन दो प्रकार के

पौधों की संख्या में सैद्धान्तिक अनुपात 3 : 1 सम्भवा जाता था। तो परीक्षा कीजिये कि प्रेषित बारम्बारताओं की प्रत्याशित अनुपात से सहमत है।

18. बिसी सबरण के आतर्गत F_2 वियोजन में पाँच विभिन्न रंगों के पौधों की संख्या में प्रत्याशित अनुपात 27 : 9 : 9 : 3 : 16 था। सबरण करने पर इन रंगों के पौधों की संख्या जमना इस प्रकार थी —

रंग	पौधों की संख्या
गहरा भूरा	110
बाला	40
पीला भूरा	38
साल भूरा	17
हल्का पीला	18

19. क्या प्रेषित पौधों की संख्या प्रत्याशित अनुपात का समर्थन करती है ?
 एक सिक्के को 150 बार उछालने पर बिल्ली बार ऊपर की ओर शीर्ष भाग्ये कि सिक्के की अनभिन्नता के प्रति परिकल्पना परखीवार हो जाय ?

20. 250 पाण्ड-शेष में, निम्नांकित बिन्दु ऊपर की ओर भाग्ये —

1 या 2 बिन्दु	75
3 बिन्दु	40
4 या 5 बिन्दु	80
6 बिन्दु	55

परीक्षा कीजिये कि पाण्ड अनभिन्न है या नहीं।

21. सामान्य समष्टि, जिसके प्राचल $\mu = 60$ और $\sigma^2 = 324$ है, से एक 100 मूनिटों के प्रतिदर्श का चयन किया गया तो बताइये कि कितने प्रतिशत मूनिट ऐसे हैं जिसका समष्टि माध्य से विचलन 4 या इतने अधिक है ?
22. एक सोदायन ने दो भिन्न द्वापों वाले बत्बों में से प्रत्येक के 50 बत्ब लीये। इन बत्बों की परीक्षा करने पर पता चला कि द्वाप A के बत्बों का माध्य जीवन-काल 1282 घंटे और मानक विचलन 80 घंटे है। यदि द्वाप B के बत्बों का माध्य जीवन काल 1208 घंटे और मानक विचलन 94 घंटे है तो क्या इन दो प्रकार के बत्बों में भिन्नता है ?

(पत्रक, 1968)
 [उत्तर ही]

23. एक बड़े शहर से 600 व्यक्तियों के प्रतिदर्श का सप्तम्भाषिक रीति द्वारा चयन किया गया। इस प्रतिदर्श में 53 प्रतिशत पुरुष थे। क्या यह संदेह करना उचित है कि इस शहर में स्त्रियों व पुरुषों की संख्या बराबर है ?

(बम्बई, 1969)

[उत्तर - संख्या समान है।]

24. सिद्ध कीजिये कि एक $(p \times q)$ क्रम की घासन सारणी द्वारा परिवर्तित X^2 का मान कभी भी $n(p-1)$ या $n(q-1)$ से अधिक नहीं हो सकता; पर्याप्त $X^2 < n(p-1)$ या $X^2 < n(q-1)$.

टिप्पणी : प्रश्नावली में विश्वविद्यालयों से लिए गये प्रश्न मूल रूप में अंग्रेजी भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।



प्राधुनिक काल में सांख्यिकी की अनेकों क्रियाओं में से सांख्यिकीय अनुमान उपयोग की दृष्टि से अध्ययन का मुख्य विषय है। इसके अन्तर्गत हमें दो प्रकार की समस्याओं से सम्बन्ध रखना होता है। एक तो समग्र प्राचलो का आगणन और दूसरे समग्र प्राचल या प्राचलो के प्रति परिवर्तना की परीक्षा करनी होती है। अध्ययन में परिवर्तना परीक्षा के विषय में पर्याप्त विवरण दिया चुका है। इन विधियों को तब ही परिवर्तना परीक्षा के लिए प्रयोग में लाया जा सकता है जब कि चर का बटन ज्ञात हो। अधिकतर या तो इन सबका उपयोग इस बल्पना पर आधारित है कि प्रतिदर्श का घन प्रसामान्य समग्र से किया गया है या समग्र का बटन ज्ञात है। किन्तु, प्रायः चर का बटन ज्ञात नहीं होता है। ऐसी स्थिति में एक विधि तो यह है कि चर का ऐसा रूपान्तरण कर दिया जाये कि रूपान्तरित चर का बटन ज्ञात हो। किन्तु प्रायः उचित रूपान्तरण करना कठिन है या कभी-कभी रूपान्तरण करना असम्भव हो जाता है। अतः अज्ञात बटन वाले चर पर लिये गये प्रश्नों द्वारा प्राचलो के आगणन एवं परिवर्तना-परीक्षा के हेतु अप्राचल विधियाँ अत्यन्त सहायक हैं। अप्राचल विधियों को बटन मुक्त विधियाँ (Distribution free methods) भी कहते हैं। प्राचल विधियों का प्रयोग तभी सम्भव है जब कि प्रेशण सत्यात्मक हो और इनका बटन ज्ञात हो। इसके विपरीत अप्राचल विधियों का प्रयोग उन प्रेशणों के लिए करते हैं जो सहायक न होकर कोटि (ranks) या क्रम (order) पर आधारित हो।

परिवर्तना, स्वतन्त्रता कोटि, सापेक्षता स्तर, दो प्रकार की चुट्टि एक एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा के विषय में विवरण अध्ययन में दिया जा चुका है। परीक्षा विधी किसी भी प्रकार की हो पर इन सबका अर्थ व प्रयोग वही रहता है। बटन मुक्त विधियाँ क्रमित प्रेशणों या क्रमित सांख्यिकी पर आधारित हैं। क्रमित प्रेशणों का अभिप्राय इस प्रकार समझा जा सकता है।

माना कि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ किसी समग्र से चयनकृत प्रतिदर्श में n प्रेशण हैं। यदि इन प्रतिदर्श प्रेशणों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर दें तो प्रेशण क्रमित हो जाते हैं। इस अध्ययन में सर्व प्रेशणों को आरोही क्रम में ही व्यवस्थित करना गया है अर्थात् सबसे छोटा प्रेशण पहले, उसके बाद उसके बड़ा,.....और अन्त में सबसे बड़ा प्रेशण रक्का गया है। माना कि इस प्रकार प्रायः प्रतिदर्श प्रेशण $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ हैं। यहाँ Y_1 प्रतिदर्श का सबसे छोटा और Y_n सबसे बड़ा प्रेशण है और अन्य प्रेशण उभी क्रम में हैं। गणितीय भाषा में इस प्रकार निम्न कहते हैं।

$$Y_1 < Y_2 < Y_3 < \dots < Y_n$$

पनारव पनन में किन्हीं दो क्रमित प्रेशणों के बीच के क्षेत्र का बटन पनारव पनन के प्रकार से मुक्त होता है। यह प्रमाणित किया जा सकता है कि अज्ञात n क्रमित प्रेशण किमो भी पनारव पनन $f(x)$ के नीचे के क्षेत्र को $(n+1)$ समान भागों में विभाजित कर देते

हैं जिनमें से प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल $\frac{1}{n+1}$ होता है। यही तथ्य इस कथन का आधार है। पिछले अध्यायों में जिन अप्राचल विधियों का वर्णन किया गया है वे हैं वाई वर्ग परीक्षा, चतुर्थक, दशमक, घाततमक एवं कोटि सहस्रबद्ध आदि। अब इस अध्याय में अन्य कुछ मुख्य अप्राचल विधियों को दिया गया है। इन विधियों का प्रयोग करने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि चर सतत है या असतत है।

एक प्रतिदर्श के लिए अप्राचल परीक्षाएँ

यहाँ उन अप्राचल विधियों का वर्णन किया गया है जो कि केवल एक प्रतिदर्श की स्थिति में लागू होती हैं इन विधियों द्वारा परिवर्त्यता की परीक्षा करके यह निर्णय करते हैं कि प्रतिदर्श का चयन किसी विशेष समग्र से किया गया है या नहीं। अन्य शब्दों में यह कहें कि प्रतिदर्श और समग्र के केन्द्रीय माप समान हैं या नहीं। इस प्रकार की परीक्षाएँ प्रायः आसजन-सौष्ठव सम्बन्धी होती हैं।

कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा

यदि H_0 पूरे बटन को निरिच्छित करता है तो प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर बटन फलन की इस परिवर्त्यत बटन फलन से तुलना की जा सकती है। यदि इन दोनों में बहुत अन्तर हो तो परिवर्त्यता को अस्वीकार किया जा सकता है। इस सिद्धान्त पर आधारित परीक्षा को कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा कहते हैं। यह एक समजन मुद्रित परीक्षा है। इस परीक्षा के लिए निम्न कल्पनाएँ सत्य होनी चाहिये —

- (1) प्रतिदर्श का चयन यादृच्छिक रीति द्वारा किया गया है।
- (2) परिवर्त्यत बटन फलन $F(y)$ सतत है।
- (3) प्रेक्षण कम से कम क्रमसूचक मापनी पर लिए गये होना चाहिये।

(observation measured on at least ordinal scale)

इस परीक्षा के अन्तर्गत परिवर्त्यत एवं प्रेक्षित बारम्बारताओं का पृथक 2 सचयी बारम्बारता बटन ज्ञात कर लिया जाता है और उस मान को और ध्यान दिया जाता है कि जिस पर विचलन अधिकतम हो। माना कि H_0 के अन्तर्गत परिवर्त्यत सचयी बटन $F_0(Y)$ है और प्रेक्षित सचयी बटन $F_n(Y)$ है तो अधिकतम विचलन,

$$D = \text{अधिकतम} | F_0(Y) - F_n(Y) | \quad (101)$$

सूत्र (101) से स्पष्ट है कि अन्तर निर्पेक्ष मान को ही लिया जाता है, इस D के मान और प्रतिदर्श परिमाण n के लिए प्रायिकता सारणी (परि 5-6) द्वारा ज्ञात कर ली जाती है। यदि यह सम्भावितता पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर α के समान या α से कम हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और अधिक हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस परीक्षा के समय भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना चाहिए।

उदाहरण 101 : एक मॉडल की चार कारों (Cars) को एक ही रंग की चार गहराईयों या शेडा (shades) [गहरा, उससे कम गहरा, सामान्य, हल्का] में रंगा गया।

माना कि रग के इन शेडों की सख्याएँ क, ख, ग, घ द्वारा सूचित किया गया है। 12 खरीददारों से कार के रग के विशेष शेड की पसन्द पूछी गयी। तो उत्पादक यह जानना चाहता है कि खरीददारों की अभिरुचि किसी किसी विशेष शेड में है या नहीं। प्राप्त प्रेक्षण निम्न सारणी में दिये गये हैं —

	कार का रंग			
	क	ख	ग	घ
खरीददारों की सख्या जिनकी एक विशेष शेड में अभिरुचि है	0	1	9	2

H_0 खरीददारों की रग के शेडों के अनुसार अभिरुचि में कोई अन्तर नहीं है अर्थात् प्रत्येक शेड के लिए खरीददारों की सख्या समान है।

H_1 खरीददारों की रग के शेडों में एक ही अभिरुचि नहीं है। यहाँ H_0 की परीक्षा के लिए बोलमोगोरोव-स्मिदरनोव परीक्षा का प्रयोग करना उपयुक्त है क्योंकि प्रेक्षण क्रमसूचित मापनी पर लिये गये हैं।

परीक्षा के लिये निम्न सारणी के अनुसार सचयी बटन प्राप्त किये —

	कार के रंग			
	क	ख	ग	घ
खरीददारों की सख्या जिनकी एक विशेष शेड में अभिरुचि है।	0	1	9	2
H_0 के अन्तर्गत सचयी बटन, $F_0(Y)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{9}{12}$	1
प्रेक्षित सचयी बटन, $F_n(Y)$	$\frac{0}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{12}{12}$
$ F_0(Y) - F_n(Y) $	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

$$\text{यहाँ } D = \frac{5}{12} = 0.417$$

माना कि पूर्व निर्धारित सापेक्षता स्तर $\alpha = 0.5$ है। H_0 के अन्तर्गत $n = 10$ व D के परिकल्पित मान 0.417 के अनुसार सारणी (परि च-6) द्वारा प्राप्त प्राप्ति

सायंकता स्तर 0.5 से कम है। अतः परिवर्तन H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि सरीसृपों की रंग के शोडों में एक सी अभिरुचि नहीं है।

परम्परा परीक्षा

अधिकांश सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग करने से पूर्व यह कल्पना की जाती है कि प्रेक्षण एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का गठन करते हैं। किन्तु यदि प्रेक्षण समय के अनुसार जैसे प्रातः और सायंकाल या एक-एक घंटे पश्चात् या एक के बाद एक, अनुक्रम में लिये जायं तो यह कल्पना करना कठिन हो जाता है कि वे यादृच्छिक हैं या नहीं। अतः यादृच्छिकता (randomness) के प्रति परीक्षा करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। इस परीक्षा की विधि इस प्रकार है — पहले प्रतिदर्श प्रेक्षणों के अनुक्रम को किसी निश्चित निकष (criterion) के अनुसार दो वर्गों में विभाजित कर लिया जाता है जैसे यदि एक प्रेक्षण एक निश्चित मान से कम हो या समान हो तो इसे a से और अधिक हो तो b से निरूपित कर दें तो इस प्रकार अक्षरों a और b में एक अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। जैसे एक सिक्के को अनेकों बार लगातार उछालें तो शीर्ष 'H' और सन् 'T' में एक अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। एक सिक्के को 12 बार उछालने पर प्रेक्षण निम्न क्रम में प्राप्त हुए —

H | TT | HHH | T | HH | T | H | T

उपर्युक्त अनुक्रम में वे उप-अनुक्रम जिनमें एक ही प्रकार के प्रेक्षण, (अक्षर) हो और जिनसे पूर्व और जिनके पश्चात् या तो दूसरे प्रकार का अक्षर हो या कोई अक्षर न हो तो यह एक परम्परा कहलाता है। यदि चाहे तो इन्हें ऊर्ध्वाधर रेखाओं द्वारा प्रयत्न कर सकते हैं जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। उपर्युक्त अनुक्रम में आठ परम्पराएँ हैं। कभी-कभी ऐसा भी देखा गया है कि अनुक्रम में परम्पराओं की संख्या बहुत कम या बहुत अधिक होती है। यह स्थिति काल के अनुसार चक्रीय परिवर्तनों या उपर्युक्त उदाहरण में सिक्के के अभिनत होने के कारण उत्पन्न हो सकती है।

जैसे H व T का अनुक्रम निम्न प्रकार है —

HHHHHHH | TTTTTT या H | T | H | T | H | T | H | T | H | T | H | T

पहली स्थिति में केवल 2 परम्पराएँ हैं और दूसरी स्थिति में 12 परम्पराएँ हैं। इन दोनों ही स्थितियों में सिक्के की अनभिनतता पर शका होती है। अतः परम्परा परीक्षा द्वारा प्रतिदर्श की यादृच्छिकता की परीक्षा करते हैं।

यदि प्रेक्षण सख्यात्मक हो तो अनुक्रम निम्न रूप में प्राप्त कर सकते हैं। माना कि प्रेक्षण एक निश्चित सख्या (माध्यिका या अन्य कोई सख्या) से कम या समान है तो इसे a से और अधिक होने पर b से निरूपित किया गया है तो जिस क्रम में प्रेक्षण लिए गये हों उसी क्रम में उनको a या b से नियमानुसार प्रतिस्थापित करने पर अनुक्रम प्राप्त हो जाता है। इस अनुक्रम में परम्पराओं की संख्या स्पष्ट होती है। प्रायः

a व b के स्थान पर चिह्नों + व - का भी प्रयोग किया जाता है। किन्हीं भी संकेतों का प्रयोग करें अनुक्रम में परम्पराओं की संख्या वही रहती है। उदाहरणार्थ

किसी कारखाने द्वारा उत्पादित वस्तु के विशेष लक्षण के हेतु प्रात और सायबाल लिए गये प्रेक्षण निम्न थे —

4 32, 4 18, 4 33, 4 44, 4 34, 4 21, 4 22, 4 24

4 36, 4 23, 4 22, 4 21, 4 37, 4 38, 4 10

इस प्रतिदर्श की माध्यिका 4 24 है। अतः 4 24 को निश्चित मान मानने पर निम्न अनुक्रम प्राप्त होता है —

a | b | aaa | bb | aa | bbb | aa | b

इस अनुक्रम में आठ परम्पराएँ हैं।

परिवर्तना H_0 a और b यादृच्छिक क्रम में हैं की, परिकल्पना H_1 : a और b यादृच्छिक क्रम में घटित नहीं होते हैं के विरुद्ध, परीक्षा, परम्परा परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। माना कि प्रतिदर्श परिमाण n है और इसमें एक वर्ग के प्रेक्षण (a) की संख्या n_1 है और अन्य वर्ग के प्रेक्षण (b) की संख्या n_2 है जहाँ $n_1 + n_2 = n$ । यदि n लघु है और कुल परम्पराओं की संख्या r है तो α सार्थकता स्तर पर परीक्षा सारणी की सहायता से सुगमता से कर सकते हैं। यदि n_1 व n_2 के मान 20 तक हो तो सारणी (परि प-9) व (परि प-9 1) द्वारा यादृच्छिकता की परीक्षा कर सकते हैं। यह सारणी दो भागों में विभाजित है। सार्थकता स्तर पर एक भाग तो न्यूनतम और दूसरा भाग अधिकतम सार्थक परम्पराओं की संख्या को बताता है। यदि प्रतिदर्श n परम्परा-संख्या, इन क्रान्तिक मानों के बीच में हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है और यदि परम्परा-संख्या इन क्रान्तिक मानों के समान हो या इनमें बाहर हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 10 2 : यदि विवरण में दिये हुए प्रेक्षणों की यादृच्छिकता की परीक्षा करनी हो तो निम्न प्रकार कर सकते हैं —

प्रेक्षणों की संख्या $n = 15$

अक्षर a की संख्या = 8, अक्षर b की संख्या = 7 अर्थात् $n_1 = 8$, $n_2 = 7$ और परम्पराओं की संख्या $r = 8$, सा स्तर $\alpha = 0.5$ पर सारणी (परि प-9) व (परि प-9 1) द्वारा प्राप्त क्रान्तिक परम्परा-संख्याएँ 4 और 13 हैं। प्रतिदर्श में परम्पराओं की संख्या 8 है जो कि 4 और 13 के बीच ही पड़ता है।

अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यदि H_1 पर आधारित प्रस्तावित परम्परा संख्या बहुत कम (या बहुत अधिक) हो तो एक पुच्छ परीक्षा की जाती है। ऐसी स्थिति में तुलना के हेतु प्रावधानानुसार सारणी का एक ही मान देना पर्याप्त होता है और सार्थकता स्तर $\alpha = 0.5$ के स्थान पर $\alpha = 0.25$ रह जाता है।

बहुत प्रतिवर्षों के लिए परम्परा परीक्षा

यदि प्रतिदर्श परिमाण बहुत हो अर्थात् n_1 या n_2 में से कोई एक या दोनों 20 से बड़े हों तो ऐसी स्थिति में r के क्रान्तिक मान सारणी द्वारा नहीं मिले किन्तु सारणी द्वारा

इस स्थिति में r का बटन सन्निकट प्रसामान्य हो जाता है जिसका माध्य व प्रसरण क्रमशः μ_r व σ_r^2 होता है। जबकि

$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 \quad (10.2)$$

$$\text{और } \sigma_r^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)} \quad (10.3)$$

अतः मानक प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} \quad (10.4)$$

प्रतिदर्शज (10.4) में μ_r व σ_r के मानों का प्रतिस्थापन (10.2) व (10.3) के अनुसार कर दिया जाता है।

यदि परिकल्पित Z के लिए सारणी (परि. घ-2) द्वारा प्राप्त 0 से Z तक का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ से अधिक हो तो H_0 को स्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् प्रेरणों में परम्पराएँ यादृच्छिक क्रम में नहीं घटित होती हैं। इससे विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है यदि एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति में 0 से Z तक के क्षेत्रफल की तुलना $(\frac{1}{2}-\alpha)$ से करते हैं।

उदाहरण 10.3 : दिल्ली के एक बस स्टॉप (bus stop) पर पत्तियों में खड़े स्त्री व पुरुष निम्न प्रकार थे, यहाँ एक स्त्री को F से और पुरुष को M से निरूपित किया गया है।

FF |MMMM| F |MMM| FF |MMM| F |M| FFF |MM| F |MMMM
| F |M| FF | MMM

परिकल्पना H_0 , कि स्त्री व पुरुष यादृच्छिक क्रम में खड़े हैं, की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :

उपर्युक्त उदाहरण में $n=34$, $n_1=13$, $n_2=21$, $r=16$

n_2 , 20 से अधिक है अतः यहाँ सूत्र (10.4) का प्रयोग करके Z परीक्षा करना उचित है।

पहले μ_r व σ_r का परिकलन करेंगे।

$$\mu_r = \frac{2 \times 13 \times 21}{13 + 21} + 1$$

$$= \frac{546}{34} + 1$$

$$= 17.058$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \frac{2 \times 13 \times 21 (2 \times 13 \times 21 - 13 - 21)}{(13 + 21)^2 (13 + 21 - 1)} \\ &= \frac{546(546 - 34)}{1156 \times 33} \\ &= \frac{279552}{38148} \\ &= 7.3281 \\ \sigma_r &= 2.707 \end{aligned}$$

सूत्र (10.4) के अनुसार

$$\begin{aligned} Z &= \frac{16 - 17.058}{2.707} \\ &= -\frac{1.058}{2.707} \\ &= -0.391 \end{aligned}$$

सारणी द्वारा 0 से 391 तक का क्षेत्रफल 0.1517 है यह क्षेत्र 0.475 से कम है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि स्त्री और पुरुष बस के लिये पक्ति में किसी नियम अनुसार न होकर यादृच्छिक ढंग से खड़े थे।

दो प्रतिदशों के लिये अप्राचल परीक्षाएँ

इस प्रकार की परीक्षाओं की आवश्यकता यह जानने हेतु उत्पन्न होती है कि दो बारम्बारता फलन समान हैं या नहीं। यहाँ परिकल्पना, कि दो भिन्न समया पर लिये गये प्रतिदशों एक ही या एक से समग्र में से हैं या नहीं, की परीक्षा करनी होती है।

कोलमोगोरोव स्मरनोव परीक्षा

यह परीक्षा एक प्रतिदशों के हेतु दो गयी परीक्षा के जैसी ही है। यदि दो प्रतिदशों एक से समग्र में से चयन किये गये हैं तो इनके सचयी बारम्बारता बटन भी एक से ही होते हैं। यदि इन प्रतिदशों के सचयी बारम्बारता बटन में किसी बिन्दु मान के लिए अन्तर अधिक हो तो समानता के प्रति किसी निराकरणोप परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है।

इस परीक्षा के लिये निम्न कल्पनाएँ सत्य होनी चाहिये :

(1) दोनों प्रतिदशों का यादृच्छिक रीति द्वारा चयन किया गया है ?

- (2) दोनों प्रतिदर्श परस्पर स्वतन्त्र हैं ?
 (3) प्रेक्षण कम से कम क्रमसूचक मापनी पर लिये गये हैं ?

किसी समस्या के लिये यदि उपर्युक्त कल्पनाएँ सत्य हों तो परीक्षा को निम्न प्रकार कर सकते हैं :

माना कि समान परिमाण 'n' के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का दो समग्रों से चयन किया गया है और इनके सचयी बटनों में अधिकतम अन्तर D है जबकि

$$D = \text{अधिकतम } |F_1(y) - F_2(y)| \quad \dots (10.5)$$

जहाँ $F_1(y)$ एक प्रतिदर्श का प्रेक्षित सचयी पग-फलन (cumulative step function) है और $F_2(y)$ दूसरे प्रतिदर्श का सचयी पग-फलन है। माना कि D का अग्र M_D है। कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा के लिये दी गयी सारणी (परि० घ-7) (जब $n < 40$) द्वारा α सार्थकता स्तर व प्रतिदर्श परिणाम n के तदनुसार M_D का क्रांतिक मान ज्ञात कर लिया जाता है। क्रांतिक मान देखते समय एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का भी ध्यान रखा जाता है। एक पुच्छ परीक्षा का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जब अनुसंधानकर्ता को अधिकतम अन्तर की दिशा प्रयोग करने से पहले ही पता हो अन्यथा दो पुच्छ परीक्षा का ही प्रयोग करना होता है। यदि परिकल्पित M_D का मान क्रांतिक मान से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि $n > 40$ हो तो सारणी (परि० घ-8) का प्रयोग करना होता है। यहाँ α सार्थकता स्तर पर D के क्रांतिक मान प्राप्त होते हैं। यदि परिकल्पित D का मान α सा० स्त० व $n_1 = n_2 = n$ के लिये सारणीवद्ध D के मान से अधिक या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

टिप्पणी : यहाँ दोनों प्रतिदर्शों के परिमाण भिन्न होने की स्थिति की उपेक्षा कर दी गयी है।

उदाहरण 10.4 : 15 प्रशिक्षित और 15 अप्रशिक्षित किसानों के स्वतन्त्र प्रतिदर्शों में कुछ आधुनिक कृषि प्राचलन पद्धतियों के प्रतिशत अपनाने के अनुसार किसानों की सहाय निम्न सारणी में दी गयी है। यहाँ यह जानना है कि प्रशिक्षित व अप्रशिक्षित किसानों में आधुनिक कृषि प्राचलन पद्धतियों को अपनाने का अनुपात समान है या नहीं ?

H_0 : प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानों के अपनाने सम्बन्धी अनुपात में कोई अन्तर नहीं है।

H_1 : प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानों के अपनाने सम्बन्धी अनुपात में अन्तर है।

यहाँ प्रेक्षित सचयी पग-बटनों को न्यास के साथ ही निम्न सारणी में दे दिया गया है :

	प्रतिशत अयताने के वर्ग					
	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
प्रशिक्षित किसान (प्र०वि०)	0	1	3	3	7	1
अप्रशिक्षित किसान (अप्र०वि०)	3	8	2	1	1	0
प्र० वि० के लिये प्रक्षित संचयी बटन $F_1(y)$	$\frac{0}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{15}$
अप्र० वि० के लिये प्रक्षित संचयी बटन $F_2(y)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{15}{15}$
$ F_1(y) - F_2(y) $	$\frac{3}{15}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	0

यहाँ $D = \frac{1}{15}$, $M_D = 10$ और $n < 40$ है। माना कि पूर्व निर्धारित सापेक्षता स्तर $\alpha = 0.05$ है। $\alpha = 0.05$ व $n = 15$ के लिये दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में सारणी (परि० प-7) द्वारा प्राप्त M_D का प्रातिव्य मान 8 है जोकि M_D के परिक्षित मान 10 से कम है। अतः H_0 अस्वीकृत है जिसका अभिप्राय है कि प्रशिक्षित और अप्रशिक्षित किसानों में आधुनिक कृषि प्राचलन पद्धतियों को अपनाने सम्बन्धी अनुपात समान नहीं है।

चिह्न परीक्षा

माना कि एक द्विवर्ग समग्र विचाराधीन है और इन दो वर्गों के बटन अज्ञात हैं तो सतत बटन फलनों की समानता के प्रति निराकरणाय परिकल्पना H_0 की चिह्न-परीक्षा कर सकते हैं अर्थात् इस विधि द्वारा

$H_0: f_1(X) = f_2(X)$ को $H_1: f_1(X) = f_2(X - c)$ के विरुद्ध परीक्षा करते हैं। चिह्न परीक्षा का प्रयोग उन परीक्षणों की स्थिति में करते हैं जिनमें कि दो समूहों से समान परिमाण के प्रतिदर्शों का अध्ययन किया गया हो। माना कि प्रतिदर्श में युगल प्रक्षण (X_1, X_1') , (X_2, X_2') , (X_3, X_3') , (X_n, X_n') है। यहाँ X_1 किसी एक निरूप के अन्तर्गत प्रक है और X_1' किसी अन्य निरूप के अन्तर्गत प्रक है। यहाँ c के विषय में केवल एक कल्पना की जाती है कि इसका बटन सतत है। इससे अनिश्चित विभिन्न युगल प्रक्षणों के विषय में कोई कल्पना नहीं करनी होती है।

युगल प्रक्षणों के आधार पर H_0 को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$H_0: P(X_1 > X_1') = P(X_1 < X_1') = \frac{1}{2}$$

जबकि $i = 1, 2, 3, \dots, n$

या H_0 को इस प्रकार भी कह सकते हैं।

H_0 अन्तर्गत की माध्यिका शून्य है।

इसका अभिप्राय यह है कि H_0 के अन्तर्गत यह भाशा की जाती है कि इन युगल प्रेक्षणों की सख्या जिनमें X_1, X_1' से अधिक है, उन युगल प्रेक्षणों की सख्या के समान होती है जिनमें X_1, X_1' से कम है। यदि युगल प्रेक्षणों में अन्तर के चिह्न का केवल विचार करें तो अन्तरो को निम्न प्रकार निरूपित कर सकते हैं।—

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{यदि } X_1 - X_1' > 0 \\ 0 & \text{यदि } X_1 - X_1' < 0 \end{cases}$$

यदि $X_1 - X_1' = 0$ हो तो d_i का कोई चिह्न नहीं माना जाता है और इन युगल प्रेक्षणों को विश्लेषण के समय छोड़ दिया जाता है। अतः जितने युगल प्रेक्षणों में अन्तर शून्य होता है उतना ही प्रतिदर्श परिमाण कम हो जाता है।

यहाँ सब d_i स्वतन्त्र हैं और इनका योग $r = \sum d_i$ है जोकि इस परीक्षा के लिए उन् चिह्नों की सख्या से कम है। r एक द्विपद चर होगा जिसके लिए n परीक्षण किये गये हैं और प्रत्येक d_i के घटित होने की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$ है। यदि $n < 25$ हो तो द्विपद बटन के लिए सूत्र $\binom{n}{r} p^r q^{n-r}$ का प्रयोग करके घटना $(x \leq r)$ की प्रायिकता ज्ञात करली जाती है, जहाँ x उन चिह्नों की सख्या है जो r से कम है। सुगमता के लिए घटना $(x \leq r)$ की प्रायिकता सारणी (परि० घ-10) से सीधे देख सकते हैं। यदि परिकल्पित प्रायिकता पूर्व निर्धारित सायंकता स्तर से कम हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 स्वीकृत है।

यदि n बृहत् हो अर्थात् $n > 25$ हो तो प्रसामान्य विचर Z का प्रयोग करके प्रसामान्य परीक्षा करते हैं। इसके लिए सूत्र (9.21) का प्रयोग करना होता है और वही दिये गये नियम के अनुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि यह पहले से विदित हो कि किस प्रकार के चिह्नों की सख्या कम होगी तो एक पुच्छ परीक्षा का प्रयोग करना होता है अन्यथा दो पुच्छ परीक्षा करनी होती है। लघु प्रतिदर्श की स्थिति में दो पुच्छ परीक्षा के लिए प्रायिकता $P(x \leq r)$ को दो से गुणा कर दिया जाता है और इस प्रायिकता का प्रयोग करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय ले लिया जाता है। बृहत् प्रतिदर्श की स्थिति में एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा को अध्याय 9 में दिया जा चुका है।

उदाहरण 10.5 : कल पुर्जे बनाने की मशीन पर काम करने वाले 16 व्यक्तियों का छुट्टियों से पूर्व के सप्ताह व छुट्टियों के बाद के सप्ताह में उत्पादित पुर्जों की सख्या निम्न प्रकार थी :—

व्यक्ति संख्या	छुट्टियों से पूर्व के सप्ताह का उत्पादन (पुनों की संख्या) X_A	छुट्टियों के बाद के सप्ताह का उत्पादन (पुनों की संख्या) X_B	$X_A - X_B$	
			चिह्न	मूल्य
1	99	107	—	8
2	104	108	—	4
3	102	94	+	8
4	90	88	+	2
5	109	103	+	6
6	106	98	+	8
7	105	100	+	5
8	104	92	+	12
9	94	86	+	8
10	82	78	+	4
11	95	88	+	7
12	103	93	+	10
13	89	80	+	9
14	85	80	+	5
15	91	94	—	3
16	97	96	+	1

परीक्षा करनी है कि छुट्टियों का उत्पादन पर अनुसूच प्रभाव पड़ता है या नहीं ?

H_0 : छुट्टियाँ देने का काम करने वालों की उत्पादन क्षमता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

H_1 : छुट्टियाँ देने का काम करने वालों की उत्पादन क्षमता पर प्रभाव पड़ता है।

यहाँ युगल प्रेषण दिये गये हैं तथा X_A व X_B के बटन दो मूल्य माना गया है।
अतः H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा चिह्न परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

उपर्युक्त न्यास के अनुसार,

$$n=16 \text{ और } x=3 \text{ (- चिह्नों की संख्या जो कि कम है)}$$

यहाँ कम चिह्नों की संख्या के विषय में पहले से कुछ नहीं दिया गया है अतः दो पुष्ट परीक्षा करनी होगी। माना कि पूर्व निर्धारित सार्थकता स्तर $\alpha=0.1$ है।

$n=16$ व $x=3$ के लिए सारणी (परि० घ-10) द्वारा प्राप्त प्रायिकता $P(x < 3) = .011$ है। दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में यह प्रायिकता, $2 \times .011 = .022$ है जोकि .01 से अधिक है। अतः H_0 स्वीकृत है जिसका अभिप्राय है कि छुट्टी देने का काम करने वालों की उत्पादन क्षमता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

विल्कायसन की चिह्नित-कोटि परीक्षा

पिछले खण्ड में दी गयी चिह्न-परीक्षा में केवल युगल प्रेक्षणों में अन्तर की दिशा का ही प्रयोग किया गया है। चिह्न-परीक्षा में अन्तर के परिमाण की उपेक्षा कर दी गयी है किन्तु विल्कायसन ने अन्तर के चिह्न एवं परिमाण दोनों को ही महत्त्व दिया। विल्कायसन-परीक्षा, चिह्न-परीक्षा की अपेक्षा अधिक शक्तवन्त है। इस परीक्षा को कार्यान्वित करने की विधि निम्न प्रकार है :—

माना कि किन्हीं दो शोधनों या कारखों के आधार पर प्रतिदर्श में n युगल प्रेक्षण $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n)$ हैं और 1 युगल प्रेक्षण में अन्तर $X_i - Y_i = d_i$ है।

इन अन्तरों को d_i के निरपेक्ष मान के अनुसार आरोही या अवरोही क्रम में रख दिया जाता है और ऋण अन्तरों को कोटिकृत कर दिया जाता है। इन कोटियों को वही चिह्न प्रदान कर देते हैं जोकि किसी कोटि के तदनुसार अन्तर का था। जैसे माना कि अन्तर 2, 4, -3, 5 व 7 हैं। तो ऋण अन्तर 2, 3, 4, 5, 7 हुए और इनकी कोटियाँ 1, 2, 3, 4, 5 होगी। चिह्न प्रदान करने पर कोटियाँ 1, -2, 3, 4 व 5 होगी। इस प्रकार यह ज्ञात हो जाता है कि कौनसी कोटियाँ घनात्मक अन्तरों द्वारा और कौनसी कोटियाँ ऋणात्मक अन्तरों द्वारा प्राप्त हुई हैं। यदि किसी युगल प्रेक्षण में अन्तर शून्य हो तो इस युगल प्रेक्षण को विश्लेषण में सम्मिलित नहीं किया जाता है और युगलों की संख्या उतनी ही कम मान ली जाती है जितने कि अन्तर शून्य हों।

इसके अतिरिक्त यदि दो या दो से अधिक अन्तरों का परिमाण समान हो तो इन अन्तरों को समान कोटि प्रदान कर दी जाती है और यह कोटि उन सब कोटियों के माध्य के समान होती है जो इन अन्तरों को क्रम में मानकर प्रदान करनी थी। जैसे यदि अन्तर 4, 5, 6, 6, 8, 9 हों तो इनकी कोटियाँ 1, 2, 3, 5, 3, 5, 5, 6 होगी।

अन्तरों को कोटिकृत करके चिह्न प्रदान करने के पश्चात्, एक प्रकार के चिह्नों वाली कोटियों का योग अर्थात् + चिह्नों वाली व - चिह्नों वाली कोटियों का योग अलग-अलग ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि इनमें से जो योग कम है उसे T द्वारा सूचित किया गया है। अब H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार करते हैं। H_0 व H_1 को चिह्न-परीक्षा के साथ दिया जा चुका है।

स्थिति 1 : यदि प्रतिदर्श लघु हो अर्थात् $n \leq 25$ हो तो परिकल्पित T की, n व सापेक्षता स्तर α के अनुसार, सारणी (परि० घ-11) में दिये T के त्रातिक मान से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिकल्पित T का मान

सारणीबद्ध T के मान से कम या समान हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है
 अर्थात् H_1 स्वीकृत है। इसके विपरीत स्थिति में H_0 स्वीकृत है।

यदि अनुसन्धानकर्ता को यह पहले से ज्ञात हो कि + चिह्न वाली या - चिह्न वाली
 कोटियों का योग 'T' कम होगा तो इस स्थिति में एक पुच्छ परीक्षा करनी होती है और
 एक पुच्छ परीक्षा के लिए दी गयी सारणी (परि० प-11) देखनी होती है।

स्थिति 2 • यदि प्रतिदर्श परिमाण 'n' बृद्ध हो अर्थात् $n > 25$ हो तो T का बटन
 सन्निकट प्रसामान्य होता है। अतः H_0 की Z-परीक्षा की जाती है। इस स्थिति में
 T का माध्य,

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} \quad \dots(106)$$

और प्रसरण,

$$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \quad \dots(107)$$

होता है।

प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \quad \dots(108)$$

$N(0, 1)$ होता है।

परिकल्पित Z की α सा० स्त० के लिए प्रसामान्य बटन वाली सारणी (परि० प-2)
 द्वारा प्राप्त Z से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है।

यहाँ भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना होता है।

उदाहरण 106 • चिह्न परीक्षा के लिए दिये गये उदाहरण (105) को ही विस्म-
 कृतन चिह्नित कोटि परीक्षा के हेतु प्रयोग किया गया है।

यहाँ दी गयी सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिये चिह्न सहित

अन्तरो का यहाँ सीधे उपयोग कर लिया गया है।

अमित अन्तर : 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 12

चिह्नों सहित कोटि . 1, 2, -3, -4 5, 4 5, 6 5, 6 5, 8, 9, 11 5, 11 5, 11 5,
 -11 5, 14, 15, 16

- चिह्नों वाली कोटियों का योग = 19

+ चिह्नों वाली कोटियों का योग = 117

अतः यहाँ $T = 19$.

माना कि पूर्व निर्धारित सापेक्षता स्तर $\alpha = 01$ है।

यहाँ यह विदित नहीं था कि किस प्रकार के चिह्नों वाली कोटियों का योग कम होगा
 अतः दो पुच्छ परीक्षा करना उचित है। साथ ही यहाँ n सघु है।

$\alpha = 01$ व $n = 16$ के लिए सारणी (परि० प-11) द्वारा प्राप्त T का त्रातिक मान 20 है जो कि T के परिवर्तित मान 19 से अधिक है। अतः H_0 अस्वीकृत है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि छुट्टी देने का उत्पादन क्षमता पर अनुकूल प्रभाव पड़ता है।

टिप्पणी :—यद्यपि चिह्न परीक्षा द्वारा H_0 को स्वीकार किया गया है किन्तु विल्काक्सन चिह्नित बोट्टि परीक्षा द्वारा H_0 , उसी न्यास के लिए, को अस्वीकृत है। इससे विदित होता है कि जिन सूक्ष्म अन्तरों का चिह्न परीक्षा द्वारा अभिज्ञान (detection) नहीं हो सका उनका विल्काक्सन परीक्षा में अभिज्ञान हो जाता है। यही कारण है कि विल्काक्सन परीक्षा, चिह्न परीक्षा से अधिक शक्तवन्त मानी जाती है।

माध्यिका परीक्षा

चिह्न परीक्षा में आवश्यक है कि प्रेक्षण युगल होने चाहिये। किन्तु बहुधा इस प्रतिबंध का पालन करना कठिन हो जाता है। अतः प्रेक्षण युगल न होने तथा प्रतिदर्श परिमाणा के समान न होने की स्थिति में परिवर्तना

$$H_0 \quad f_1(X) = f_2(Y) \quad \text{की} \quad H_1 \quad f_1(X) = f_2(Y-C)$$

के विरुद्ध परीक्षा करने की आवश्यकता होती है। अर्थात् परीक्षा करनी है कि दो स्वतन्त्र समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (माध्यिका) एक दूसरे से भिन्न नहीं हैं। यह भी कह सकते हैं कि दो समूहों की माध्यिका समान होने की परीक्षा करनी है। इस स्थिति में H_0 की परीक्षा के लिए माध्यिका परीक्षा उपयुक्त है। यहाँ यह कल्पना अवश्य की गयी है कि $f_1(X)$ और $f_2(X)$ के बारम्बारता फलन सतत हैं। माध्यिका परीक्षा की विधि इस प्रकार है —

माना कि पहले प्रतिदर्श में प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_1}$ हैं और दूसरे प्रतिदर्श में प्रेक्षण $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n_2}$ हैं। इन दो प्रतिदर्श प्रेक्षणों को सम्मिलित करके आरोही या अवरोही क्रम में रख दिया जाता है। माना कि इस प्रकार निम्न अनुक्रम प्राप्त होता है —

$$X_3, X_5, X_4, Y_1, X_1, Y_5, \dots$$

इस अनुक्रम की माध्यिका ज्ञात करली जाती है। इसके पश्चात् माध्यिका के दायी और X प्राप्ताको (प्रेक्षणों) और Y प्राप्ताको की सत्या ज्ञात कर लेते हैं। माना कि ये सत्याएँ क्रमशः r_1 व r_2 हैं। अतः माध्यिका के दायी और X प्राप्ताको की सत्या $(n_1 - r_1)$ और Y प्राप्ताको की सत्या $(n_2 - r_2)$ होगी। यदि H_0 सत्य है तो माध्यिका के दायी और व दायी और घटित X व Y प्राप्ताको की सत्या का अनुपात लगभग समान होना चाहिये।

माध्यिका के दायी और X व Y प्राप्ताको

$$\binom{n}{r_1} \binom{n}{r_2}$$

प्रसार से घटित हो सकते हैं। $(n_1 + n_2)$ अंकों में से $(r_1 + r_2)$ अंकों के

$$\binom{n_1+n_2}{r_1+r_2}$$

संयुक्त (combinations) सम्भव हैं। घन माध्यिका के दायी घोर r_1 , X घन घोर r_2 , Y घन होने की प्रायिकता,

$$P(r_1, r_2) = \frac{\binom{n}{r_1} \binom{n}{r_2}}{\binom{n_1+n_2}{r_1+r_2}}$$

है। H_0 के अन्तर्गत $r_1 = \frac{n_1}{2}$, $r_2 = \frac{n_2}{2}$ तथा r_1 और r_2 का प्रतिदर्शी बटन, प्रतिगुणोत्तर बटन होता है। उपर्युक्त धरको की गणनाओं को निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं -

सारणी (10-1)

	प्रतिदर्श 1 (X-प्रक्षण)	प्रतिदर्श 2 (Y-प्रक्षण)	योग
माध्यिका के दायी घोर धरको की संख्या	r_1	r_2	(r_1+r_2)
माध्यिका के बायी घोर धरको की संख्या	$(n_1 - r_1)$	$(n_2 - r_2)$	$(n_1+n_2-r_1-r_2)$
योग	n_1	n_2	n_1+n_2

परिवर्तना H_0 की परीक्षा α सापेक्षता स्तर पर फिगर-परीक्षा द्वारा या वाई वंग परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। यदि (n_1+n_2) का मान लघु हो अर्थात् 20 से कम हो तो फिगर Z परीक्षा का प्रयोग करना चाहिये। एक पुच्छ परीक्षा हो तो $P(r_1, r_2)$ का मान α से समान या कम होने की स्थिति में H_0 को अस्वीकार कर लिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। दो पुच्छ परीक्षा की स्थिति में $\alpha/2$ से तुलना करने नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि (n_1+n_2) का मान 20 से 40 तक हो घोर सारणी में किसी भी कोष्ठिका (cell) की बारम्बारता 5 से कम न हो तो (2×2) सामग्य सारणी के लिए χ^2 -परीक्षा का प्रयोग करते हैं। किसी भी कोष्ठिका की बारम्बारता 5 से कम हो दो साक्षय के लिए शुद्धि का प्रयोग करके χ^2 -परीक्षा करते हैं।

यदि (n_1+n_2) का मान बृहत् हो अर्थात् 40 से अधिक हो तो प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग किया जाता है इस स्थिति में $\frac{r_1}{n_1}$ और $\frac{r_2}{n_2}$ को दो प्रतिदर्श अनुपातों के रूप में

माना जाता है जो कि द्विपद समझों में से हैं। r_1 व r_2 में से जो कम हो उसने 0.5 जोड़ देने और जो अधिक हो उसमें से 0.5 घटा देने पर इस परीक्षा द्वारा अधिक शुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं। इस परीक्षा के लिए प्रतिदण्ड है —

$$Z = \frac{\frac{r_1}{n_1} - \frac{r_2}{n_2}}{\sqrt{pq \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad \dots (10.10)$$

$$\text{जबकि } p = \frac{r_1 + r_2}{n_1 + n_2}, \text{ और } q = 1 - p$$

Z का परिवर्तन करके सारणी (परि० प-2) द्वारा O से Z तक का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया जाता है और क्षेत्र की पूर्व निर्धारित α सापेक्षता स्तर पर, सत्या $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ से तुलना करके H_0 के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति में O से Z तक के क्षेत्र की तुलना, सत्या $(\frac{1}{2}-\alpha)$ से करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 10.7 दो विभिन्न अवसरों पर समान आयु वाले भेड़ के बच्चों के प्रतिदण्डों का चयन किया गया और एक निर्णायक द्वारा 15 में से निम्न भव दिये गये :—

भेड़ के बच्चों की संख्या	बच्चा 1 प्रान्तक (X)	बच्चा 2 प्रान्तक (Y)
1	12	12
2	9	14
3	12	14
4	13	15
5	7	14
6	13	12
7	13	14
8	14	15
9	15	7
10	15	

परिकल्पना H_0 कि दोनों अवसरों पर समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समान हैं अर्थात् $f(X) = f(Y)$ की परीक्षा, नाधिपिका परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार मक्ते हैं।

दिये हुए अर्थों को सम्मिलित करके क्रम में लिग दिया और बहुचाल के लिए अक्षर 2 के अर्थों के नीचे रेखा खींच दी गयी है।

$$7 \quad 7 \quad 9 \quad 12 \quad 12 \quad \underline{12} \quad \underline{12} \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 14 \quad \underline{14} \quad \underline{14} \quad \underline{14} \quad \underline{14}$$

↓
 M_6

$$15 \quad 15 \quad \underline{15} \quad \underline{15}$$

इस अनुक्रम में 19 अक्षर हैं पर. दशवा अक्ष, 13 माध्यिका है।

यहाँ $n_1 = 10, n_2 = 9$

$r_1 = 3, r_2 = 6,$

$\therefore n_1 - r_1 = 7, n_2 - r_2 = 3$

$$\therefore P\{r_1, r_2\} = \frac{\binom{10}{3} \binom{9}{6}}{\binom{19}{9}}$$

$$= \frac{2520}{46189}$$

$$= 0.054$$

$\alpha = 0.05$ का स्त. के प्रायिकता $P\{r_1, r_2\}$ अधिक है अतः H_0 को अस्वीकार करने का मौखिक नहीं है। इसका अभिप्राय है कि दोनों अक्षरों पर समूहों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान समान नहीं हैं।

मान-चिह्नो U परीक्षा

मान-चिह्नो परीक्षा द्वारा परिलक्षता H_0 , कि दो प्रतिदर्श एक ही समष्टि से अक्षर किये गये हैं, की परीक्षा बरनी होती है। गणितीय भाषा में,

$H_0 : f(X) = f(Y)$ की $H_1 : f(X) = f(Y - C)$ के विरुद्ध परीक्षा मान-चिह्नो U परीक्षा द्वारा कर सकते हैं।

माध्यिका परीक्षा की भाँति माना कि दो प्रतिदर्शों के परिमाण क्रमशः n_1 व n_2 हैं और प्रतिदर्श प्रेषण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n_1}$ व $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{n_2}$ हैं। दोनों प्रतिदर्शों के प्रेषणों को सम्मिलित करके कोटि के अनुसार अनुक्रम में रख दिया जाता है।

माना कि अनुक्रम,

$$X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad Y_1 \quad X_1 \quad Y_5 \quad \dots$$

है। इस अनुक्रम में X या Y में से किसी एक की कोटि जान कर लेते हैं। माना कि Y की कोटियाँ जान की है। और इनका योग S_2 है तो

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_2 (n_2 + 1)}{2} - S_2 \quad \dots (10.11)$$

X की कोटियाँ ज्ञात करने की स्थिति में,

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1 + 1)}{2} - S_1 \quad \dots (10 12)$$

जबकि X की कोटियों का योग S_1 है।

यदि प्रतिदर्श परिमाण अति लघु हो अर्थात् n_1 और n_2 के मान 8 या 8 से कम हों तो परिकल्पित U के मानों के लिए दी गयी सारणी (परि० प-12) द्वारा प्रायिकता ज्ञात करके H_0 की स्वीकृति या अस्वीकृति के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। n_2 के विभिन्न मानों के लिए, n_1 और U के मानों से सम्बद्ध प्रायिकता अलग अलग सारणियों में दी गयी है। यदि यह प्रायिकता, पूर्व निर्धारित सापेक्षता स्तर α के समान या इससे अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 की स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि U के इस मान के लिए सारणी में प्रायिकता न दी गयी हो तो अन्य वर्ग के लिए U' का परिकलन कर लेना चाहिये। U और U' में निम्न सम्बन्ध होता है

$$U' = n_1 n_2 - U$$

$$\text{और } P(U' > U) = P(U < n_1 n_2 - U)$$

अब U' के मान के लिए सारणी द्वारा प्रायिकता ज्ञात करके H_0 के विषय में पूर्व की भाँति निर्णय कर लिया जाता है।

जब n_2 का मान 9 से 20 तक हो और $n_1 \leq 20$ हो तो सारणी (परि० प-12 1) द्वारा n_1 व n_2 के निश्चित मान के लिए U के क्रांतिक मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। ये सारणियाँ प्रत्येक सापेक्षता स्तर α के लिए अलग अलग से एक पुच्छ परीक्षा की स्थिति में दी गयी हैं। यदि वो पुच्छ परीक्षा करनी हो तो इन्हीं सारणियों का α के स्थान पर 2α सा० स्त० लेकर प्रयोग कर सकते हैं अर्थात् 2α सा० स्त० पर U के क्रांतिक मान ज्ञात हो जाते हैं। यदि परिकल्पित U का मान सारणीबद्ध U के मान के समान हो या कम हो तो α सा० स्त० पर H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि n_1 व n_2 के मान बृहत् हो अर्थात् ऊपर दिये हुए मानों से अधिक हों तो प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग करके H_0 की H_1 के विरुद्ध परीक्षा करते हैं। यदि n_1 व n_2 दोनों के मान 8 से अधिक हो तो उस स्थिति में भी प्रसामान्य परीक्षा का प्रयोग कर सकते हैं जब निराकरणिय परिवर्तना सत्य हो तो U का बटन प्रसामान्य होता है। जिसका माध्य व प्रसरण निम्न प्रकार है —

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2} \quad \dots (10 13)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} \quad \dots (10 14)$$

प्रतिदर्शक,

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sigma_u} \quad \dots (10.15)$$

या
$$Z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) / 12}} \quad \dots (10.15.1)$$

Z के इस मान के लिए सारणी (परि० ध-2) द्वारा O से Z तक का क्षेत्र ज्ञात कर लिया जाता है और माध्यिका परीक्षा की शक्ति दिये हुए नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। इस परीक्षा में भी एक पुच्छ व दो पुच्छ परीक्षा का ध्यान रखना आवश्यक है।

उदाहरण 10.8 : माध्यिका परीक्षा के लिए दिये गये उदाहरण (10.7) के न्याय के लिए परिवर्तना H_0 कि दोनों घबसरो पर भेडो के बच्चो का धपन एक ही समग्र से किया गया है, की परीक्षा मानविहदनी परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

क्रमित धको और उनकी कोटियाँ निम्न प्रकार होंगी —

7	<u>7</u>	9	12	12	<u>12</u>	<u>12</u>	13	13	13	14	<u>14</u>
	(15)				(55)	(55)					(13)
	<u>14</u>	<u>14</u>	<u>14</u>	15	15	<u>15</u>	<u>15</u>				
	(13)	(13)	(13)			(175)	(175)				

उपरोक्त धनुक्रम में समान मान वाले धक जो धवसर 1 में हैं पहले लिखे गये हैं और धवसर 2 के धक बाद में दिये गये हैं। इस धनुक्रम में Y धको की कोटियाँ इनके नीचे कोष्ठको में दी गयी हैं। इन कोटियाँ को ज्ञात करने में समान मान वाले घेडणो की कोटियो के माध्य को उन धको की बाटि के रूप में रखना जाता है।

Y की कोटियो का योग = 106

सूत्र (10.11) के धनुसार

$$U = 10 \times 9 + \frac{9(9+1)}{2} - 106$$

$$= 29$$

यहाँ $n_2 = 9$ और $n_1 = 10$ है, मान-विहदनी परीक्षा के लिए दी गयी सारणी द्वारा $\alpha = 0.5$ साधेजता स्तर पर U का प्रातिज मान 24 है। यह एक दो पुच्छ परीक्षा है धत $\alpha = 10$ साधेजता स्तर के लिए U का प्रातिज मान देया गया है।

परिक्षिका U का मान सारणोपध U के मान में सधित है धत H_0 स्वीकृत है।

प्रश्नावली

1. अप्राचल विधियों के महत्व एवं सामं बतारव ।

2. "काई वर्ग परीक्षा अप्राचल विधियों में से एक है" इस कथन की पुष्टि कीजिये ।
3. युवक बलव के सदस्यों में से 170 सदस्यों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया । इन चयनकृत सदस्यों में पशुओं की उपरति के हेतु टीका लगाने में अभिरुचि के विषय में पूछताछ की गयी । इन सदस्यों में से केवल 136 ने अभिरुचि दिखायी । सामान्यतया ऐसा समझा जाता है कि आधे सदस्यों की पशुओं के टीका लगाने में अभिरुचि है । परीक्षा कीजिये कि यह प्रतिदर्श कहे हुए समग्र से लिखा गया है ?
4. एक नाइजीरियन (Nigerian) स्कूल के 100 विद्यार्थियों की शिक्षा स्तर के अनुसार नियोजन स्थिति सम्बन्धी आँकड़े निम्न सारणी में दिये गये हैं ।—

शिक्षा स्तर	नियोजन स्थिति	
	नियोजित	अनियोजित
प्राथमिक	36	14
माध्यमिक	24	26

परीक्षा कीजिये कि माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों में नियोजित व अनियोजित विद्यार्थियों की संख्या समान है ?

- 5 एक व्यवसायी यह जानना चाहता है कि वेतन वृद्धि करने से कर्मचारियों की उत्पादन क्षमता पर क्या प्रभाव पड़ता है ? इस हेतु एक फँट्री के कर्मचारियों के वेतनों में समान वृद्धि दी गयी । यदि वेतन वृद्धि से पूर्व एक कर्मचारी का प्रतिदिन उत्पादन X (किन्हीं इकाइयों में) है और वेतन वृद्धि के बाद प्रतिदिन उत्पादन Y है तो 18 कर्मचारियों के एक प्रतिदर्श द्वारा निम्न न्यास प्राप्त हुआ ।—

X : 91, 75, 70, 64, 63, 86, 66, 72, 84, 92, 85, 88, 79, 68,
80, 84, 68, 73.

Y : 88, 77, 67, 69, 66, 81, 67, 74, 85, 94, 83, 90, 84, 72,
77, 86, 70, 78.

इस न्यास के आधार पर परिकल्पना,

H_0 : वेतन वृद्धि से कर्मचारियों के प्रतिदिन उत्पादन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, की H_1 के विरुद्ध $\alpha = 0.05$ सा. स्त. पर (i) चिह्न परीक्षा (ii) विस्काक्सन चिह्नित कोटि परीक्षा कीजिये । जबकि,

(क) H_1 : कर्मचारियों का वेतन वृद्धि के बाद का प्रतिदिन उत्पादन, वेतन वृद्धि से पूर्व के प्रतिदिन उत्पादन से अधिक है ।

(ख) H_2 : कर्मचारियों की वेतन वृद्धि से पूर्व एवं पश्चात् की उत्पादन दरें भिन्न हैं ।

- 6 एक सिक्के को 15 बार उछालने पर शीर्ष 'H' व सन् 'T' की ओर सिक्का गिरे का अनुक्रम निम्न प्रकार था —

H H T T H H T T T T H T H H T

उपर्युक्त अनुक्रम के द्वारा सिक्के के अनभिन्न होने की परम्परा परीक्षा कीजिये ।

- 7 दो अनुसंधान वर्तमानों न गन्ने के दो सेतो म पौधों का अलग अलग प्रतिदर्श लेकर प्रति पौधा बीटा की संख्या ज्ञात की जो निम्न प्रकार थी —

प्रति पौधे पर बीटों की संख्या

अनुसंधानवर्ता 1 12, 5, 0, 7, 11, 9, 3, 4, 2, 8

अनुसंधानवर्ता 2 9, 1, 6, 4, 5, 7, 3, 2

परिचलना H₀ कि दोनों अनुसंधानवर्तमानों ने एक से समग्रो से प्रतिदर्शों का चयन किया है, की परीक्षा

(1) माध्यिका परीक्षा द्वारा (11) मान द्विदनी U परीक्षा द्वारा कीजिये ।

□ □ □

आकलन सिद्धान्त और अधिकतम संभाविता अनुपात परीक्षा

अधिकतम परीक्षणों में प्राचलों का आकलन करने की आवश्यकता होती है जैसे यह ज्ञात करना कि प्रति व्यक्ति बितने खाद्य पदार्थ की आवश्यकता होती है। प्रति व्यक्ति धान का पता लगाना हो या किसी खाद्य का उपज पर प्रभाव आदि जानने के लिए प्राचलों का आकलन करना होता है। इन सभी अध्ययनों में कुछ व्यक्तियों या प्रयोगगत एककों द्वारा प्राप्त सूचना के आधार पर परिणाम निकाले जाते हैं। आकलन प्रायः किसी बिन्दु या अन्तराल का किया जाता है, बिन्दु आकलन को निम्न रूप में समझ सकते हैं।

माना कि $f(X, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m)$ एक समग्र का घनत्व फलन है जिसमें X एक चर है और $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m$, m प्राचल हैं। इस समग्र में से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं। माना कि इन प्रेक्षणों द्वारा प्राप्त $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ के आकलन (estimates) क्रमशः $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m$ ज्ञात करने हैं जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणों के फलन हैं। इन फलनों को आकलक कहते हैं।

अतः इन्हें $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n), \hat{\theta}_m(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ द्वारा निरूपित कर सकते हैं। जैसे समान्तर माध्य μ का आकलित मान,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \quad (11.1)$$

अतः बिन्दु आकलन में कुछ निर्धारित विधियों द्वारा एक संख्या $\hat{\theta}$ ज्ञात करनी है जो कि प्राचल θ के आकलित मान के रूप में स्वीकृत की जा सकती है।

किसी बटन के प्रत्येक आघूर्ण को प्राचल ही मानते हैं तथापि यह सब आघूर्ण बटन फलन में नहीं लिखे जाते हैं। प्रायः बटन फलन में केवल पहला व दूसरा आघूर्ण, इस बटन के माध्य व प्रसरण के रूप में या कोई अन्य प्राचल ही विद्यमान होता है। माध्य के परितः दूसरे आघूर्ण (प्रसरण σ^2) के आकलन s^2 के लिए सूत्र (4.7) अध्याय 4 में दिया जा चुका है। प्रतिदर्श प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ द्वारा माध्य (\bar{X}) के परितः k वा प्रतिदर्श आघूर्ण m_k निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं :-

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_1^n (X_i - \bar{X})^k \quad (11.2)$$

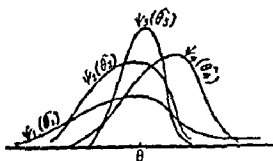
जहाँ $k=1, 2, 3, \dots$

समग्र $f(x, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m)$ से समान परिमाण के घनेकी सुस्पष्ट (distinct) यादृच्छिक प्रतिदर्शों का चयन करें तो प्रत्येक प्रतिदर्श द्वारा एक भिन्न आकलन प्राप्त होता है। प्रायिकता फनन $f(x, \theta)$ में θ , m प्राचल के एक सदिश (vector), $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m)$ को निरूपित करता है। यह मान लिया गया है कि सदिश θ के एक घन θ_i (जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, m$) के लिए एक अच्छा आकलक वह है जिससे कि अधिकांश प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त मान, प्राचल θ_i के निकट हो।

उत्तम आकलकों के गुण

माना कि समग्र $f(x, \theta)$ से n परिमाण के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और इस प्रतिदर्श के प्रेक्षणों का प्रयोग करके किसी प्राचल θ का आकलन विभिन्न विधियों द्वारा किया गया है और माना कि किन्हीं चार विधियों द्वारा प्राप्त आकलक $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$, व $\hat{\theta}_4$ हैं तो इनमें से वही आकलक अच्छा माना जायेगा जिसका बि बटन प्राचल θ पर अधिक सन्केन्द्रित (concentrated) हो। यहाँ बटन के θ पर अधिक सन्केन्द्रित होने से अभिप्राय है कि प्रायिकता वक्र का θ से द्रुटि वर्ग माध्य (mean square error) न्यूनतम हो।—

माना कि आकलकों $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$, व $\hat{\theta}_4$ के घनत्व फनन क्रमशः $\psi_1(\hat{\theta}_1), \psi_2(\hat{\theta}_2), \psi_3(\hat{\theta}_3)$, और $\psi_4(\hat{\theta}_4)$ हैं जिनका ज्यामितीय रूप चित्र (11.1) के अनुसार है।



चित्र (11.1) आकलकों के बटन वक्रों की सहायता से गुणवत्ता का दर्शन।

उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट कि $\hat{\theta}_3$, आकलकों $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, व $\hat{\theta}_4$ की मीमांसा गुणवत्तम है क्योंकि उसने बटन का θ पर सर्वाधिक सन्केन्द्रितरण है।

संगति

यदि n प्रेक्षणों पर आधारित आकलक को $\hat{\theta}_n$ से सूचित करें और θ_n प्रायिकता की भावना में प्राचल θ की ओर अभिगूत हो तो $\hat{\theta}_n$ का θ का सत्य आकलक (Consistent estimator) कहते हैं अर्थात्

यदि $\epsilon > 0$ कोई सख्या हो तो,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\hat{\theta}_n - \theta| < \epsilon \} = 1 \quad (11.3)$$

सम्बन्ध (11.3) से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण n अनन्त की ओर प्रवृत्त होता जाता है, $\hat{\theta}_n$ और θ में अन्तर सूक्ष्मतरंग होता जाता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि जैसे-जैसे प्रतिदर्श परिमाण बृहत् होता जाता है, उतना ही आकलक अधिक यथार्थ होता जाता है।

अनभिन्नता

एक आकलक $\hat{\theta}_n$, θ का अनभिन्न आकलक है यदि $E(\hat{\theta}_n) = \theta$ हो जबकि अक्षर E गणितीय प्रत्याशा को निरूपित करता है। यदि θ के यथा सम्भव आकलक ज्ञात कर लिये जायें तो उनका माध्य प्राचल θ के समान होता है।

उदाहरणतया माना कि एक प्रसामान्य समग्र $N(\mu, \sigma^2)$ से n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है। तो हम जानते हैं कि σ^2 का अधिकतम सभावित आकलक (आगामी खण्ड में दिया गया है) $\sum (X_i - \bar{X})^2/n$ होता है जिसका कि प्रत्याशित मान

$$\frac{(n-1)\sigma^2}{n} \text{ है। किन्तु आकलक को } \sum_i (X_i - \bar{X})^2/n-1 \text{ लेने पर यह अनभिन्नता समाप्त हो जाती है अर्थात् } \sum_i (X_i - \bar{X})^2/n-1 \text{ का प्रत्याशित मान } \sigma^2 \text{ होता है।}$$

n बृहत् होने की स्थिति में इस प्रकार की शुद्धि आवश्यक नहीं है।

टिप्पणी : एक संगत आकलक (सीमा में) अनभिन्न होता है किन्तु, एक अनभिन्न आकलक का संगत होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 11.1 : एक 5 एकको वाले समग्र से 3 एकको का बिना प्रतिस्थापन के सरल यादृच्छिक रीति द्वारा प्रतिचयन किया गया है। यदि इन 5 एककों पर मान, 1250, 1500, 1650, 2200, 2050 रुपये, कम्पनियों के लाभों को निरूपित करते हैं तो समस्त सम्भव प्रतिदर्शों की परिगणना करके निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि प्रतिदर्श माध्य, समग्र माध्य का अनभिन्न आकलक है।

समग्र माध्य

$$= \frac{1}{5} (1250 + 1500 + 1650 + 2200 + 2050)$$

$$= \frac{1}{5} (8660)$$

$$= 1730$$

एककों के समस्त सम्भव प्रतिदर्शों, तथा उनके माध्य निम्न प्रकार होंगे ।

सम्भव प्रतिदर्श			प्रतिदर्श माध्य
1250	1500	1650	4400/3
1250	1500	2200	1650
1250	1500	2050	1600
1500	1650	2200	5350/3
1500	1650	2050	5200/3
1650	2200	2050	5900/3
1250	1650	2200	1700
1250	1650	2050	1650
1250	2200	2050	5500/3
1500	2200	2050	5750/3

$$\text{इन प्रतिदर्शों माध्यों का माध्य} = \frac{17300}{10}$$

$$= 1730 \quad \text{व०}$$

स्पष्ट है कि समस्त सम्भव प्रतिदर्शों के माध्यों का माध्य समग्र माध्य के समान है ।

पर्याप्त भाकलक

एक भाकलक पर्याप्त कहलाता है यदि भाकलक प्रतिदर्श में विद्यमान प्राचल सम्बन्धी पूर्ण सूचना रखता हो । पर्याप्त भाकलक को अधिक स्पष्ट रूप में इस प्रकार समझ सकते हैं । माना कि एक प्रतिदर्श में n प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं जिनका घनत्व समग्र $f(x, \theta)$ से किया गया है । $\hat{\theta}$, प्राचल θ का भाकलन है जो कि प्रेक्षणों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ पर आधारित है । यदि $\hat{\theta}$ के दिये होने पर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ का प्रतिवर्ती घनत्व θ पर निर्भर हो तो $\hat{\theta}$ एक पर्याप्त भाकलक कहलाता है ।

गणितीय भाषा में,

$$\prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) = \phi(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n | \hat{\theta}) \psi(\hat{\theta}, \theta) \quad (11.4)$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि फलन ϕ प्राचल θ से मुक्त है अर्थात् यह केवल $\hat{\theta}$ का ही फलन है । अतः $\hat{\theta}, \theta$ का पर्याप्त भाकलक है । पर्याप्त भाकलक का प्राचल

करना सदैव श्रेष्ठ है क्योंकि इस आकलन में, प्राचल θ के विषय में प्रतिदर्श में विद्यमान सम्पूर्ण सूचना का उपयोग हो जाता है। किन्तु एक प्रतिदर्शज को केवल पर्याप्तता (sufficiency) ही पूर्ण परिशुद्धि से परिभाषित नहीं करती, अपितु कुछ अन्य गुण भी आवश्यक हैं। साथ ही यह भी विदित है कि पर्याप्त आकलन का बहुत कम स्थितियों में अस्तित्व होता है।

दो आकलनों की अपेक्षित दक्षता

माना कि $\hat{\theta}_1$ और $\hat{\theta}_2$ दो आकलन हैं जो कि समग्र $f(x, \theta)$ में से दो समान परिमाण n के चयनकृत प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त होते हैं तो $E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2$ और $E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$

के अनुपात $\frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$ को $\hat{\theta}_1$ की अपेक्षा $\hat{\theta}_2$ की दक्षता कहते हैं। यहाँ E , प्रत्याशित

मान को निरूपित करता है। प्रायः यह दक्षता प्रतिशत में दी जाती है। यदि यह प्रतिशत 100 प्रतिशत से अधिक हो तो $\hat{\theta}_2$ को $\hat{\theta}_1$ से उत्तम आकलन कहते हैं।

यदि $E(\hat{\theta}_1) = \theta$ और $E(\hat{\theta}_2) = \theta$ हा तो $E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2$ और $E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2$ क्रमशः $\hat{\theta}_1$ और $\hat{\theta}_2$ के प्रसरण निरूपित करते हैं। किसी आकलन $\hat{\theta}$ की दक्षता $1/V(\hat{\theta})$ के समान होती है।

आकलन $\hat{\theta}$ दक्ष कहलाता है यदि इसके लिए निम्न दो प्रतिबन्ध सत्य हो।

(1) यदि $\hat{\theta}$, n प्रतिदर्श प्रेक्षणों पर आधारित है तो $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ का वटन अनन्तस्पर्शत प्रसामान्य है जिसका माध्य 0 और प्रसरण σ^2 के समान है।

(2) $\hat{\theta}$ का प्रसरण किसी भी अन्य आकलन $\hat{\theta}'$ के प्रसरण से कम हो जबकि $\hat{\theta}'$ भी प्रतिबन्ध (1) को सन्तुष्ट करता है। गणितीय रूप में,

$$V(\hat{\theta}) < V(\hat{\theta}') \quad \dots (11.5)$$

$$\text{या } E\{\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\}^2 < E\{\hat{\theta}' - E(\hat{\theta}')\}^2 \quad \dots (11.5.1)$$

बिन्दु आकलन की अधिकतम सम्भाविता विधि

पिछले खण्ड में दिये हुए गुण जिस आकलन में विद्यमान हो उसे अनुकूलतम या सर्वोत्तम आकलन कहते हैं। यह आकलन अनेक विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है पर इनमें से मुख्य विधि अधिकतम सम्भाविता विधि है जिसका कि वर्णन यहाँ किया गया है। अधिकतम सम्भाविता प्रतिदर्शज सर्वोत्तम अनन्तस्पर्शत प्रसामान्य वर्ग का एक उपवर्ग है। इस विधि को सर्व प्रथम फ्रार० ए० फिशर ने सन् 1912 में सक्षिप्त रूप में दिया जिसको कुछ समय पश्चात् स्वयं उन्होंने ही उन्नत रूप में प्रस्तुत किया। यह विधि इस प्रकार है—

माना कि एक सतत बटन वाले समग्र से चयन किये गये n परिमाण के प्रतिदर्शों के सम्भाविता फलन, L , को निम्न रूप में निरूपित किया गया है —

$$L(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \theta) = f(X_1, \theta) f(X_2, \theta) f(X_3, \theta) \dots f(X_n, \theta) \quad \dots(11.6)$$

और यदि समग्र का बटन असतत हो, तो

$$L(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \theta) = p_{\theta_1}(\theta) p_{\theta_2}(\theta) \dots p_{\theta_n}(\theta) \quad \dots(11.7)$$

इन प्रायिकता फलनों में केवल एक ही प्राचल θ है। अतः अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्राचल θ के एक ऐसे भाकलक या परिकलन करना है जो फलन L को अधिकतम कर देता है। यह विदित है कि यदि L, θ के किसी मान के लिए बृहत् हो तो $\log L$ भी उतना ही बड़ा होता है। अतः सम्भाविता फलन के सघुणक, $\log L$ का θ के सम्बन्ध में (with respect to) आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख देते हैं और इस समीकरण को हल करके θ का सर्वोत्तम भाकलक प्राप्त हो जाता है। गणितीय रूप में,

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta} = 0 \quad \dots(11.8)$$

इस समीकरण का कोई भी मूल, θ का अधिकतम सम्भाविता भाकलक होता है, इस विधि की विशेषता निम्न दो साध्यों (propositions) से स्पष्ट हो जायेगी।

साध्य 1 : यदि θ के एक दक्ष भाकलक $\hat{\theta}$ का अस्तित्व है तो सम्भाविता समीकरण

$$(11.8) \text{ का कोई भी हल केवल } \hat{\theta} \text{ का फलन होगा।}$$

साध्य 2 यदि θ के एक पर्याप्त भाकलक $\hat{\theta}$ का अस्तित्व है तो सम्भाविता

$$\text{समीकरण (11.8) का कोई भी हल केवल } \hat{\theta} \text{ का फलन होगा।}$$

अतः फलन (11.6) के लिए,

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sum_{i=1}^n \log f(X_i, \theta) \right\} = K(\theta) \phi(\hat{\theta} - \theta) = 0 \quad \dots(11.8.1)$$

जबकि K एक सख्या है जो कि प्रतिदर्श प्रेशनों में मुक्त है किन्तु यह θ पर निर्भर हो सकती है। समीकरण (11.8.1) का अद्वितीय हल $\theta = \psi(\hat{\theta})$ है।

उपरोक्त परिभाषायों एवं साध्यों को एक से अधिक प्राचनों के लिए व्यापक बनाया जा सकता है। माना कि एक सतत बटन, जिसके दो प्राचन θ_1 व θ_2 हैं, के लिए सम्भाविता फलन, L , निम्न है —

$$L(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \theta_1, \theta_2) = f(X_1, \theta_1, \theta_2) f(X_2, \theta_1, \theta_2) \dots f(X_n, \theta_1, \theta_2) \quad \dots(11.9)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta_1, \theta_2)$$

पहले की भाँति θ_1 व θ_2 के अधिकतम प्रायिकता फलन L का θ_1 व θ_2 के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख देने पर प्राप्त युगपत समीकरणों को हल करके, θ_1, θ_2 के आकलन प्राप्त हो जाते हैं। इस प्रकार दो समीकरण हैं —

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial \theta_1} = 0 \quad \dots (11.10)$$

$$\text{और} \quad \frac{\partial (\log L)}{\partial \theta_2} = 0 \quad \dots (11.11)$$

इसी प्रकार m प्राचलों के अधिकतम प्रायिकता फलन L का विभिन्न प्राचलों के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर प्राप्त m युगपत समीकरणों को हल करके, प्राचलों के आकलनक ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 11.2 : एक प्रसामान्य वटन, जिसके अज्ञात प्राचल μ और σ^2 हैं, में से एक n परिमाण के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो इन प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा प्राचल μ और σ^2 के अधिकतम संभावित आकलनक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। फलन,

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, \dots, X_n, \mu, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \mu)^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (X_i - \mu)^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i \{(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)\}^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n/2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{n/2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2} \{s^2 + (\bar{X} - \mu)^2\}} \end{aligned}$$

$$\text{जबकि} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

फलन $\log L$ का μ व σ^2 के सम्बन्ध में आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रख दिया, इस प्रकार प्राप्त समीकरणों को हल करके आकलनक ज्ञात कर लिये जो कि इस प्रकार हैं —

(क) μ का आकलन, जबकि σ^2 ज्ञात है,

$$\log L = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{n}{2\sigma^2} \{(\bar{X} - \mu)^2 + s^2\}$$

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial \mu} = -\frac{n}{2\sigma^2} \cdot 2(\bar{X} - \mu) = 0$$

$$\text{या } (\bar{X} - \mu) = 0 \quad \dots (i)$$

$$\text{या } \hat{\mu} = \bar{X} \quad \dots (ii)$$

इसी प्रकार σ^2 के आकलन के लिए, जबकि μ ज्ञात है,

$$\frac{\partial(\log L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2\sigma^4} \{s^2 + (\bar{X} - \mu)^2\} = 0 \quad \dots (iii)$$

$$\text{या } \sigma^2 = \{s^2 + (\bar{X} - \mu)^2\}$$

$$\text{या } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_1 (X_i - \mu)^2 \quad \dots (iv)$$

(जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, n$)

μ व σ^2 का एक साथ आकलन करने के लिए (i) और (iv) की सहायता से,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 \quad (\because \hat{\mu} = \bar{X})$$

अतः μ और σ^2 के अधिकतम संभावित आकलन क्रमशः \bar{X} और s^2 हैं। यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि यह आकलन अनन्तरगत प्रामाण्य और दक्ष है।

उदाहरण 11-3 माना कि n परिमाण के प्रतिदर्शों का द्विपद बटन वाले समग्र से चयन किया गया है जिसका प्रायिकता फलन

$$f(X, p) = p^X q^{(1-X)} \quad (\text{जहाँ } X=0, 1)$$

है। द्विपद बटन के लिए फलन,

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n, p) = \prod_{i=1}^n p^{X_i} (1-p)^{1-X_i}$$

$$(\because q=1-p)$$

$$= p^{\sum X_i} (1-p)^{n-\sum X_i}$$

$$\therefore \log L = \sum_1 X_i \log p + (n - \sum_1 X_i) \log(1-p)$$

फलन $\log L$ का p के सम्बन्ध में प्राथिक अवकलन करके शून्य के समान रख दिया। इसको हल करके p का भावलन ज्ञात कर लिया।

$$\frac{\partial (\log L)}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum X_i - \frac{(n - \sum X_i)}{1 - p} = 0$$

$$\text{या } \frac{(1 - p) \sum X_i - p (n - \sum X_i)}{p (1 - p)} = 0$$

$$\therefore (1 - p) \sum X_i - p (n - \sum X_i) = 0$$

$$\sum X_i - p n = 0$$

$$\text{या } \hat{p} = \frac{1}{n} \sum X_i \\ = \bar{X}$$

अतः p का अधिकतम सम्भावित भावलक \bar{X} है। ऊपर दिये गये उदाहरणों की भाँति हम अन्य किसी भी बटने के प्राचलो के भाकलक, अधिकतम सम्भावित विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। इन विधि के अतिरिक्त प्राचलो के अच्छे भावलक ज्ञात करने की अन्य विधियाँ हैं—(1) मापूणों के द्वारा (method of moments), (2) न्यूनतम वर्ग विधि (Method of Least squares), (3) न्यूनतम प्रसरण-विधि (Method of minimum Variance), (4) न्यूनतम चर्द वर्ग विधि (Method of minimum Chi squares) आदि। इनमें से दूसरी विधि का वर्णन अध्याय 13 व 21 में दिया गया है। अन्य विधियाँ प्रचलन में कम हैं अतः इन विधियों का विवरण नहीं दिया गया है।

अन्तराल भाकलन

बिन्दु भाकलन के द्वारा प्रतिदर्श प्रेक्षणों का एक-वह फलन ज्ञात करते हैं जो प्राचल का एक सर्वोत्तम भाकलक प्रदान करता है। बहुधा प्राचल का एक निश्चित मान जानना आवश्यक न होकर, वे सीमाएँ जानना ही पर्याप्त होता है जिनमें कि प्राचल का यह मान स्वीकृत होने की एक निश्चित प्रायिकता है। जैसे एक प्रकार के तार की तनाव क्षमता (tensile strength) या प्रत्यास्था-सीमाएँ (elastic limits) आदि ज्ञात करनी हों तो अन्तराल भाकलन अधिमाननीय है। अन्तराल भाकलन में उन दो बिन्दुओं I_1 और I_2 ($I_1 < I_2$), जो कि प्रतिदर्श प्रेक्षणा के फलन हैं, इन प्रकार ज्ञात करने होते हैं कि प्राचल θ के I_1 व I_2 के बीच में होने की प्रायिकता $(1 - \alpha)$ है।

$$\text{या } P(I_1 < \theta < I_2) = 1 - \alpha \quad \dots (11.12)$$

जहाँ α इच्छित सापेक्षता स्तर है, $(1 - \alpha)$ को विश्वास्यता गुणांक कहते हैं तथा I_2 और I_1 के अन्तर को विश्वास्यता अन्तराल कहते हैं। जितना सापेक्षता स्तर α कम होता है उतना ही विश्वास्यता अन्तराल अधिक होता है। अतः इससे हम आशय पर पहुँचते हैं कि छोटे से छोटा अन्तराल, जिसकी प्राप्तिता $(1 - \alpha)$ हो, सर्वोच्च होता है। किन्तु व्यवहार में एक ऐसे सर्वोच्च अन्तराल का अज्ञात प्राचल θ के लिए अस्तित्व नहीं है।

अतः सीमामों के अन्तर d , $(I_2 - I_1 = d)$ को न्यूनतम करना उचित है। माना कि विश्वास्यता अन्तराल कनन $E(d)$ है जो कि प्रोषित अन्तराल को प्रदर्शित करता है और θ के किसी भी मान के लिए न्यूनतम है। यदि n परिमाण के प्रतिदर्श

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

द्वारा समग्र माध्य μ का 95 प्रतिशत विश्वास्यता अन्तराल ज्ञात करना है जबकि प्रतिदर्शों का अचल प्रसामान्य समग्र से किया गया है जिसके प्राचल (μ, σ^2) है तो दो सम्पूर्ण a और b ($a < b$) ज्ञात करनी होंगी हैं जो कि निम्न समाकल को सन्तुष्ट करती हैं।

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 95 \quad \dots(11.13)$$

निम्न प्रतिस्थापन करने पर,

$$(X - \mu)/\sigma = Y \quad \text{या} \quad dX = \sigma dY$$

$$\text{जब } X = a \quad Y = (a - \mu)/\sigma$$

$$\text{और } X = b, \quad Y = (b - \mu)/\sigma$$

(11.13) में प्रतिस्थापन करने पर समाकल निम्न हो जाता है —

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = 95 \quad \dots(11.13.1)$$

इसी सिद्धान्त के आधार पर विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कर सकते हैं। व्यवहार में अधिकतर σ ज्ञात नहीं होता है अतः हमने स्थान पर इसके प्राकृतिक मान s का प्रयोग किया जाता है, यदि

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

है, तो μ को 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमामों के लिए,

$$\int_{-t_{05}}^{t_{05}} f(Y) dY = 95$$

$$P(-t_{0.05} < Y < t_{0.05}) = 95$$

$$P\left(-t_{0.05} < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{0.05}\right) = 95$$

अतः μ की विश्वास्यता सीमाएँ हैं .

$$\bar{X} \pm t_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

माध्य व प्रसरण के लिए विश्वास्यता अन्तराल अध्याय 9 में दिये जा चुके हैं। यहाँ केवल अन्तराल आकलन के सिद्धान्त को सक्षिप्त में दिया गया है।

एकसमान शक्ततम परीक्षा

परिक्ल्पना $H_0: \theta = \theta_0$ की $H_1: \theta = \theta_1$ के विरुद्ध परीक्षा में परीक्षा की सामर्थ्य वैकल्पिक परिक्ल्पना H_1 पर निर्भर करती है। गणितीय रूप में इसे $\{1 - \beta(\theta_1)\} = P(\theta_1)$ द्वारा सूचित करते हैं। प्राचल θ के फलन $P(\theta)$ को क्षमता फलन (Power function) कहते हैं। फलन $P(\theta)$ का $\theta = \theta_0$ पर मान $P(\theta_0) = \alpha$ होता है और $\theta = \theta_1$ पर मान $P(\theta_1) = \{1 - \beta(\theta_1)\}$ होता है।

बिन्दु $\theta = \theta_1$ पर वह परीक्षा जो अन्य परीक्षाओं की अपेक्षा अधिक शक्तिशाली हो अर्थात् निदिष्ट α (प्रथम प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता) के लिए जिसमें द्वितीय प्रकार की त्रुटि की प्रायिकता ' β ' न्यूनतम हो, वह परीक्षा शक्ततम होगी।

यदि कोई शक्ततम परीक्षा θ_1 के समस्त सम्भव मानों के लिए शक्ततम रहती है, तो इसे एकसमान शक्ततम परीक्षा कहते हैं। गणितीय रूप में एकसमान शक्ततम परीक्षा को निम्न रूप में दिया जा सकता है —

माना कि R एक आतिव क्षेत्र को निरूपित करता है और R' कोई अन्य आतिव क्षेत्र है और x प्रतिदर्श समष्टि में कोई एक बिन्दु है तो R के एकसमान शक्ततम परीक्षा होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध सत्य होने चाहिये —

$$(i) \quad P\{x \in R \mid \theta_0\} = P\{x \in R' \mid \theta_0\} = \alpha \quad \dots (11.14)$$

$$(ii) \quad P\{x \in R \mid \theta_1\} \geq P\{x \in R' \mid \theta_1\} \quad \dots (11.14.1)$$

$$\text{और} \quad \theta_1 \in \Omega - \theta_0$$

जहाँ θ के समस्त सम्भव मानों की समष्टि Ω है। इस Ω को प्राचल समष्टि कहते हैं।

यदि H_0 इस प्रकार हो कि $\theta \in \infty$, जहाँ ∞ प्राचल समष्टि Ω की उप-समष्टि है, तो प्रतिबन्ध (ii) में $\theta \in \Omega - \infty$ सत्य होना चाहिये।

यह बात ध्यान देने योग्य है कि इस प्रकार की परीक्षा का कम ही स्थितियों में अस्तित्व है।

सम्भावितता अनुपात परीक्षा

माना कि समग्र, $f_x(x | \theta_1, \theta_2)$, में से n परिमाण के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया गया है और प्रतिदर्श प्रेषण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ हैं। यहाँ प्राचल θ_1, θ_2 के द्विविमतीय (two dimensional) प्राचल समष्टि को विचार करना होता है। इस समष्टि में θ_1 व θ_2 के यथा सम्भव मानों का समावेश है।

माना कि प्रेषणों के एक फलन $L(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ को परीक्षा फलन के रूप में लिया गया है। तो मय यह देना है कि प्राचल मान, समष्टि ω में है या $(\Omega - \omega)$ में है। वास्तव में एकमान शक्यतम परीक्षा फलन जान करना चाहेंगे किन्तु व्यवहार में इसे प्राप्त करना कठिन है। अतः यहाँ एक ऐसी परीक्षा का गठन किया गया है जो कुछ अनुकूलतम गुण सम्पन्न है। यह परीक्षा विधि सम्भावितता अनुपात के सिद्धान्त पर निर्भर है। माना कि प्रतिदर्श प्रेषणों का प्रायिकता फलन

$$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n | \theta_1, \theta_2), f(x | \theta)$$

द्वारा निरूपित है जहाँ $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ और $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$H_0 : \theta = \omega$ में है, की $H_1 : \theta \in (\Omega - \omega)$ में है, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

परीक्षा के लिए अनुपात $L(x)$ ज्ञात करते हैं, जबकि

$$L(x) = \frac{\max_{\theta \in \omega} f(x | \theta)}{\max_{\theta \in (\Omega - \omega)} f(x | \theta)} = \frac{\psi(\omega)}{\psi(\hat{\Omega})} \quad \dots (11.15)$$

उपर्युक्त सूत्र में $\psi(\hat{\Omega})$ प्राचल समष्टि θ के अधिकतम सम्भावितता प्राचलों के लिए प्रायिकता फलन का मान है और θ के ω में जो मान प्रायिकता फलन को अधिकतम करते हैं, उन मानों के लिए प्रायिकता फलन का अधिकतम मान $\psi(\hat{\Omega})$ द्वारा निरूपित है।

(11.15) द्वारा परिचित $L(x)$ का मान कदापि शून्यतम तथा एक से अधिक नहीं हो सकता है। क्योंकि $L(x)$ दो प्रायिकता फलनों का अनुपात है। माय ही $\psi(\omega)$ या तो $\psi(\hat{\Omega})$ में कम या समान हो सकता है। इसका कारण यह है कि $f(x | \theta)$ को ω में अधिकतम करने की $f(x | \theta)$ के Ω में अधिकतम करने की प्रयत्ना कम स्वकल्पना है। अतः $L(x)$ का पराग शून्य में एक है

अर्थात् $0 < L(x) < 1$

यदि $L(x)$ का परिचित मान 1 में समान या एक से कुछ कम हो तो इसका

अभिप्राय है कि $\psi(\infty)$ और $\psi(\hat{\Omega})$ समान या एक दूसरे के लगभग समान है। इस स्थिति में H_0 को अस्वीकार करने का औचित्य नहीं है अर्थात् H_0 स्वीकार्य है। इसके विपरीत यदि $\psi(\infty)$ और $\psi(\hat{\Omega})$ निकट न हो अर्थात् यदि $L(x)$ का मान शून्य के निकट हो तो H_0 को मिथ्या समझा जाता है अर्थात् H_1 स्वीकार्य है। अतः हमें एक सख्या 'K' ज्ञात करनी है जो कि 1 से कम हो और जो इच्छित प्रथम प्रकार की त्रुटि (α) को नियन्त्रित कर सके।

यदि $L(x) < K$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर लिया जाता है अन्यथा H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस प्रकार $L(x)$ के लिए सशय अन्तराल सर्वे $0 < L < K$ की भाँति होता है। परीक्षा के हेतु K का मान, $L(x)$ के बटन और प्रथम प्रकार की त्रुटि (α) की सहायता से निम्न सम्बन्ध द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि $L(x)$ का सतत बारम्बारता बटन $g(L, H_0)$ है जबकि H_0 सत्य है।

$$\int_0^K g(L, H_0) dL = \alpha \quad \dots (11.16)$$

$L(x)$ का सशय अन्तराल ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कि H_0 के सत्य होने की स्थिति में $L(x)$ का बारम्बारता बटन ज्ञात हो।

यदि H_0 सरल परिकल्पना हो तो $L(x)$ का अद्वितीय बटन होता है। अतः K का अद्वितीय मान ज्ञात हो जाता है।

किन्तु यदि H_0 सयुक्त परिकल्पना हो तो $L(x)$ का अद्वितीय बटन का होना आवश्यक नहीं है। इस स्थिति में K का एक मान ज्ञात होना आवश्यक नहीं है। अतः ऐसी दशा में समस्या और जटिल हो जाती है और इसके निवारण के लिए परीक्षा में कुछ अन्य बातों को जोड़ना होता है किन्तु इनका वर्णन यहाँ नहीं दिया गया है। इस समस्या को इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर ही रखा गया है।

अनेकों स्थितियों में सम्भावित अनुपात परीक्षा के निम्न गुण पाये जाते हैं :—

- (1) यदि एकसमान शक्ततम परीक्षा का अस्तित्व है तो अधिकतम अनुपात परीक्षा द्वारा यह प्राप्त हो जाती है।
- (2) यदि प्रतिदर्श परिमाण बृहत् हो तो $-2 \log L(x)$, लगभग कार्ई-वर्ग (χ^2) वटित होता है जिसकी स्वतन्त्रता-कोटि, प्राचलो की सख्या के समान है।

उदाहरण 11.4 एक प्रसामान्य समष्टि, जिसके माध्य व प्रसरण क्रमशः μ व σ^2 हैं, से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है। माना कि प्रतिदर्श प्रेक्षण

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

हैं। तो परिकल्पना $H_0: \mu = C$ की $H_1: \mu \neq C$ के विरुद्ध परीक्षा, अधिकतम सम्भावित अनुपात परीक्षा द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं—यहाँ C एक ज्ञात सख्या है। प्रतिदर्श प्रायिकता घनत्व फलन,

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum_1 \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}} \quad \dots(1)$$

उदाहरण (11.2) में यह ज्ञात किया जा चुका है कि μ व σ^2 के अधिकतम सम्भावित आकलक क्रमशः निम्न हैं —

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad \dots(2)$$

और

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_1 (X_i - \bar{X})^2 \quad \dots(3)$$

इन आकलकों के मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर, $\psi(\hat{\Omega})$ निम्न है :—

$$\begin{aligned} \psi(\hat{\Omega}) &= \left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2 (2\pi)} \right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\hat{\sigma}^2}} \\ &= \frac{e^{-n/2}}{(2\pi \hat{\sigma}^2)^{n/2}} \\ &= \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n} \right) \sum_1 (X_i - \bar{X})^2} \right\}^{n/2} \cdot e^{-n/2} \quad \dots(4) \end{aligned}$$

$f(x)$ को μ में अधिकतम करने हेतु, $\mu = C$ रण दिया। प्रकरण σ^2 , H_0 के अन्तर्गत निम्न अधिकतम आकलक ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_1 (X_i - C)^2 \\ \psi(\hat{\sigma}) &= \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n} \right) \sum_1 (X_i - C)^2} \right\}^{n/2} e^{-\frac{1}{2} \sum (X_i - C)^2 / \frac{1}{n} \sum_1 (X_i - C)^2} \\ &= \left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n} \right) \sum_1 (X_i - C)^2} \right\}^{n/2} e^{-n/2} \quad \dots(5) \end{aligned}$$

यत (5) और (4) द्वारा अधिकतम सम्भावित अनुपात,

$$L = \frac{\left\{ \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sum_i (X_i - C)^2} \right\}^{n/2} e^{-n/2}}{\left\{ \frac{1}{\frac{2\pi}{n} \sum_i (X_i - \bar{X})^2} \right\}^{n/2} e^{-n/2}}$$

$$\text{अतः } L = \frac{\left\{ \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \right\}^{n/2}}{\sum_i (X_i - C)^2} \quad \dots (6)$$

अब हमें H_0 के अन्तर्गत, L का घनत्व फलन ज्ञात करना है।

$$\sum_i (X_i - C)^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - C)^2$$

(6) के द्वारा,

$$L = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{n(\bar{X} - C)^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}} \right\} \quad \dots (7)$$

सूत्र (9.1) की सहायता से,

$$t^2 = \frac{n(n-1)(\bar{X} - C)^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\text{या } \frac{n(\bar{X} - C)^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} = \frac{t^2}{(n-1)}$$

अतः समीकरण (7) निम्न हो जाता है :—

$$L = \left\{ \frac{1}{1 + t^2/(n-1)} \right\}^{n/2} \quad \dots (8)$$

जबकि t की स्व० को० $(n-1)$ है। t के घनत्व फलन में, (8) द्वारा प्रतिस्थापन करने पर, L का घनत्व फलन ज्ञात हो जाता है जो कि निम्न प्रकार है :—

हम जानते हैं कि t का घनत्व फलन निम्न है :—

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)^{1/2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\therefore g(L, H_0) = \frac{1}{(n-1)^{1/2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \quad \dots (9)$$

$$\text{या } L \frac{n(n+1)}{n-1}$$

(1) का प्रयोग सूत्र (11.16) द्वारा K का मान ज्ञान कर सकते हैं। साम्प्रद में यहाँ L का घटन ज्ञान करन की आवश्यकता नहीं है क्योंकि L, t^2 का एक एकदिष्ट ह्यम-मान फनन (monotonic decreasing function) है। अतः हम t^2 से वही परीक्षा कर सकते हैं जो कि L में की जा सकती है।

सम्बन्ध (8) में स्पष्ट है कि

$$\text{यदि } t^2 = 0 \text{ हां तो } L = 1 \text{ है और } t^2 = \infty, \text{ हो तो } L \rightarrow 0$$

इस प्रकार सम्य घनराज $0 < L < K$, अन्तराज $t^2 > A$ के सुप्य है जबकि A का मान, सम्बन्ध (8) में K व द्वारा ज्ञान किया जा सकता है।

माना कि यहाँ दो पुच्छ परीक्षा है। इसके लिए प्राक्तिक क्षेत्र α के समान लिया जाने की स्थिति में, H_0 के विषय में निर्णय निम्न निवमानुसार कर सकते हैं।

यदि $t > t_{\alpha/2, (n-1)}$ हां तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर दिया जाता है जबकि,

$$t = \frac{\sqrt{n(n-1)}|\bar{X} - C|}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2}}$$

टिप्पणी : इसी प्रकार व उदाहरण अन्व परिवर्तनमाप्य की परीक्षा के हेतु भी दिये जा सकते हैं जैसे n बरन्तूकी परीक्षण के लिए जबकि सन्नता की प्रायिकता P है। $H_0 : P = \frac{1}{2}$ की $H_1 : P \neq \frac{1}{2}$ के विरुद्ध अधिष्ठनम ममाविता अनुपात परीक्षा करनी हो तो दो हुई विधि का प्रयोग कर सकते हैं। पाठ्य इस परीक्षा को स्वयं करने देंगे।

प्रश्नावली

- 1 एक प्रसामान्य समष्ट में चयनरूत n प्रतिदर्श प्रेषणा के आधार पर परिवर्तनमाप्य $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ की अधिष्ठनम ममाविता अनुपात परीक्षा कीजिये।
- 2 एक समष्ट का सनाविता फनन $f(x) = \frac{1}{a}$ है जबकि $0 < x < a$ इस समष्ट में एक n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो प्राचल a का अधिष्ठनम ममाविता आधारसक ज्ञान कीजिये।
- 3 द्विपद घटन फनन,

$$f(r) = \binom{n}{r} \frac{p^r q^{n-r}}{1 - q^n} \quad \text{जहाँ } r=1, 2, 3, \dots, n$$

में p का अधिष्ठनम ममाविता आधारसक ज्ञान कीजिये जबकि $n=2$

- 4 क्या प्रतिदर्श माध्य सर्वत्र एक समष्ट माध्य का दत्त आधारसक है? अपने उत्तर की सप्यो के आधार पर पुष्टि कीजिये।

5. प्वासो बटन $\frac{e^{-m} m^r}{r!}$ के लिए m का अधिकतम सम्भावित प्राकलन ज्ञात कीजिये।

6. एक आयतीय समूह (rectangular population)

$$f(x, \beta) = \frac{1}{\beta}, \quad 0 < x < \beta, \quad 0 < \beta < \infty$$

$$= 0, \quad \text{अन्यथा}$$

से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर β का अधिकतम सम्भावित प्राकलन ज्ञात कीजिये।

7. एक चरघाताकी समूह (exponential population)

$$f(x; \alpha, \beta) = y_0 e^{-\beta(x-\alpha)}, \quad \alpha < x < \infty$$

$$= 0 \quad \text{अन्यथा}$$

(जहाँ y_0 एक स्थिरांक है) से चयनकृत n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर α और β के अधिकतम सम्भावित प्राकलन ज्ञात कीजिये। (दिल्ली, 1959)

□ □ □

प्रतिचयन से अभिप्राय किसी समग्र म से नियमानुसार कुछ एकको का चयन करना है। अतः एकका के चयन करने के लिए नियमों के निर्धारण को प्रतिचयन विधियाँ कहते हैं।

प्रतिचयन सांख्यिकी विज्ञान का एक मुख्य भाग है क्योंकि अधिकांश अध्ययन प्रतिदर्श पर ही आधारित होते हैं। प्रतिदर्श अध्ययन के अतिरिक्त कुछ अध्ययन पूरा परिगणन (Complete enumeration) पर भी आधारित होते हैं। इन अध्ययनों में प्रत्येक एकक पर प्रेषण लिये जाते हैं जैसे किसी शहर में कर (Tax) देन वालों की संख्या या किसी वस्तु का फैक्ट्रिया द्वारा कुल उत्पादन आदि के विषय में जानना है। परन्तु अल्प कुछ स्थितियों में समग्र का किसी लक्षण के प्रति पूरा परिगणन करना एक कठिन समस्या है। जैसे दिल्ली में परिवारों की औसत आय तथा व्यय का पता लगाना या दिल्ली की जनता के रक्त वर्ग के बंटन का पता लगाना आदि जानकारी के लिए पूरा परिगणन एक कठिन समस्या है क्योंकि इसके लिए अधिक समय धन एवं प्रशिक्षित व्यक्तियों की आवश्यकता होती है जिनका कि अधिकतर उपलब्ध हार्ना कठिन है।

आजकल देश या विदेश में चल रही विभिन्न योजनाओं का जनता पर प्रभाव और आगे बनायी जाने वाली योजनाओं के लिए जानकारी या नये नियमों के कारण जनता पर सामाजिक एवं आर्थिक दृष्टि से प्रभाव जानना लगभग आवश्यक हो गया है। इन जानकारी के हेतु अत्यधिक समय या धन लगाना उचित नहीं समझा जाता है। अतः पूर्ण परिगणन की अपेक्षा प्रतिदर्श अध्ययन एक उचित माग है।

कुछ अध्ययनों में जिनमें कि प्रेषण सेते समय वस्तु या जीव का विनाश हो जाता है इनकी पूर्ण परिगणना करना अनुचित है। पूरा विनाश पहले ही कर दिया तो अध्ययन का क्या लाभ होगा? जैसे एक फैक्ट्री द्वारा उत्पादित बिजली के बल्बों का माध्य जीवन काल ज्ञात करना हो उत्पादित तार को टूटने की शक्ति जानना हो किसी व्यक्ति के मृत्यु की जांच करनी हो या पत्तीसी में खटे चाबला के पकने की जांच करना, आदि परीक्षण करने में एकको के विनाश हो जाने के प्रत्यक्ष उदाहरण हैं।

कुछ व्यक्ति समझते हैं कि प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त परिणाम त्रुटि युक्त होते हैं और पूर्ण परिगणन द्वारा प्राप्त परिणाम शुद्ध होते हैं। किन्तु उनका यह विचार सत्य नहीं है क्योंकि दोनों ही विधियाँ त्रुटिपूर्ण हैं। इनके साथ-साथ सदैव परिशुद्ध परिणामों की आवश्यकता भी नहीं होती है। किसी विषय में अनुमान लगाने के लिए न तो पूर्ण परिगणन किया जा सकता है और न इसकी आवश्यकता है जैसे आने वाली धूम्र में कुल उत्पादन या आने वाले कुछ वर्षों में किसी देश या शहर की जनसंख्या आदि का अनुमान लगाना है।

प्रतिदर्श अध्ययनों में दो प्रकार की त्रुटि होती हैं (क) प्रतिचयन त्रुटि (Sampling error) (ख) प्रतिचयन त्रुटि (Non-Sampling error)

(क) वे त्रुटियाँ जो प्रतिदर्श के चयन अथवा प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आघार पर समग्र के प्रति निर्णय लेने में उत्पन्न होती हैं प्रतिचयन त्रुटियाँ कहलाती हैं। जैसे जैसे प्रतिदर्श परिमाण बढ़ता है प्रतिचयन त्रुटियाँ कम होती हैं। प्रारम्भ में तो इस त्रुटि में कमी अधिक होती है किन्तु एक अवस्था के बाद यह कमी नाम मात्र ही रह जाती है। अतः प्रतिदर्श का अनुकूलतम परिमाण (optimum size) ज्ञान करके सर्वेक्षण के व्यय को पर्याप्त मात्रा में घटाया जा सकता है। निर्णय लेने के लिए एक सीमा तक त्रुटि को स्वीकार्य कर लेते हैं। वह छोटे से छोटा प्रतिदर्श-परिमाण जिसे त्रुटि का उस सीमा में रहना आगम्य निश्चित हो, अनुकूलतम परिमाण कहलाता है।

(ख) अप्रतिचयन त्रुटियाँ वे हैं जो आँकड़े लेने व प्राप्ति-न्याय (data) की प्रक्रिया (processing) करने के समय होती हैं। वे त्रुटियाँ पूर्ण परिगणन एवं प्रतिदर्श सर्वेक्षण दोनों ही स्थितियों में होती हैं। पूर्ण परिगणन में प्रतिचयन त्रुटि का तो प्रश्न ही नहीं है किन्तु इससे प्रतिदर्श सर्वेक्षण की अपेक्षा अप्रतिचयन त्रुटि प्रायः अधिक होती है। जैसे,

(i) न्याय के समग्र अर्थात् प्रेक्षणों के लेने में त्रुटि।

(ii) यदि एक सर्वेक्षण में अनेकों भेदकर्त्ता (investigators) हैं तो उनके साक्षात्कार विधि में अन्तर के कारण त्रुटि।

(iii) सारणीयन में त्रुटि, आदि।

प्रतिचयन त्रुटि को कम करने का एक मान्य उपाय, उचित प्रतिचयन विधि व प्रतिदर्श परिमाण और अन्य उत्तम प्रविधियों का प्रयोग करना है जबकि अप्रतिचयन त्रुटि अच्छे प्रबन्ध तथा कुशल व्यक्तियों की सेवाओं को प्राप्त करके कम की जा सकती है।

यादृच्छिक या प्रायिकता प्रतिचयन

माना कि एक समग्र में N एकको $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$ हैं और इनमें से n एकको का चयन किसी विशिष्ट विधि द्वारा किया गया हो तो ये एक-एक प्रतिदर्श का गठन करते हैं। प्रतिचयन करने की विशिष्ट विधि यदि प्रायिकता के नियमों पर आधारित हो तो इसे यादृच्छिक या प्रायिकता प्रतिचयन कहते हैं। जैसे N समग्र एकको में से प्रत्येक एकको का चयन समान प्रायिकता से प्रतिस्थापन या बिना प्रतिस्थापन सहित किया गया हो तो यह सरल यादृच्छिक प्रतिचयन कहलाता है। प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में प्रत्येक एकको चयन होने के पश्चात् पुनः समग्र में सम्मिलित कर दिया जाता है और बिना-प्रतिस्थापन के प्रतिचयन में एक एकको को चयन करने के पश्चात् समग्र से अलग ही रखा जाता है अर्थात् प्रतिदर्श में एक एकको एक ही बार सम्मिलित हो सकता है। व्यवहार में अधिकतर बिना प्रतिस्थापन के प्रतिचयन का प्रयोग होता है। यादृच्छिक प्रतिचयन के सामान्य गुण निम्न हैं —

समग्र के प्रत्येक एकको के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने से सम्बद्ध प्रायिकता ज्ञात होनी चाहिये और शून्य से अधिक होनी चाहिए।

वह एकको जिनका प्रतिदर्श के लिए चयन किया जाता है उन्हें प्रतिदर्श एकको कहते हैं और इन एकको पर लिए गये माप प्रतिदर्श प्रेक्षण कहलाते हैं।

प्रतिदर्श परिमाण 'n' व समग्र परिमाण 'N' के अनुपात $\frac{n}{N}$ को प्रतिचयनानुपात

(sampling fraction) कहते हैं और इसे प्रायः f से सूचित करते हैं।

यदि समग्र से प्रतिदर्श एकको का चयन यादृच्छिक न हो तो इस प्रकार की प्रतिचयन विधि को अयादृच्छिक प्रतिचयन विधि कहते हैं तथा इस विधि द्वारा प्राप्त प्रतिदर्श को अयादृच्छिक प्रतिदर्श कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिदर्श का चयन किसी सहायक सूचना के अनुसार व्यक्तिगत रूप से लिया जाता है और यह आशा की जाती है कि यह प्रतिदर्श समग्र का एक अच्छा प्रतिनिधि है। ऐसे प्रतिदर्श को सोद्देश्य प्रतिदर्श (purposive sample) कहते हैं। किन्तु ऐसे प्रतिदर्श में सर्वदृष्टिगत अभिनति (bias) होने की सम्भावना रहती है और साथ ही इस प्रकार के प्रतिचयन के लिए कोई प्रतिचयन सिद्धान्त भी नहीं दिया जा सकता है। अतः किसी विशेष स्थिति या को छोड़कर सर्वदृष्टिगत प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा चयनकृत प्रतिदर्श अधिक विश्वसनीय होता है। कुछ मुख्य-मुख्य प्रायिकता प्रतिचयन विधियों का वर्णन इस अध्याय में दिया गया है।

समग्र और प्रतिचयन यूनिट

सर्वेक्षण करने से पूर्व समग्र के विषय में तय करना होता है। यह एक निश्चित क्षेत्र में वह सम्पूर्ण समुदाय है जिसके विषय में जानकारी प्राप्त करना है जैसे किसी फँद्री द्वारा उत्पादित बत्तों का समूह या ग्राम्य कोई पदार्थ, राजस्थान में सभी खेत, एक बरग में सगे हुए सभी फल, एक खेत में विद्यमान कीट, एक शहर में सभी परिवार या किसी प्रान्त में बेकारों का समूह आदि समग्र के रूप में लिए जा सकते हैं। समग्र का रूप एक आकार सर्वेक्षण या अनुसंधान के क्षेत्र एवं लक्ष पर पूर्णतया आधारित है।

प्रतिचयन में समग्र के कुछ एकको का चयन करना होता है जिन पर प्रतिक्रिया एवं प्रतिक्रिया करने होते हैं। प्रत्येक एकको को प्रतिचयन एकक कहते हैं। समग्र के इन एकको को निर्धारित करते समय आवश्यक सावधानी बतानी चाहिये। ये एकक सर्वेक्षण द्वारा जानकारी के प्रकार और स्तर पर आधारित हैं अर्थात् क्या जानकारी प्राप्त करनी है और वह किस एकको द्वारा प्राप्त हो सकती है इन सध्या पर ध्यान देना आवश्यक है। यदि कोई उपाय सम्भव हो तो इनमें से सर्वोत्तम एकको को चयन करना होता है अर्थात् अनुकूलतम एकको (optimum units) का निर्धारण करना होता है। परिभाषा के अनुसार अनुकूलतम एकक वह है जिसके द्वारा न्यूनतम व्यय करने पर इच्छित परिशुद्ध प्राप्ति प्राप्त हो या निश्चित व्यय करने पर अधिकतम परिशुद्ध प्राप्ति प्राप्त हो। एकक का आकार न तो अधिक बड़ा होना चाहिये और न छोटा ही। इस स्थिति में व्यय एवं परिशुद्धि में एक प्रश्न का अनुत्पन्न हो जाता है। जैसा एक प्रौद्योगिक सर्वेक्षण में एक फँद्री को एकक के रूप में लिया जाना उपयुक्त है, अनाज की उपज सम्बन्धी सर्वेक्षण में एक फेड़ को एकक के रूप में लेना चाहिये, रहन-सहन के स्तर को जानने हेतु सर्वेक्षण में एक परिवार को एकक लिया जाना उचित है इसी प्रकार के अनेक अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं।

प्रतिचयन ढाँचा

समग्र में से किसी यादृच्छिक प्रतिदर्श चुनने के लिए उसके एकको की एक सूची आवश्यक है। इन सूची को 'प्रतिचयन ढाँचा' कहते हैं। सूची में इन एकको का विवरण रहता है प्रत्येक को एक क्रम संख्या से सूचित किया जाता है।

यादृच्छिक संख्या सारणी और इसका उपयोग

यादृच्छिक संख्या-सारणी की रचना सर्वप्रथम फिशर और येट्स (Fisher & Yates) ने की। इस सारणी में प्रत्येक स्तम्भ में यादृच्छिक रीति द्वारा प्राप्त 0 से 9 तक अंक दिये होते हैं। जस्ता कि इस सारणी को देखने से स्पष्ट है। समग्र के N एकको को किसी क्रमानुसार 1 से N तक अंकित कर देने हैं। फिर यह देख लेते हैं कि संख्या N में कितने अंक हैं। जितने अंक होते हैं उनमें ही, यादृच्छिक संख्या सारणी में से, सलगन (adjacent) स्तम्भ ले लिये जाते हैं। इन स्तम्भों को साथ मानकर प्रारम्भ में संख्या पढ़ना प्रारम्भ करते हैं और यदि यह संख्या 1 से N तक में है तो वह एक अंक जिस पर वह संख्या अंकित है, प्रतिदर्श अंक के रूप में स्वीकार कर लिया जाता है और फिर अगली संख्या पढ़ते हैं और फिर इस संख्या को 1 से N तक होने की स्थिति में स्वीकार करके इस संख्या वाले एकको को प्रतिदर्श में सम्मिलित कर लेते हैं, अन्यथा संख्या को छोड़ दिया जाता है। यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि प्रतिदर्श के n एकको का चयन न हो जाय।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि यह विधि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन है। उदाहरण-तया माना कि समग्र में 14 एकको हैं और 4 एकको का प्रतिदर्श के लिए चयन करना है।

समग्र में एकको $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{14}$ हैं। तो यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रथम दो स्तम्भ देखकर 1 से 14 के बीच की संख्याएँ 11, 05, 12, 09 प्राप्त होती है अर्थात् प्रतिदर्श एकको U_{11}, U_5, U_{12}, U_9 चयनित हैं। इन्हीं एकको पर किसी भी लक्षण के प्रति प्रेक्षण लेकर, प्राचला के भागणक आदि प्राप्त कर सकते हैं।

यदि समग्र में एकको की संख्या 'N' 100 से 999 तक हो अर्थात् संख्या में तीन अंक हों तो यादृच्छिक संख्या-सारणी के तीन स्तम्भों को लेकर प्रारम्भ से संख्याएँ पढ़ते जाते हैं और ऊपर की भाँति यदि यह संख्या 1 से N के बीच में हो तो स्वीकार कर ली जाती है अन्यथा अस्वीकार कर दी जाती है।

यह ध्यान रहे कि सारणी में से कोई भी स्तम्भ लिये जा सकते हैं किन्तु इनको लेने से पूर्व यह नहीं देखना चाहिए कि इसमें कौन-कौनसी संख्याएँ हैं या नहीं हैं।

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

परिभाषा : N एकको के समग्र में से n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करने की विधि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन कहलाती है यदि N एकको में से n एकको के सभी सम्भव संचयों के चयन किये जाने की प्रायिकता समान हो। उदाहरणतः माना कि समग्र में केवल चार एकको A, B, C, D हैं जोकि एक-दूसरे से किसी लक्षण के प्रति भिन्न हैं। इसमें से 2 एकको के प्रतिदर्श का यादृच्छिक विधि से चयन करना है। इस परिमाण के

कुल सम्भव प्रतिदर्श छ हो सकते हैं जोकि निम्न प्रकार हैं :—

$$AB, AC, AD, BC, BD, CD$$

जबकि इस घोर कोई ध्यान नहीं दिया गया है कि एक कित्त कम में चयन किये गये हैं। कोई भी ऐसी विधि जिनके प्रयत्नाने पर इनमें से प्रत्येक प्रतिदर्श के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ हो, एक सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि कहलाती है।

N परिमाण के परिमित समग्र में से, n परिमाण के बिना प्रतिस्थापन द्वारा चयन किये गये सम्भव प्रतिदर्शों की संख्या $\binom{N}{n}$ है और इनमें से प्रत्येक, एक उचित प्रतिदर्श है। सरल यादृच्छिक प्रतिचयन में इनमें से प्रत्येक के चयन होने की प्रायिकता $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ है।

सरल यादृच्छिक प्रतिचयन करने की विधि को यादृच्छिक सख्या सारणी के उपयोग के अन्तर्गत दे दिया गया है। सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श द्वारा सभी अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं जबकि विचाराधीन घर के प्रति समग्र सजातीय हो या इससे पर्याप्त बृहत् प्रतिदर्श का चयन किया जाये। सर्वेक्षण का व्यय अधिक हो जाने के कारण अधिक बृहत् प्रतिदर्श का चयन करना प्रायः असम्भव हो जाता है। अतः यदि समग्र में विजातीयता हो तो अन्य किसी विधि का प्रयोग करना उपयुक्त है।

माध्य तथा प्रसरण के लिए सूत्र

माना कि समग्र में N एक $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$ हैं और इन पर किसी लक्षण के प्रति प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ हैं। इस समग्र से n प्रतिदर्श एकत्रों का सरल यादृच्छिक रीति द्वारा चयन किया गया है और उस लक्षण के प्रति प्रेक्षण $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं। यदि समग्र माध्य व प्रसरण क्रमशः μ और σ^2 हैं तथा प्रतिदर्श माध्य व प्रसरण \bar{x} व s^2 हैं तो

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad \dots (12.1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 \quad \dots (12.2)$$

इसमें प्रतिरिक्त एक मर्या S^2 , जो कि σ^2 से कुछ भिन्न है, को विचार करना होता है, जहाँ,

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu)^2 \quad \dots (12.3)$$

हम μ का आकलन करना चाहते हैं।

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i$$

μ का एक अनभिन्नत आकलक है। और

$$V(\bar{x}) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) S^2 \quad \dots (12.4)$$

$V(\bar{x})$ को भी प्रतिदर्श प्रेषणों द्वारा आकलित कर सकते हैं। इसका एक अनभिन्नत आकलक,

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) s^2 \quad \dots (12.5) \\ &= s^2 \frac{x}{x} \end{aligned}$$

है। जहाँ,

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

यदि $\frac{1}{N}$ उपेक्षणीय हो तो

$$v(\bar{x}) = s^2 \frac{x}{x} = \frac{s^2}{n} \quad \dots (12.5.1)$$

\bar{x} के मानक विचलन $\sqrt{V(\bar{x})}$ को \bar{x} की मानक त्रुटि (standard error) कहते हैं।

टिप्पणी . किसी आकलन के मानक विचलन को उस आकलन की मानक त्रुटि कहते हैं।

यदि हम μ का नही बरन् समग्र योग $X = \sum_{i=1}^N X_i$ का आकलन चाहें तो आकलक $\hat{X} = N \bar{x}$ अनभिन्नत होता है। इसका प्रसरण,

$$V(\hat{X}) = N^2 V(\bar{x}) \quad \dots (12.6)$$

$$= \frac{N(N-n)}{n} S^2 \quad \dots (12.7)$$

है। इस प्रसरण का एक अनभिन्नत आकलक,

$$\frac{N(N-n)}{n} s^2 \quad \dots (12.8)$$

है।

अनुपात की स्थिति में सूत्र

मान लीजिये कि समग्र में N एक क कुछ वर्गों में विभाजित है और हम एक विशेष वर्ग G में एकको की संख्या N' का अनुपात P जानना चाहते हैं। यदि सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श के n एकको में से n' इस वर्ग-विशेष के हैं तो इस अनुपात P का एक अनभिन्नत आकलक

$$p = \frac{n'}{n} \quad \dots (12.9)$$

है।

p का प्रसरण,

$$V(p) = \frac{N-n}{n} \frac{P(1-P)}{N-1} \quad \dots (12.10)$$

इस प्रसरण का एक अनभिन्नत आकलक,

$$v(p) = \frac{N-n}{N(n-1)} p(1-p) \quad \dots (12.11)$$

$$= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{pq}{n-1} \quad \dots (12.11.1)$$

$$= s_p^2$$

यदि प्रतिचयन अनुपात $\frac{n}{N}$ समु हो अर्थात् 0.5 या इससे कम हो तो $\frac{n}{N}$ उपेक्षणीय

मान लिया जाता है और इस स्थिति में,

$$s_p^2 = \frac{pq}{n-1} \quad \dots (12.11.2)$$

हो जाता है।

विश्वास्यता सीमाएँ

समग्र माध्य μ की विश्वास्यता सीमाओं के लिए विवरण अध्याय 9 में दिया गया है। इनका परिवर्तन सूत्र (9.9) द्वारा कर सकते हैं। यहाँ P की विश्वास्यता सीमाओं का ही वर्णन एवं सूत्र दिया गया है।

वर्ग G_1 में प्रतिशत α एका μ का अनुपात P है और यह मान लिया कि प्रतिदर्श परिमाण n बृहत् है। अतः प्रणामाग्य बदल का प्रयोग किया जा सकता है। $(1 - \alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का अर्थ है कि $\alpha/2$ परिमाण का आदिक-क्षेत्र प्रणामाग्य बक्र की दोनों पुच्छ का और होता चाहिये।

माना कि $\alpha/2$ संक्षय अन्तःफल के लिए प्रसामान्य विचर Z_{α} या $-Z_{\alpha}$ है जैसा कि चित्र (12-1) में दिखाया गया है। बृहत् प्रतिदर्श की स्थिति में अनुपात P के लिए



चित्र 12-1 प्रसामान्य वक्र में दोनो पुच्छों की धोर $\alpha/2$ आतिव-क्षेत्र विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सम्बन्ध द्वारा ज्ञान कर सकते हैं —

$$P_r \{ p - Z_{\alpha} s(p) < P < p + Z_{\alpha} s(p) \} = 1 - \alpha$$

अर्थात् P की उपरि तथा निम्न सीमाएँ,

$$\left. \begin{aligned} U(P) &= p + Z_{\alpha} s(p) \\ L(P) &= p - Z_{\alpha} s(p) \end{aligned} \right\} \quad \dots (12.12)$$

$$\text{जबकि} \quad s(p) = \sqrt{\left(\frac{pq}{n-1}\right) \left(\frac{N-n}{N}\right)}$$

यहाँ $s(p)$ के लिए सूत्र में प्रतिचयन भिन्न को लेना आवश्यक है क्योंकि n को बृहत् लिया गया है।

प्रतिदर्श परिमाण

सर्वेक्षण की योजना को तयार करते समय एक स्थिति ऐसी आती है कि प्रतिदर्श के परिमाण का निर्णय करना होता है। किसी प्रतिदर्श का परिमाण मुख्यतः समग्र की विजातीयता पर निर्भर करता है, जितनी विजातीयता अधिक होती है उतने ही बृहत् परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करना होता है। किन्तु यदि समग्र पूर्णतया सजातीय हो तो समग्र के एक एक या भ्रम पर प्रेक्षण के द्वारा पूर्ण जानकारी या प्राचल मान ज्ञात किये जा सकते हैं जैसे शरीर में खून पूर्णतया सजातीय होता है और केवल एक बूँद की जाँच करके सही परिणाम ज्ञात हो जाते हैं। किन्तु ऐसी स्थिति बहुत कम पायी जाती है। अतः समग्र से किस परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया जाये यह निर्णय करना अत्यन्त आवश्यक है। प्रतिदर्श परिमाण के विषय में निर्णय लेने समय निम्न बातों का ध्यान रखना अत्यन्त आवश्यक है :-

(1) सर्वेक्षण के उद्देश्य का स्पष्ट विवरण दिया जाना चाहिये। इस चयन में यह बताना चाहिये कि अन्त से किन विषयों पर निर्णय लेने हैं।

(2) सर्वेक्षणकर्ता कितनी सूक्ष्मता से परिणाम प्राप्त करना चाहता है अर्थात् धारकन में कितनी त्रुटि तक सहन की जा सकती है। इस त्रुटि को क्षम्य त्रुटि (permissible error) कहते हैं। यदि $\pm 10\%$ त्रुटि स्वीकार करने के विषय में सर्वेक्षणकर्ता अपनी अनुमति देता है और प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आकलक का मान p प्रतिशत है तो किसी सङ्घ के प्रति समग्र में प्रतिशत $(p+10)$ और $(p-10)$ के बीच स्थित होगा। आकलक को परम शुद्ध मानना भी असम्भव है। अतः यह परिणाम गलत हो सकने की कुछ प्रायिकता माननी होगी है, जिसे सार्पकता स्तर द्वारा सम्बोधित करते हैं।

प्रतिदर्श परिमाण 'n' के लिए सूत्र

माना कि आकलित माध्य और समग्र माध्य में अन्तर d को सहन किया जा सकता है अर्थात् क्षम्य त्रुटि है। गणितीय भाषा में,

$$|\bar{X} - \mu| < d$$

जब कि प्रतिदर्श माध्य \bar{x} है और μ समग्र माध्य है। माना कि $(1 - \alpha)$ इच्छित विश्वास्यता स्तर है या α सार्पकता स्तर है तो $|\bar{x} - \mu| < d$ से अधिक न होने की प्रायिकता,

$$P_r \{ |\bar{x} - \mu| > d \} = \alpha \quad \dots (12.15)$$

$$\text{या } P_r \{ |\bar{x} - \mu| < d \} = 1 - \alpha \quad \dots (12.15.1)$$

अतः हमें इतने परिमाण के प्रतिदर्श का चयन करना है कि यदि \bar{X} और μ का अन्तर d से अधिक न हो अर्थात् वह प्रतिदर्श परिमाण ज्ञान करता है कि अन्तर d , α सा० स्तर पर विश्वास्यता अन्तराल में ही रहे।

माना कि किसी समग्र से एक प्रतिदर्श का चयन सरल यादृच्छिक विधि द्वारा बिना प्रतिस्थापन के किया जाता है। N परिमाण के समग्र से यदि n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया जाना उचित है तो इसके लिए सूत्र निम्न प्रकार है :-

यदि चर X के लिए प्रतिदर्श माध्य \bar{x} का बंटन प्रसामान्य है तो सूत्र (12.4) द्वारा विहित है कि,

$$V(\bar{x}) = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{S^2}{n}$$

विश्वास्यता अन्तराल विधि के अनुसार प्रतिदर्श परिमाण n के लिए α सार्पकता स्तर पर सारणी (घ-2) द्वारा प्राप्त प्रसामान्य विचर Z का मान Z_α ज्ञात कर लेते हैं। प्रतिदर्श परिमाण इतना हो कि जिससे अन्तर d का अभिलान नु सके। इसके लिए निम्न समीकरण सत्य होनी चाहिए :-

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{N-n}{N} \cdot \frac{S^2}{n}}} > Z_\alpha \quad \dots (12.16)$$

$$\text{या } n \left\{ 1 + \frac{1}{N} \left(\frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right)^2 \right\} \geq \left\{ \frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right\}^2$$

अतः n का न्यूनतम मान निम्न है —

$$n = \frac{\left(\frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right)^2}{1 + \frac{1}{N} \left(\frac{Z_{\alpha} \cdot S}{d} \right)^2} \quad \dots(12.17)$$

ध्ववहार में S का मान ज्ञात नहीं होता है। इसका मान किसी पिछले सर्वेक्षण या प्रयोग के आधार पर उनी चर या सम्बन्धित चर पर दिये गये आकलनों द्वारा मान लेते हैं। यदि इस प्रकार की कोई पिछली गिपॉट उपलब्ध न हो तो एक लघु प्रतिदर्श का चयन करके चर X पर प्रेक्षण लेकर प्रसरण S^2 के विषय में अनुमान लगा लेते हैं।

यदि अनुपातों की स्थिति में ' n ' का मान ज्ञात करना हो तो S^2 के मान $\frac{N-n}{N-1} \frac{PQ}{n}$ का मूत्र (12.17) में प्रतिस्थापन करने पर n के लिए निम्न सूत्र प्राप्त हो जाता है —

$$n = \frac{\left(Z_{\alpha}^2 \cdot \frac{PQ}{d^2} \right)}{1 + \frac{1}{N} \left(Z_{\alpha}^2 \cdot \frac{PQ}{d^2} - 1 \right)} \quad \dots(12.18)$$

S^2 का अनुमानित मान ज्ञात करने सम्बन्धी विस्तृत ज्ञान के लिए Deming द्वारा लिखित पुस्तक 'Some Theory of Sampling' को पढ़िये।

कठिनाइयाँ—प्रतिदर्श परिमाण निर्धारित करते समय एक और समस्या उत्पन्न होती है। वह यह कि अन्तर d केवल एक लक्षण, पद या चर के लिए माना गया है जबकि सर्वेक्षण द्वारा अनेको लक्षण या चर के विषय में आंकड़े एकत्रित किये जाते हैं और इनसे आकलन किया जाता है। इस कठिनाई को हल करने की निम्न विधियाँ हैं :—

(1) सर्वेक्षण केवल उन चरों या लक्षणों के प्रति किया जाय जो लगभग एक ही प्रकार के हों।

(2) पहिले सर्वेक्षण में मुख्य-मुख्य चरों के लक्षण या पद के लिए क्षम्य त्रुटि d को धनग-धनग निश्चित कर लिया जाये और प्रत्येक के लिए प्रतिदर्श परिमाण का आकलन कर लें। इनमें से सर्वाधिक n को प्रतिदर्श परिमाण के रूप में ग्रहण कर लिया जाता है। किन्तु ऐसा पर्याप्त साधनों के उपलब्ध होने पर ही किया जा सकता है। यदि n के आकलित मानों में अधिक विचलन हो और सर्वाधिक n का मान स्वीकार करना सम्भव न

हो तो या तो इन पदों को सर्वेक्षण से निकाल देना चाहिए या तबु न को लेकर इनका कम परिशुद्ध आकलन कर लेना चाहिए ।

(3) सर्वेक्षण में विभिन्न चरों के कारण केवल प्रतिदर्श परिमाण के निश्चित करने की कठिनाई के अतिरिक्त प्रायः यह भी आभास होता है कि सब चरों के लिए एक ही प्रकार की प्रतिचयन विधि उपयुक्त नहीं है । इस कठिनाई को दूर करने का एकमात्र उपाय यह है कि केवल उन चरों को सर्वेक्षण में सम्मिलित किया जाये जिनके लिए एक ही प्रतिचयन विधि उपयुक्त प्रतीत होती हो ।

स्तरित प्रतिचयन

परिभाषा एक समग्र को किसी लक्षण के आधार पर कुछ सजातीय वर्गों [स्तरों (strata)] में विभाजित करने और प्रत्येक वर्ग [स्तर (stratum)] में से एक स्वतन्त्र प्रतिदर्श का चयन करने की क्रिया को स्तरित प्रतिचयन कहते हैं ।

इस प्रकार के प्रतिचयन की आवश्यकता मुख्यतया तब होती है जबकि समग्र में किसी लक्षण के प्रति विजातीयता हो और सीमित व्यय ही करना हो । स्तरित प्रतिचयन करने के कुछ कारणों को निम्न प्रकार समझ सकते हैं —

- (i) यदि स्वीकार योग्य त्रुटि दी हुई हो तो कम प्रतिदर्श परिमाण पर्याप्त कम व्यय की आवश्यकता होती है या यदि कुल व्यय दिया हो तो त्रुटि कम होती है ।
- (ii) बहुधा समग्र के कुछ भागों के माध्यमों के मानों का आकलन करना आवश्यक होता है ।
- (iii) कई बार समग्र के विभिन्न भागों में विभिन्न प्रकार के प्रतिचयन ढाँचे होते हैं । इस कारण इन भागों में भिन्न भिन्न प्रतिचयन विधि का प्रयोग करना होता है ।
- (iv) बहुधा समग्र के विभिन्न भागों में भाषा या अन्य कारणों से असंगत घनत्व अन्वेषकों (investigators) को कार्य करना होता है । संगठन (organisation) के लिए इस अवस्था में स्तरित प्रतिचयन सुविधाजनक है ।

स्तरण (stratification) के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं । औद्योगिक संगठनों सम्बन्धी सर्वेक्षण में स्तरण कर्मचारियों की संख्या के आधार पर किया जा सकता है, किसी क्षेत्र सम्बन्धी अध्ययन के लिए किसानों की जमीन के आधार पर स्तरण (stratification) कर सकते हैं । इसी प्रकार जैव सम्बन्धी अध्ययनों के लिये जीवा की आयु, भार या लिंग आदि के आधार पर स्तरण करना तर्कमय (logical) प्रतीत होता है, आदि ।

प्रत्येक स्तर को एक परिमित समग्र के रूप में मान कर इन में से एक स्वतन्त्र, उचित परिमाण के प्रतिदर्श का चयन कर सकते हैं । प्रतिदर्शों का चयन सब स्तरों में से एक ही प्रतिचयन विधि या भिन्न भिन्न विधियों का प्रयोग करके करते हैं जैसा भी प्रत्यक्ष समग्र के लिए उपयुक्त प्रतीत हो । व्यवहार में प्रत्येक स्तर से अचिन्तित सरण माहणिक प्रतिचयन विधि का प्रयोग करके स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का चयन किया जाता है । प्रतिदर्शों का परिमाण प्रायः स्तरों के परिमाण के अनुपात में दिया जाता है ।

समग्र के लिये आवश्यक आकलनों का परिवर्तन प्रत्येक स्तर द्वारा प्राप्त आकलनों का उचित ढंग से समन्वय करके करते हैं। यह आकलन अधिक परिशुद्ध एवं विश्वसनीय होते हैं।

स्तरित प्रतिचयन विधि प्रगासन की दृष्टि से भी अधिक उपयोगी है। यदि किसी सर्वेक्षण के लिए अनेकों मण्डलों (Zones) की स्थापना की गयी है तो प्रत्येक मण्डल को एक स्तर के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। स्तरित प्रतिचयन का एक मुख्य लाभ यह भी है कि समग्र के किसी चर के लिए आकलन की दक्षता उतनी ही प्रति एकक व्यय करने पर पर्याप्त बढ़ जाती है। उपर्युक्त विवेचन के पटने से स्पष्ट है कि स्तरित प्रतिचयन में निम्न बातों की ओर विशेष ध्यान देना आवश्यक है। इन्हीं बातों का संक्षेप में वर्णन भी दिया गया है—

- (1) चर का निर्णय करना जिसके आधार पर स्तरण करना है।
- (2) स्तरों की संख्या निर्धारित करना।
- (3) स्तरों के लिये प्रतिदर्श परिमाण का नियतन करना।
- (4) स्तरों के अनुकूलतम बिन्दुओं का निर्धारण करना।
- (5) स्तरों से प्रतिदर्श चयन करने की विधि का निर्णय करना।
- (6) प्रत्येक स्तर के लिए उचित आकलनों का परिवर्तन करना तथा इनका समन्वय करके समग्र के प्रति आकलनों को प्राप्त करना।

(1) स्तरण के लिये आधार चर पूर्णतया सर्वेक्षण के उद्देश्य पर निर्भर करता है। साथ ही इस चर के लिए प्रत्येक एकक पर सूचना उपलब्ध होनी आवश्यक है जिससे यह तय किया जा सके कि कौनसा एकक किस स्तर में रखा जाये। स्तरण के लिए आधार चर सम्बन्धी उदाहरण पिछले खण्ड में दिये जा चुके हैं। वास्तव में चर का निर्णय करने के लिये कोई नियम बताना असम्भव है। केवल यह ही कहा जा सकता है कि चर ऐसा होना चाहिये कि उचित स्तर अधिक से अधिक सजातीय हो और इन चर का आकलनों पर प्रभाव न पड़ता हो।

(2) यदि समग्र के विषय में पर्याप्त जानकारी उपलब्ध हो तो अधिक से अधिक स्तरों का गठन करना लाभप्रद है। स्तर जितने अधिक सजातीय होते हैं उतना ही प्रत्येक स्तर में से कम प्रतिचयन एकको का चयन करना होता है। यहाँ तक कि कुछ स्थितियों में केवल दो एकको का ही एक स्तर से प्रतिदर्श के रूप में चयन करना पर्याप्त है।

स्तरों की संख्या निश्चित करने के लिए कुछ सूत्र भी दिये गये हैं। किन्तु इनको इस पुस्तक के स्तर से ऊपर मानकर नहीं दिया गया है।

(3) स्तरों के लिए प्रतिदर्श परिमाण के निश्चय करने की नियतन (allocation) करते हैं। किसी एक स्तर से चयनकृत प्रतिदर्श के परिमाण का उस स्तर में आकलनों की परिशुद्धि पर प्रभाव पड़ता है। अतः स्तर का प्रतिदर्श परिमाण m_h के नियतन का समग्र के प्रति आकलन की परिशुद्धि बढ़ाने हेतु अत्यधिक महत्व है। नियतन का विषय विवरण आकलनों के बाद दिया गया है।

(4) सामान्यतः स्तर प्रणामनिक मुखिया या भौगोलिक दृष्टि से स्वतः ही निमित्त होते हैं। किन्तु कुछ स्थितियों में स्तरों की रचना स्वयं करना लाभप्रद होता है। उक्त स्थिति में यह उपयुक्त है कि स्तरों की सीमा का निर्धारण इस प्रकार किया जाय कि एक निश्चित आकार के प्रति स्तरित प्रतिचयन द्वारा प्राप्त परिणाम अधिक परिशुद्ध हों। सीमा निर्धारण की अनेक विधियाँ हैं किन्तु इनका विवरण इस पुस्तक के क्षेत्र में बाहर रखा गया है।

(5) प्रायः समय के विषय में एक ही लक्षण के प्रति प्रतिरिक्त सूचना उपलब्ध नहीं होती है। अतः प्राप्त जानकारी के आधार पर अर्थात् विभिन्न लक्षणों के आधार पर स्तरों की रचना कर दी जाती है और इन स्तरों का अनुपात जो प्रतिचयन विधि उपयुक्त होती है उक्त विधि द्वारा प्रत्येक स्तर में से स्वतंत्र रूप से प्रतिदर्शों का चयन कर लिया जाता है।

(6) आकलन का विवरण देने से पूर्व कुछ संकेतों का परिचय देना आवश्यक है।

समय में एकको की संख्या = N

कुल प्रतिदर्शों परिमाण = n

स्तरों की संख्या = K

h वें स्तर का परिमाण = N_h जहाँ $h=1, 2, 3, \dots, K$

h वें स्तर से प्रतिदर्शों का परिमाण = n_h

h वें स्तर की प्रतिचयन भिन्न = $\frac{n_h}{N_h} = w_h$ और अनुपात $W_h = \frac{N_h}{N}$

h वें स्तर का माध्य = μ_h और प्रतिदर्शों माध्य \bar{x}_h

h वें स्तर का प्रसरण = S_h^2 और प्रतिदर्शों प्रसरण s_h^2

और

$$N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_K = N$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_K = n$$

माना कि h वें स्तर से किसी स्तर पर प्रेषण

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{N_h}$$

हैं और प्रतिदर्शों में

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_h}$$

हैं तो विभिन्न आकलन निम्न प्रकार हैं :—

$$h \text{ वें स्तर का माध्य } \bar{X}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} X_i}{N_h} \dots (12.19)^*$$

$$h \text{ वें स्तर के लिए प्रतिदर्श माध्य } \bar{x}_h = \sum_{i=1}^{r_h} x_{hi}/n_h \quad \dots(12.20)$$

h वें स्तर का प्रसरण,

$$S_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} (X_{hi} - \bar{X}_h)^2 \quad \dots(12.21)$$

और प्रतिदर्श प्रसरण,

$$s_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} (x_{hi} - \bar{x}_h)^2 \quad \dots(12.22)$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि S_h^2 का अनभिन्न आकलन s_h^2 है। यदि समग्र का माध्य μ है तो स्तरित प्रतिचयन की स्थिति में उसका एक अनभिन्न आकलन

$$\bar{x}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^K N_h \bar{x}_h}{N} \quad \dots(12.23)$$

होता है।

आकलन \bar{x}_{st} का प्रसरण,

$$V(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^K N_h (N_h - n_h) \frac{S_h^2}{n_h} \quad \dots(12.24)$$

$$= \sum_{h=1}^K \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) W_h^2 \cdot \frac{S_h^2}{n_h} \quad \dots(12.25)$$

$$\text{जहाँ } W_h = \frac{N_h}{N}$$

आकलन \bar{x}_{st} का प्रसरण, जबकि $\frac{n_h}{N_h}$ अत्यल्प हो तो निम्न होता है :—

$$V(\bar{x}_{st}) \doteq \sum_{h=1}^K \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \quad \dots(12.26)$$

$V(\bar{x}_{st})$ का अनभिन्न आकलन,

$$v(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^K \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} \quad \dots(12.27)$$

होता है।

यदि $\frac{n_h}{N_h}$ प्रत्यक्ष हो तो,

$$v(\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^K \frac{W_h^2 s_h^2}{n_h} \quad \dots (12.27.1)$$

यह भी सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है कि \bar{x}_h , \bar{X}_h वा घोर \bar{x}_{st} , \bar{X}_{st} वा अनभिन्न मात्रक है।

यदि X और Y दो सहचर हैं तो इनमें h वें स्तर में सहप्रसरण,

$$S_{hXY} = \frac{\sum_{h=1}^K (X_{hi} - \bar{X}_h)(Y_{hi} - \bar{Y}_h)}{N_h - 1} \quad \dots (12.28)$$

है और माकलित सहप्रसरण,

$$s_{hXY} = \frac{\sum_{h=1}^K (x_{hi} - \bar{x}_h)(y_{hi} - \bar{y}_h)}{n_h - 1} \quad \dots (12.29)$$

जबकि s_{hXY} , S_{hXY} वा अनभिन्न मात्रक है।

अनुपातों के लिए माकलक ज्ञात करना

यदि एकको को केवल दो वर्गों G_1 और G_2 में रखा जा सकता है और h वें स्तर के वर्ग G_1 में एकको की संख्या M_h है और इनके लिए प्रतिदर्श में संख्या m_h है तो

$$P_h = \frac{M_h}{N_h} \quad \text{और} \quad p_h = \frac{m_h}{n_h} \quad \dots (12.30)$$

माना कि वर्ग G_1 में पूर्ण अनुपात P है, तो

$$P = \frac{\sum_{h=1}^K W_h P_h}{\sum_{h=1}^K W_h} \quad \dots (12.31)$$

स्तरित प्रतिचयन के अन्तर्गत वर्ग G_2 में अनुपात, P_{st} वा धारित मान,

$$P_{st} = \frac{\sum_{h=1}^K N_h P_h}{N} = \sum_{h=1}^K W_h P_h \quad \dots (12.32)$$

और P_{st} का प्रसरण

$$V(P_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^K \frac{N_h^2 (N_h - n_h)}{N_h - 1} \cdot \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \dots (12.33)$$

जहाँ $Q_h = (1 - P_h)$

यदि $\frac{n_h}{N_h}$ लघु न हो तो भी सख्या $\frac{1}{N_h}$ उपेक्षणीय ही होती है अतः सूत्र (12.33) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :—

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^K N_h (N_h - n_h) \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \dots (12.33.1)$$

यदि प्रतिचयन भिन्न उपेक्षणीय हो

$$V(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^K N_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \dots (12.33.2)$$

$$V(p_{st}) = \sum_{h=1}^K W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_h} \quad \dots (12.33.3)$$

$V(p_{st})$ का अनभिन्नत भाकलक

$$v(p_{st}) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^K N_h (N_h - n_h) \frac{P_h Q_h}{n_{h-1}} \quad \dots (12.34)$$

प्रतिचयन भिन्न उपेक्षणीय होने की स्थिति में,

$$v(p_{st}) = \sum_{h=1}^K W_h^2 \frac{P_h Q_h}{n_{h-1}} \quad \dots (12.34.1)$$

नियतन

सूत्र (12.25) से विदित है कि \bar{x}_{st} का प्रसरण, स्तर प्रतिदर्श परिमाण n_h का फलन है। अतः n_h का चयन इस प्रकार किया जाना चाहिये कि जिससे प्रसरण कम हो जाये। नियतन को कुछ प्रविधियाँ निम्न हैं :—

आनुपातिक नियतन :— प्रायः ऐसा अनुभव किया गया है कि छोटे स्तर में प्रसरण कम और बृहत् में प्रसरण अधिक होता है। इस बात को ध्यान में रखने पर अच्छे भाकलक प्राप्त करने हेतु छोटे स्तर में से छोटा प्रतिदर्श और बड़े स्तर में से बड़ा प्रतिदर्श लेना उचित है। अतः प्रत्येक स्तर में से प्रतिचयन इस प्रकार करते हैं कि स्तरित प्रतिचयन-भिन्न समान रहती है। इस प्रकार के नियतन को आनुपातिक नियतन कहते हैं। गणितीय रूप में

$$\frac{n_h}{N_h} = \frac{n}{N} \quad \dots (12.35)$$

$$\text{या } n_h = n \cdot \frac{N_h}{N} = n W_h \quad \dots (12.36)$$

अनुसूचित नियतन के अन्तर्गत प्रसरण,

$$V_D (\bar{x}_{st}) = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \sum_{h=1}^k \frac{W_h S_h^2}{n} \quad \dots(12.37)$$

यदि $\frac{n}{N}$ उपेक्षणीय हो तो इस स्थिति में,

$$V_D (\bar{x}_{st}) = \sum_{h=1}^k \frac{W_h S_h^2}{n} \quad \dots(12.38)$$

यह नियतन क्रिया-विधि में सुगम होने के कारण प्रायः इसका प्रयोग किया जाता है।

अनुकूलतम नियतन :- स्तरित प्रतिचयन के लिए व्यय फलन निम्न रूप में दिया जा सकता है :-

$$C = C_0 + \sum_{h=1}^K n_h C_h \quad \dots(12.39)$$

जबकि C_0 बड़ी लागत है और C_h , h वें स्तर में एक एकक के सर्वेक्षण का औसत व्यय है। C कुल व्यय को सूचित करता है। अनुकूलतम नियतन के लिए निम्न व्यञ्जक को सप्राज गुणक विधि द्वारा न्यूनतम करने n_h का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

$$Q = \sum_{h=1}^k \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} - \lambda (C - C_0 - \sum_{h=1}^K n_h C_h) \quad \dots(12.40)$$

सीधी ओर के व्यञ्जक को Q मान लिया गया है और λ एक सप्राज गुणक है।

Q का n_h के सम्बन्ध में प्रांशिक अवकलन करने शून्य के समान रखकर प्राप्त समीकरण को हल करने पर,

$$n_h = n \frac{W_h S_h / \sqrt{C_h}}{\sum_h (W_h S_h / \sqrt{C_h})} \quad \dots(12.41)$$

n_h का मान सूत्र (12.25) में रखने पर अनुकूलतम नियतन के अन्तर्गत \bar{x}_{st} का प्रसरण ज्ञात हो जाता है जो कि निम्न है :-

$$V_D (\bar{x}_{st}) = \frac{1}{n} \left(\sum_h \frac{W_h S_h}{\sqrt{C_h}} \right) \left(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h} \right) - \frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \quad \dots(12.42)$$

अनुकूलतम नियतन निम्न दो स्थिति में हो सकता है :-

(क) यदि सर्वेक्षण का व्यय 'C' नियत हो तो n_h का बहू मान ज्ञात करते हैं कि जिससे $V (\bar{x}_{st})$ न्यूनतम हो जाये। इस स्थिति में n का मान बड़ी लागत के पदों में निम्न होता है :-

$$n = \frac{(C - C_0 \sum_h (W_h S_h / \sqrt{C_h}))}{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}} \quad \dots (12.43)$$

(12.41) में n का मान रखने पर,

$$n_h = \frac{(C - C_0) W_h S_h / \sqrt{C_h}}{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}} \quad \dots (12.44)$$

(12.42) में n का मान (12.43) द्वारा रखने पर,

$$V_0 (\bar{x}_{st}) = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h})^2}{(C - C_0)} - \frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \quad \dots (12.45)$$

यदि $\frac{N_h}{N^2}$ अत्यल्प हो तो,

$$v_0 (\bar{x}_{st}) = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h})^2}{C - C_0} \quad \dots (12.45.1)$$

स्थिति (ख) . यदि पूर्व निर्धारित स्तरित प्रतिदर्श प्रसरण V_0 ही प्राप्त करना हो तो हमें n_h के ऐसे मान ज्ञात करने हैं कि जिससे सर्वक्षण का व्यय C न्यूनतम हो जाये।

लघुज विधि द्वारा व्यञ्जक,

$$Q_1 = C_0 + \sum_{h=1}^K n_h C_h - \lambda_1 \left(V_0 - \sum_{h=1}^K \frac{W_h^2 S_h^2}{n_h} \right) \quad \dots (12.46)$$

को न्यूनतम करने पर, n का मान निश्चित प्रसरण के लिए निम्न है :—

$$n = \frac{(\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h}) \sum_h W_h S_h / \sqrt{C_h}}{V_0 + \left(\frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \right)} \quad \dots (12.47)$$

n का मान (12.41) में रखने पर,

$$n_h = \frac{\sum_h W_h S_h \sqrt{C_h} \cdot \left(\frac{W_h S_h}{\sqrt{C_h}} \right)}{V_0 + \left(\frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \right)} \quad \dots (12.48)$$

यदि प्रत्येक स्तर में प्रति एकक व्यय समान हो अर्थात्

$$C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_K = C'$$

हो तो सूत्र (12.41) निम्न हा जाता है .—

$$n_h = n \frac{W_h S_h}{\sum_h W_h S_h} \quad \dots (12.49)$$

नियतन वा यह सूत्र नेमेन नियतन (Neyman allocation) कहलाता है। इसे नेमेन ने सन् 1934 में दिया था।

इस नियतन के अन्तर्गत \bar{x}_{st} का प्रसरण सूत्र (12.42) की सहायता से निम्न होता है —

$$V_{Ney}(\bar{x}_{st}) = \frac{1}{n} \left(\sum_h W_h S_h \right)^2 - \frac{1}{N} \sum_h W_h S_h^2 \dots (12.50)$$

इस नियतन में n का मान पूर्व निर्धारित होता है।

सरल यादृच्छिक तथा स्तरित प्रतिचयन के अन्तर्गत आकलित माध्य के प्रसरण को तुलना

माना कि प्रतिदर्श माध्य के प्रसरण को सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, नमन नियतन व प्रानुपातिक नियतन के सहित स्तरित प्रतिचयन की स्थिति में क्रमशः V_{ran} , V_{Ney} और V_{prop} द्वारा निरूपित किया गया है तो यह निम्न किया जा सकता है कि,

$$V_{ran} - V_{Ney} = \frac{N-n}{nN} \sum_h W_h (S_h - \bar{S})^2 + \frac{N-n}{nN} (\mu_h - \mu^2) \dots (12.51)$$

$$\text{जहाँ } \bar{S} = \sum_h W_h S_h$$

घोर

$$V_{ran} - V_{prop} = \frac{N-n}{nN} \sum W_h (\mu_h - \mu)^2 \dots (12.52)$$

उपर्युक्त सम्बन्धों से स्पष्ट है कि

$$V_{ran} > V_{prop} > V_{Ney} \dots (12.53)$$

क्रमबद्ध प्रतिचयन

माना कि समय में N एकक हैं और इनमें से n एककों के प्रतिदर्श का चयन करना है। इन N एककों को $\frac{N}{n}$ समूहों के विभाजित कर दिया जाता है। माना कि $\frac{N}{n} = K$,

अर्थात् प्रत्येक समूह में K एकक हैं। इन समूहों को K स्तरों में भी समझा जा सकता है अर्थात् किसी लक्षण के प्रति स्तरों में भी समझा जा सकता है अर्थात् किसी लक्षण के प्रति स्तरों का रचना नहीं की गयी है। पहले समूह के 1 में K तक एकक में से एक एकक का सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा चयन कर लिया जाता है और फिर इस एकक में पहले प्रत्येक K वें एकक का प्रत्येक समूह में से चयन कर लेते हैं। माना कि 1 में K में m वें एकक का चयन किया गया है तो अन्य समूहों में $(m+1)K$, $(m+2)K$, ..., $(m+n-1)K$ वें एककों का चयन कर लिया जाता है। जैसे माना कि समय में 30 एकक हैं और इनमें से

6 एकको के प्रतिदर्श का क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि से चयन करना है। अतः यहाँ $K=5$ है। माना कि दूसरे एकक का सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा चयन हुआ है तो 7, 12, 17, 22, 27वें एकको का चयन करना होता है। इस प्रकार के प्रतिचयन को रेखीय क्रमबद्ध प्रतिचयन (Linear systematic sampling) कहने हैं क्योंकि इस प्रतिचयन को ज्यामिति में रेखा द्वारा निरूपित कर सकते हैं। ऊपर दिये गये उदाहरण के लिए निरूपण निम्न चित्र में दिया गया है —

0	0	0	X	0	X	0	X	0	X	0	X	0
1	2	5	7	10	12	15	17	20	22	25	27	30

चित्र 12-2 क्रमबद्ध प्रतिचयन का रेखिक निरूपण

यदि एकको का कार्डों के रूप में चयन करना है तो रैक में रखे कार्डों की ऊँचाई नाप ली जाती है और उसे ऊँचाई के आधार पर समूहों में बाँट दिया जाता है। माना कि प्रत्येक समूह 5 से० मी० लम्बाई का है। पहले समूह में से एक कार्ड का यादृच्छिक विधि द्वारा चयन कर लिया जाता है और फिर इस कार्ड से प्रत्येक 5 से० मी० की दूरी पर स्थित कार्ड का चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार सुगमता से प्रतिदर्श का चयन हो जाता है तथापि प्रत्येक K वें एकक का सिद्धान्त पूर्णतया सत्य नहीं रहता है।

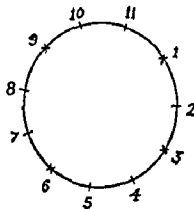
व्यवहार में $N=nK$ की स्थिति प्रायः नहीं पायी जाती है अर्थात् K एकको के प्रत्येक समूह की रचना नहीं हो सकती है। तो इस स्थिति में प्रतिदर्श का चयन वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि द्वारा किया जा सकता है जोकि निम्न प्रकार है —

वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन

उपर्युक्त चण्ड में दिया है कि $N=nk$ न होने की स्थिति में प्रतिदर्श परिमाण n के स्थान पर $(n-1)$ होना सम्भव है और प्रतिदर्श माध्य भी एक अभिनत आगणक होता है। इस कमी को दूर करने के लिए डी० बी० लहरी (D B Lahiri) ने 1952 में राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (National Sample survey) में वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का प्रयोग किया। इस विधि के अन्तर्गत भिन्न $\frac{N}{n}$ के निकटतम सख्या को k के समान

मान लेते हैं। फिर एक एकक का चयन का चयन 1 से N तक एकको में से यादृच्छिक विधि से करते हैं। माना कि यह सख्या m है तो फिर प्रत्येक $(m+ik)$ वें एकक (जबकि $m+ik < N$) या $(m+ik-N)$ वें एकक (जबकि $m+ik > N$) का चयन कर लिया जाता है। इस समय एकको को एक वृत्त की परिधि पर स्थित मान सकते हैं। इस प्रकार समूहों को भ्रमण-भ्रमण नहीं बनाना होता है। $N=11$, $n=4$ की स्थिति में ज्यामितीय निरूपण निम्न रूप में कर सकते हैं — माना कि $m=3$ है।

इस स्थिति में $k=3$ लेना उचित है।



चित्र 12-3 वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का प्रदर्शन

इस प्रकार प्रतिदर्श में चयन किये गये एक 3, 6, 9, 1 क्रम सख्या वाले हैं

यदि $N = nk$ हो तो वृत्तीय तथा रेखीय क्रमबद्ध प्रतिचयन एक समान हो जाते हैं।

क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि अन्य दो गयी विधियों की भ्रमशा सरल है और इसके द्वारा प्राप्त प्राक्लक भी अनभिन्नत एक विश्वसनीय होते हैं। यह विधि मुख्यता उस स्थिति में उपयुक्त है जबकि प्रतिचयन एक क दिन्ही काडों (Cards) के रूप में हो और यह कार्ड एक साथ रैंक में रखे हो। इस विधि का प्रयोग प्राय वन सम्बन्धी सर्वेक्षणों या मछली पकड़ने सम्बन्धी सर्वेक्षणों में होना है।

घागणकों के लिए सूत्र

माना कि n परिमाण के क्रमबद्ध प्रतिदर्श में किसी लक्षण के प्रति प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_j, \dots, X_n$ हैं तो प्रतिदर्श माध्य

$$\bar{X}_{sy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad \dots (12.54)$$

और प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण $V(\bar{X}_{sy})$ जबकि $N = nk$

$$V(\bar{X}_{sy}) = \frac{N-1}{N} S^2 = \frac{k(n-1)}{N} S_{wsy}^2 \quad \dots (12.55)$$

जहाँ

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \mu)^2 \text{ जबकि } X_{ij}, \text{ iवें क्रमबद्ध प्रतिदर्श में } j \text{ वाँ एकक है}$$

$$\text{घोर} \quad \frac{N-1}{N} S^2 = \sigma^2$$

S_{wsy}^2 क्रमबद्ध प्रतिदर्शों के अन्दर प्रसरण है। अतः

$$S_{wsy}^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\frac{k(n-1)}{N} S_{wsy}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 = \sigma_w^2 \dots (12.56)$$

$$V(\bar{X}_{sy}) = \sigma^2 - \sigma_w^2 \dots (12.57)$$

व्यञ्जक (12.57) में स्पष्ट है कि σ^2 समग्र प्रसरण है जो कि एक अक्षर सत्या है और σ_w^2 प्रादुर्भाव के अन्दर प्रसरण है। $V(\bar{X}_{sy})$ कम होने के लिए यह आवश्यक है कि σ_w^2 अर्थात् प्रतिदर्श के अन्दर प्रसरण अधिक हो। अतः एक क्रमबद्ध प्रतिदर्श में एकक जितने अधिक विजातीय होंगे उतना ही लाभप्रद है। प्रतिदर्श में एकको के अन्दर विजातीयता होने के लिए विभिन्न समूहों का विजातीय होना आवश्यक है। इस विवेचन से यह निष्कर्ष निकलता है कि क्रमबद्ध प्रतिचयन अच्छा मिश्र होगा जब समूहों के एकक विचारणीय लक्षण के प्रति सजातीय हों और विभिन्न समूहों के लिए इस लक्षण के प्रति एक दूसरे से अधिक से अधिक भिन्न हों।

क्रमबद्ध प्रतिचयन को सरल यादृच्छिक प्रतिचयन से तुलना

क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि में 1 से k तक एकको में से एक-एक एकक का चयन यादृच्छिक विधि से करते हैं अर्थात् k सम्भव प्रतिदर्शों का चयन समान प्रायिकता से करते हैं। सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा कुल सम्भव $\binom{N}{n}$ प्रतिदर्शों में से एक प्राप्त होता है। केवल इन दोनों विधियों में अन्तर इतना है कि क्रमबद्ध प्रतिचयन अन्य विधियों की अपेक्षा क्रियात्मक दृष्टि में सुगम है क्योंकि इसमें कम समय तथा धन लगता है। किन्हीं उपयुक्त परिस्थितियों में इस विधि के अन्तर्गत आकलन अन्य की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध होते हैं।

गुच्छ प्रतिचयन - अब तक दी गयी विधियों में सदैव मूल एकक (elementary unit) का किसी अध्ययन के हेतु चयन किया गया। पूरे एकक से हमारा अभिप्राय उस एकक से है जिस पर कि प्रेक्षण लिए जाने हैं। इन एकको का प्रयोग करने में अनेको कठिनाइयाँ भी आ सकती हैं। जैसे,

- (i) मूल एकको के लिए प्रतिचयन ढाँचा उपलब्ध न हो और इसे तैयार करने में बहुत धन तथा समय की आवश्यकता पड़ती हो,
- (ii) प्रतिदर्श एक एक दूसरे से अधिक दूरी पर स्थित हों और एक एकक में दूसरे एकक तक जाने में व्यय एवं समय अधिक लगना हो,
- (iii) सर्वेक्षण-क्षेत्र में एकको को पहचानने और इनकी स्थिति निर्धारण करने में अधिक समय लगता हो, आदि।

ये कठिनाइयाँ क्रियात्मक दृष्टि में पर्याप्त जटिल हैं, अतः इन्हें कम करने के हेतु गुच्छ प्रतिचयन एक अच्छी प्रतिचयन विधि है।

गुच्छ प्रतिचयन के अन्तर्गत समग्र के मूल एककों को गुच्छों (समूहों) में विभाजित कर दिया जाता है। इन गुच्छों को प्राथमिक एकाक (primary unit) के रूप में प्रयोग करने हैं जैसे परिवारों सम्बन्धी सर्वेक्षण में समीप में स्थित मराना द्वारा सूचना प्राप्त करना, दूर-दूर स्थित मराना की घोषणा सुगम है। धन किमी बड़े शहर में विभिन्न मुद्दनों (बनारों) को, किमी प्रदेश में निकट के गाँवों को या सम्प (crop) सम्बन्धी सर्वेक्षण में एक बड़े क्षेत्र को मूल एकक के रूप में मान लेते हैं और इनमें से निश्चित परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किमी भी पहले की गयी विधि द्वारा कर लिया जाता है। सर्वेक्षण करते समय प्रत्येक चयन विधि गये प्राथमिक एकाक में सम्मिलित सभी मूल एककों के विषय में प्रावधानानुसार जानकारी (आंकड़े) एकत्रित करने जाती है। गुच्छ धनाने समय यह आवश्यकता पड़ती चाहिये कि गुच्छ परस्पर व्यापी (overlapping) न हो चर्चा परस्पर-अपवर्ती (mutually exclusive) होना चाहिये।

गुच्छ प्रतिचयन अन्य प्रतिचयन विधियों, जिनमें कि प्रदेश प्रतिदर्श में एकाक का चयन समग्र में मूल एकको की सूची द्वारा किया जाता है, की घोषणा कम दक्ष (efficient) है। इसका कारण यह है कि गुच्छ प्रतिचयन में प्रतिदर्श प्रमर्ण श्रम की घोषणा कम होता है, क्योंकि व्यवहार में ऐसा पाया गया है कि गुच्छ में एककों में समानताएँ अधिक होती हैं घोषणा उनके कि जो दूर पर स्थित हैं। फिर भी गुच्छ प्रतिचयन ब्यावहारिक दृष्टि में सुविधाजनक होने के कारण अनेक सर्वेक्षणों में प्रयोग किया जाता है और इन दक्षता की हानि को समय तथा धन के बचाने के लिए गहन करना उपयुक्त समझा जाता है।

माध्य तथा प्रसरण के लिए सूत्र

माना कि,

$$\text{समग्र में मूल एकको की संख्या} = NM$$

$$\text{समग्र में प्राथमिक एकाक (गुच्छों की संख्या)} = N$$

$$\text{एक गुच्छ में मूल एकको की संख्या} = M$$

$$\text{प्राथमिक एकाको के प्रतिदर्शों का परिमाण} = n$$

$$\text{प्रतिदर्शों में मूल एकको की संख्या} = nm$$

यदि i वें गुच्छ में j वें एक पर प्रेक्षण X_{ij} द्वारा निश्चित है तो,

i वें गुच्छ का माध्य,

$$\bar{X}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_{ij} \quad \dots (12.58)$$

जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, N$

समग्र माध्य,

$$\bar{X} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M X_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i \quad \dots (12.59)$$

समग्र प्रसरण,

$$S^2 = \frac{1}{MN-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (X_{ij} - \mu)^2 \quad \dots (12.60)$$

माना कि S_b^2 और S_w^2 क्रमशः गुच्छों के बीच और गुच्छों के अन्दर प्रसरण हैं।

$$S_b^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \mu)^2 \quad \dots (12.61)$$

और

$$S_w^2 = \frac{1}{N(M-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad \dots (12.62)$$

अधिकतर $S_b^2 > S_w^2$ होता है क्योंकि गुच्छ सजातीय होते हैं। गुच्छ प्रतिचयन की मूल्य माहच्छिक प्रतिचयन के सापेक्ष दक्षता,*

$$E_{cr} = \frac{\frac{NM-Mn}{NM} \cdot \frac{S^2}{nM}}{\frac{N-n}{Nn} S_b^2} = \frac{S^2}{MS_b^2} \quad \dots (12.63)$$

ऊपर दिये हुए सूत्र की भाँति प्रतिदर्शों के लिए सूत्र, गुच्छ का माध्य, जो i वी बार में चयनकृत है,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M x_{ij}; \quad \text{जहाँ } i=1, 2, 3, \dots, n \quad \dots (12.64)$$

$$s_b^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 \quad \dots (12.65)$$

$$\text{जहाँ } \bar{\bar{x}} = \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M x_{ij}$$

$$s_w^2 = \frac{1}{n(M-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^M (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad \dots (12.66)$$

अनुकूलतम गुच्छ परिमाण —यदि तक दिये विवरण से यह पता चलता है कि जैसे जैसे गुच्छ का परिमाण बढ़ता है प्रतिचयन प्रसरण बढ़ता है और सर्वेक्षण का व्यय घटता

* प्रतिचयन दक्षता $E = \frac{1}{V(\bar{X})}$, अतः दो प्रतिचयन दक्षताओं के अनुपात को सापेक्ष दक्षता कहते हैं।

है। हमने विपरीत जंमे-जंमे गुच्छों की सख्या बढ़ती है या गुच्छ परिमाण कम होता है तो व्यय बढ़ता है और प्रतिचयन प्रसरण घटता है। अतः सन्तुलन के लिए व्यवहार में एक उचित साकार के गुच्छ बनाने होते हैं और गुच्छों की सख्या भी न बृहत् रणनी होती है और न लघु ही। आवश्यकता पड़ने पर पूर्व निर्धारित व्यय या सूक्ष्मता के लिए गणितीय विधि से भी अनुकूलतम प्रतिदर्श परिमाण एक गुच्छ परिमाण जान कर सकते हैं। इन विधियों के लिए गणितीय कलन हम अशक्य में नहीं दिये गये हैं।

बहुक्रम प्रतिचयन

गुच्छ प्रतिचयन में कुछ गुच्छों का चयन करके प्रत्येक में विद्यमान सूक्ष्म एककों पर घ्राण्टे एकत्रित किये जाते हैं किन्तु यदि गुच्छ में घटित मूल एकक सजातीय हैं तो सबसे सर्वेक्षण करना व्यर्थ है। क्योंकि इस स्थिति में पर्याप्त सूक्ष्मता कुछ ही एककों द्वारा प्राप्त की जा सकती है और इसके आधार पर प्राप्त आगणन भी दृढ़ होते हैं। इस स्थिति में एक चरण प्रतिचयन करना उपयुक्त साधनों का अपव्यय है। अतः प्रत्येक चुने हुये गुच्छ में से भी कुछ मूल एककों का चयन किसी प्रतिचयन विधि द्वारा कर लिया जाता है। इन एककों को द्विचरण एकक कहते हैं। इस प्रकार के प्रतिचयन को द्विचरण प्रतिचयन (two stage sampling) कहते हैं। इस नाम को सबसे पहले महात्मानबीज (Mahalanobis) ने दिया था। यदि द्विचरण एककों में भी अन्य एककों का चयन किया गया हो तो इसे त्रिचरण प्रतिचयन (three stage sampling) कहते हैं। इस स्थिति में द्विचरण एकक स्वयं में अपने मूल एककों का समूह है। इस प्रकार प्रतिदर्श में से प्रतिदर्श अपने चरणों (stages) में घेने की प्रविधि को उपप्रतिचयन (sub-sampling) कहते हैं। यदि प्रतिदर्श प्रतिदर्श का चयन दो या दो से अधिक चरणों में किया गया हो तो इसे बहुचरणी प्रतिचयन (multi-stage sampling) कहते हैं। जैसे किसी शहर में से कुछ ब्लॉकों का प्रथम चरण में चयन किया जाये और इन ब्लॉकों में से कुछ परिवारों का दूसरे चरण में चयन किया जाये तो परिवार प्रतिदर्श एकक के रूप में प्राप्त होते हैं अतः यहाँ केवल द्विचरण प्रतिचयन का प्रयोग किया गया है।

दूसरी प्रकार किसी जिले में से तहसीलों, प्रत्येक तहसील में से गाँवों और गाँवों में से परिवारों के चयन करने की विधि त्रिचरण प्रतिचयन का उदाहरण है।

बहुचरणी प्रतिचयन की आवश्यकता प्रायः इस कारण भी पड़ती है कि एक ही सर्वेक्षण में कई प्रकार के अध्ययन करने का लक्ष्य होता है। इन लक्ष्यों के अनुसार विभिन्न प्रतिचयन एककों का प्रयोग करना होता है। जैसे किसी प्रदेश में जनसंख्या का आगणन करने तथा गाँवों में उपलब्ध वस्तुओं के विषय में जानकारी और प्रति परिवार प्रायः खादि के विषय में अध्ययन करने के हेतु बहुचरणी प्रतिचयन प्रायः उपयोगी सिद्ध होता है।

इस विधि का प्रयोग मनु 1940 में महात्मानबीज ने बंगाल में सन्ध सर्वेक्षण के लिए किया था। 1954 में उगता प्रयोग भारतीय राष्ट्र प्रतिदर्श सर्वेक्षण (Indian National sample survey) में प्रायः होता रहा है।

द्विचरण प्रतिचयन में माध्य एवं प्रसरण का आकलन

समग्र में प्राथमिक एका की संख्या = N

प्राथमिक एका के प्रतिदर्श का परिमाण = n

1 वें प्राथमिक एका में द्विचरण एका की संख्या = M₁

1 वें प्राथमिक एका से किसी प्रतिचयन विधि द्वारा चयन किये गये द्विचरण एका की संख्या = m₁

$$M = \sum_{i=1}^N M_i \quad \text{और} \quad \bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i = M/N$$

माना कि दोनों चरणों में बिना प्रतिस्थापन के समान प्राथमिकता से एकाओं का चयन किया गया है। 1 वें प्राथमिक एका में j वीं प्रतिदर्श प्रेक्षण x_{1j} द्वारा सूचित है।

1 वें प्राथमिक एका के लिए प्रतिदर्श माध्य,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} x_{1j} \quad (12.67)$$

प्रतिदर्श माध्य प्रति द्विचरण एका,

$$\bar{\bar{x}}' = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (12.68)$$

$\bar{\bar{x}}'$ समग्र माध्य का अभिन्न आकलक है। इसका एक अभिन्न आकलक निम्न रूप से दिया जा सकता है —

$$\bar{\bar{x}}' = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \bar{x}_i / n \bar{M}}{\sum_{i=1}^n M_i} \quad (12.68.1)$$

$\bar{\bar{x}}'$ के प्रसरण V($\bar{\bar{x}}'$) का आकलित प्रसरण,

$$v(\bar{\bar{x}}') = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) s_b'^2 + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2}{M^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} \right) s_w^2 \quad (12.69)$$

$$\text{जहाँ } s_b'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}')^2$$

$$\text{और } s_w^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$\bar{\bar{x}}''$ के प्रसरण V($\bar{\bar{x}}''$) का आकलित प्रसरण,

$$v(\bar{\bar{x}}'') = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) s_b''^2 + \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n \frac{M_i^2}{M^2} \left(\frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} \right) s_w^2 \quad (12.70)$$

$$\text{जहाँ } s_b^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i}{M} \bar{x}_i - \bar{x}' \right)^2$$

यदि प्राथमिक एककों के परिमाण में अन्तर बृहत् हो तो प्रायः $V(\bar{x}')$, अभिन्न प्राथमिक \bar{x}' के प्रसरण $V(\bar{x}')$ में अधिक हो जाता है।

परिमाण के समानुपातिक प्राथमिकता प्रतिचयन

ऐसा देना सधा है कि बड़े आकार के एककों में अधिक सूचना विद्यमान होती है और लघु एककों में कम। यहाँ एककों का परिमाण अध्ययन के हेतु विभे गये चर (संज्ञा) के किसी सहस्र के परिमाण पर निर्भर है। जैसे किसी घेनी सम्बन्धी सर्वेक्षण में घेन का क्षेत्र, किसी सामाजिक या आर्थिक अध्ययन सम्बन्धी सर्वेक्षण में परिवार के सदस्यों की संख्या या किसी पंचद्वी सम्बन्धी अध्ययन में पंचद्वी में कर्मचारियों की संख्या या उत्पादन संख्या आदि चरों को एक के आकार के रूप में ले सकते हैं। इन अध्ययनों में एककों का समान प्राथमिकता में प्रतिचयन करने की प्रेरणा परिवर्ती प्राथमिकता द्वारा व्यक्त करना अधिक उपयुक्त है क्योंकि इस प्रकार प्राप्त आकलन अन्य विधि की प्रेरणा अधिक दृढ़ होते हैं। इस प्रकार की परिवर्ती प्राथमिकता प्रतिचयन विधि को परिमाण के समानुपातिक प्राथमिकता प्रतिचयन कहते हैं।

परिमाण के समानुपातिक प्राथमिकता में व्यक्तित्व प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आकलन अभिन्न होते हैं यदि प्रेरणों को भारित नहीं किया गया हो। इसका कारण यह है कि इस स्थिति में बड़े एककों को प्रतिदर्श में सम्मिलित होने का अधिक अवसर मिल जाता है और छोटे एककों को कम प्रभाव बड़े एककों का प्रतिदर्श में अधिक प्रतिनिधित्व होता है और छोटे एककों का कम। चर प्रतिदर्श प्रेरणों को उतनी उचित प्राथमिकता से भारित करने परिकल्पन करने पर अनभिन्न आकलन प्राप्त हो जाते हैं। इस विधि को ईनसन व हुरविट्ज (Ehansen and Hurwitz) ने 1942 में विस्तृत रूप में दिया था।

यदि एक समष्टि में परिमाण के समानुपातिक प्राथमिकता प्रतिचयन विधि द्वारा प्रतिस्थापन सहित n एककों के एक प्रतिदर्श का व्यक्त करना हो तो इसके लिए विधियाँ निम्न प्रकार हैं —

संज्ञाओं योग विधि :—माना कि समष्टि के N एकका $U_1, U_2, U_3, \dots, U_h$ प्रकार क्रमशः $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ हैं। इस विधि में प्रत्येक एकक में सम्बद्ध अन्ततम परिमाण के संज्ञा योगों को सारणी से प्राप्त होते हैं।

संज्ञा	संज्ञा योग
X_1	$X_1 = C_1$
X_2	$X_1 + X_2 = C_2$
X_3	$C_1 + X_2 = C_3$
\vdots	\vdots
X_N	$C_{N-1} + X_N = C_N = N$

पहले एक U_1 से सम्बद्ध घन्तराल $(1 - C_1)$, U_2 से सम्बद्ध घन्तराल $(C_1 + 1) - C_2$, U_3 से सम्बद्ध घन्तराल $(C_2 + 1) - C_3$ आदि लिख देते हैं।

इसके पश्चात् 1 से X तक सख्या में से एक का यादृच्छिक सख्या-सारणी की सहायता से चयन करते हैं। यह यादृच्छिक सख्या जिस घन्तराल में स्थित होती है उसी घन्तराल के मगत एकक का चयन कर लिया जाता है अन्यथा नहीं।

इस विधि का मुख्य दोष यह है कि इसमें सचयी योग ज्ञात करने होते हैं जो कि N बृहत् होने की स्थिति में पर्याप्त कठिन कार्य है जैसे किसी प्रदेश के शिक्षा सम्बन्धी सर्वेक्षण के लिए कुछ स्कूलों का ऊपर दी हुई विधि द्वारा चयन करने में हजारों स्कूलों में विद्यार्थियों की सरया को X , मानते हुये सचयी योग ज्ञात करना एक कठिन कार्य है। अतः इस कठिनाई में मुक्त होने के लिये एक विधि है 'न' निम्न है —

सहरी विधि :— सचयी योग विधि में विद्यमान कठिनाई को दूर करने के लिये डी० बी० लहरी (D B Lahiri) ने 1951 में एक नई विधि सुनाई। माना कि समग्र में N एकक $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$ हैं और इनके परिमाण क्रमशः

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$$

हैं तो इस विधि के अन्तर्गत इन एककों के परिमाण X_i में जा सबसे बड़ी सख्या होती है उसे M में सूचित करते हैं। एकको का चयन निम्न प्रकार से करते हैं —

दो यादृच्छिक सख्याओं का, एक का 1 से N तक में से और दूसरी का 1 से M तक में से यादृच्छिक सख्या-सारणी की सहायता से स्वतन्त्र रूप में चयन किया जाता है। माना कि 1 से N में यादृच्छिक सख्या k और 1 से M तक में सख्या K प्राप्त होती है।

यदि $K \leq X_k$ हो तो एकक U_k का चयन कर लिया जाता है अन्यथा एकक U_k का चयन नहीं किया जाता है।

अब पुनः नई यादृच्छिक सख्याओं k व K को स्वतन्त्र रूप से सारणी द्वारा ज्ञात करते हैं और नियमानुसार एकक के चयन किये जाने के विषय में निर्णय कर लेते हैं। n परिमाण के प्रतिदर्श का परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से प्रतिस्थापन सहित चयन करने में एक के बाद एक युगल यादृच्छिक सख्याओं का चयन करते रहते हैं और नदनुसार एकको का चयन कर लिया जाता है। यही कार्यक्रम चलता रहता है जब तक कि n एकको का चयन न हो जाये।

उदाहरण 12.1 आठ नगरों की जनसख्या निम्न सारणी के अनुसार थी —

नगर क्रमसख्या	:	1	2	3	4	5	6	7	8
जनसख्या (सी व्यक्ति)		100	120	240	320	290	110	30	10

इन नगरों में से दस नगरों का चयन परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से सचयी यादृच्छिक विधि द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं। पहले सचयी योग एवं घन्तरालों को निम्न प्रकार लिख दिया —

नगर क्रमसंख्या	जनसंख्या (सौ व्यक्ति)	सदसी योग	सम्बन्ध अन्तराल
1	100	100	1 — 100
2	120	220	101 — 220
3	240	360	221 — 360
4	320	680	361 — 680
5	290	970	681 — 970
6	110	1080	971 — 1080
7	30	1110	1081 — 1110
8	10	1120	1111 — 1120

प्रथम यादृच्छिक सख्या सारणी सख्यामा का देलना प्रारम्भ किया। पहली यादृच्छिक सख्या जो 1120 से कम है वह 0554 है। यह सख्या अन्तराल 361 — 680 में है अतः नगर 4 का चयन कर लिया जाता है। प्रथम अगली सख्या 0709 है। इस सख्या का अन्तराल 681 — 970 में समावेश है अतः नगर 5 का चयन कर लिया। इस प्रकार प्रतिदर्श में नगर 4 व 5 का चयन हुआ।

उदाहरण 12.2 ऊपर दिये उदाहरण (12.1) में दिये गये नगरों के समग्र से यदि दो नगरों के प्रतिदर्श का चयन लहरी विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

यहाँ $N=8$ व $M=320$ है।

पहले यादृच्छिक सारणी द्वारा 1 से 8 के बीच प्राप्त सख्या $i=6$ है, 1 से 320 के बीच सख्या $K=096$ है।

नगर 6 की जनसंख्या 110 सौ है जो कि 96 से अधिक है अतः नगर 6 स्वीकृत है।

इसी प्रकार अन्य युक्त यादृच्छिक सख्याएँ $i=4$ और $K=030$ है। नगर 4 की जनसंख्या 320 है जो कि 30 से अधिक है। अतः नगर 4 का चयन कर लिया जाता है। इस प्रकार चयनित नगर 4 व 6 है। यहाँ उन सख्याओं को छोड़ दिया गया है जिनके कारण नगर को प्रतिदर्श में सम्मिलित किया जाना सम्भव नहीं था। जैसे $i=7$ और $K=893$ नगर 7 की जनसंख्या 30 है जो कि 893 से कम है। अतः नगर 7 को प्रतिदर्श में नहीं लिया जा सकता है।

आकलकों के लिए सूत्र

स्थिति 1 माना कि समग्र में N एक $U_1, U_2, U_3, \dots, U_N$ है और इन एक-एक पर एक-एक और महायुक्त पर के लिए युक्त मान $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_N, X_N)$ है। इन समग्र में परिमाण n के प्रतिदर्श का चयन परिमाण के समानुपातिक

प्रायिकता से प्रतिस्थापन सहित किया गया है। यहाँ चर x के मान किसी पूर्व में हुये सर्वेक्षण द्वारा या किसी अन्य स्रोत से प्राप्त किये गये हैं।

माना कि एक U_i के चयन किये जाने की प्रायिकता p_i है और i वें प्रतिचयन एकक के लिए युगल मान (y_i, x_i) हैं।

$$\text{जहाँ } i=1, 2, 3, \dots, n \quad \text{और } p_i = \frac{x_i}{X}$$

$$\text{जबकि } \sum_{i=1}^N Y_i = Y \quad \text{व } \sum_{i=1}^N X_i = X.$$

Y का अनभिन्नत आकलन,

$$\hat{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{p_i} \quad \dots (12.71)$$

होता है।

\hat{Y} का प्रसरण,

$$V(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^N \frac{Y_i^2}{p_i} - Y^2 \right) \quad \dots (12.72)$$

$V(\hat{Y})$ का भी प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा आकलन कर सकते हैं। इसका एक अनभिन्नत आकलक निम्न है —

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{p_i^2} - n \hat{Y}^2 \right) \quad \dots (12.73)$$

उपर्युक्त सूत्रों में प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$, Y का एक अनभिन्नत आकलक है और प्रत्येक $\frac{y_i}{p_i}$ का

समान प्रसरण है।

स्थिति 2 : समग्र के N एककों में से यदि n परिमाण के प्रतिदर्शों का चयन परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से बिना प्रतिस्थापन सहित किया गया हो तो Y के

आकलक \hat{Y} व इसके प्रसरण v इस प्रसरण के आकलक के लिए सूत्र निम्न होते हैं।

माना कि पहला एकक U_1 के चयन किये जाने के प्रायिकता P है और i वें प्रतिचयन एकक के लिये युगल प्रेक्षण (y_i, x_i) है,

जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, n$ । माना कि समग्र में प्रेक्षणों का योग,

$$\sum_{i=1}^N y_i = Y, \quad \sum_{i=1}^N x_i = X$$

मतः एवम् U_1 का चयन करने की प्रायिकता,

$$P_1 = \frac{X_1}{X}$$

धीरे दूरी बार में किसी एवम् U_j के चयन करने की प्रायिकता,

$$= \frac{P_j}{1 - P_1}$$

जबकि $i \neq j$

जबकि एवम् U_1 का चयन किया जा चुका है। तीसरी बार में एवम् U_m के चयन विदे जाने की प्रायिकता,

$$= \frac{P_m}{1 - P_1 - P} , \quad i \neq j \neq m$$

जबकि एवम् U_1 तथा U_j का क्रम पहली व दूरी बार में चयन हो चुका है।

दूसी प्रकार n एवम्ओं का एक के बाद एक करके चयन करने की प्रायिकता दी जा सकती है।

मानाकि x_1 , एवम् U_1 के प्रतिदर्श में सम्मिलित होने की प्रायिकता है,

$$x_1 = \sum_{s=1}^{(N-1)} P \left(s_1^1 \right) \quad \dots (12.74)$$

जबकि s_1^1 , एक n परिमाण के सम्मिलित प्रतिदर्श को निरूपित करता है जिसमें i वी एवम् सम्मिलित है। यहाँ Σ को सम्भव सम्भव प्रतिदर्शों के लिए लिया गया है जिसमें i वी एवम् सम्मिलित है।

x_{ij} = एवम् U_i तथा U_j के प्रतिदर्शों में सम्मिलित होने की प्रायिकता है।

$$x_{ij} = \sum_{s=i}^{(N-2)} P \left(s_{ij}^1 \right) \quad \dots (12.75)$$

जहाँ s_{ij}^1 , एक n परिमाण के सम्मिलित प्रतिदर्शों को निरूपित करता है जिसमें i वी तथा j एवम् सम्मिलित है।

माना कि Y का सम्मिलित रेखीय साकार

$$= \sum_{i=1}^n i y$$

$$E \left(\sum_{i=1}^n l_i y_i \right) = \sum_s P \left(\frac{s}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n l_i y_i \right) \\ = \sum_{i=1}^N \pi_i l_i y_i$$

यदि $\sum_{i=1}^N \pi_i l_i y_i$, Y का एक अनभिनत आकलक है तो,

$$\sum_{i=1}^N \pi_i l_i y_i = \sum_{j=1}^N y_j \quad \because l_i \pi_i = 1$$

$$\text{या } l_i = \frac{1}{\pi_i}$$

Y का अनभिनत आकलक जो कि हूरविट्ज व थामसन (Horvitz and Thompson) ने दिया, निम्न है,

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\pi_i} \quad \dots (12.76)$$

और \hat{Y} का प्रसरण,

$$V(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N (\pi_i \pi_j - \pi_{ij}) \left(\frac{Y_i}{\pi_i} - \frac{Y_j}{\pi_j} \right)^2 \quad \dots (12.77)$$

जहाँ $i, j=1, 2, 3, \dots, N$

\hat{Y} के प्रसरण का अनभिनत आकलक जो कि हूरविट्ज व थामसन ने सन् (1952) में दिया उसके लिए सूत्र निम्न है

$$V_{HT}(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^n (1 - \pi_i) \left(\frac{y_i}{\pi_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\pi_{ij}} \frac{y_i}{\pi_i} \frac{y_j}{\pi_j} \quad \dots (12.78)$$

\hat{Y}_{HT} के प्रसरण का अनभिनत आकलक जो कि येट्स व ग्रण्डी (Yates and Grundy) ने सन् 1953 में दिया उसके लिए सूत्र निम्न है -

$$v_{YG}(\hat{Y}_{HT}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{\pi_i \pi_j - \pi_{ij}}{\pi_{ij}} \left(\frac{Y_i}{\pi_i} - \frac{Y_j}{\pi_j} \right)^2 \quad \dots (12.79)$$

जबकि उपर्युक्त सूत्रों (1278) और (1279) में n_1 एका U_1 और U_1 (1279) के एक साथ सम्मिलित होने की प्रायिकता है।

इन सूत्रों द्वारा प्राप्त प्रकरण के आगणना का एक मुख्य दोष यह है कि प्राय कुछ प्रतिदर्शों के लिए इनका मान ऋणात्मक भी जाता है जिसके कारण इन आकलनों का कोई धर्म नहीं रहता और विश्वास्यता घन्तराल के लिए इनका उपयोग नहीं किया जा सकता। कुछ प्रतिदर्शों के लिए इनके द्वारा अच्छे आकलन भी प्राप्त होते हैं।

देशराज आकलन.—यदि N एकवचों के एक समग्र से परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता से बिना प्रतिस्थापन सहित n एकवचों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया है तो देशराज ने समग्र योग Y का एक आकलन \bar{t} दिया (यहाँ $\bar{t} \equiv \bar{Y}$) जो एकवचों के चयन होने के क्रम पर आधारित है।

Y का अनभिन्नत आकलन,

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad \dots (1280)$$

$$\text{जहाँ } t_i = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{i-1} + \frac{y_i}{p_i} (1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{i-1})$$

और \bar{t} के प्रकरण का प्रतिदर्श प्रेषणा के आधार पर अनभिन्नत आकलन निम्न है जो कि सर्वद्व घनात्मक होता है —

$$v(\bar{t}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \quad \dots (1281)$$

विशेषतः जब $n=2$ हो तो,

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+p_1}{p_1} y_1 + \frac{1-p_1}{p_2} y_2 \right\} \quad \dots (1282)$$

$$\text{और } v(\bar{t}) = \frac{1}{4} (t_1 - t_2)^2$$

$$= \frac{1}{4} (1-p_1)^2 \left(\frac{y_1}{p_1} - \frac{y_2}{p_2} \right)^2 \quad \dots (1283)$$

यह सिद्ध किया जा सकता है कि परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता के बिना प्रतिस्थापन द्वारा प्रतिदर्शों का चयन करने की स्थिति में देशराज आकलन, प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन करने की स्थिति की अपेक्षा अधिक दक्ष है। किन्तु इसके लिए आकलनों का परिचालन करने में प्रायिकताओं का परिचालन करना होता है जो कि प्रतिदर्शों बृहत् होने की स्थिति में एक कठिन समस्या है। इसी कारण यहाँ बिना प्रतिस्थापन के प्रतिचयन का प्रयोग n का मान 3 या 4 तक हान की स्थिति में करते हैं। यदि प्रतिदर्शों परिमाण

'n' ब्रह्म हो और $\frac{n}{N}$ उपक्षणीय हो तो यहाँ दोनों प्रकार के प्रतिचयन लगभग समान दक्ष होते हैं।

आकलन की अनुपात विधि

यहाँ उन आकलनों पर विचार करना है जिनमें दो माहच्छिक चरों का अनुपात लिया जाता है। इसका अर्थ है कि इसमें अश व हर दोनों में प्रतिचयन भ्रुटि हो सकती है। अब यह जानने की उत्कण्ठा होती है कि इस प्रकार के आकलन की आवश्यकता ही क्या है? इसकी आवश्यकता के कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं — गेहूँ की उपज का गेहूँ के लिए बोये गये क्षेत्र से अनुपात का आकलन करना है, आयकर की प्राप्ति एवं आय के अनुपात का आकलन करना है आदि। इन सभी स्थितियों में प्रतिदर्श लेकर अनुपात का आकलन करना होता है। अनुपात आकलन, कुल मानों के आकलन के हेतु भी उपयोगी है।

आकलन की अनुपात विधि में एक चर (Y) तो वह होता है जिसके विषय में जानकारी प्राप्त करनी है और दूसरा चर सदैव एक सहायक चर (X) को लेना होता है। सहायक चर इस प्रकार का होना चाहिये कि इसका Y से सम्बन्ध उच्च क्रम का हो। माना कि किसी समग्र में N एकक का मान Y_i है और सहायक चर का मान X_i है (जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, N$)। जैसे 1961 की जनगणना के अनुसार किन्हीं शहरों की जनसंख्या चर X द्वारा सूचित है और 1971 की जनगणना के अनुसार इनकी जनसंख्या Y द्वारा सूचित है। कुल जनसंख्या के अनुपात आकलन हेतु X को सहायक चर के रूप में प्रयोग करना होगा।

उन स्थितियों में जिनमें कि अनुपात के हर (denominator) का वास्तविक मान ज्ञात हों तो यह पर्याप्त है कि अश के कुल मान का आकलन कर लिया जाये और अनुपात ज्ञात कर लिया जाये। किन्तु इस प्रकार प्राप्त अनुपात के आकलन का यथार्थ होना आवश्यक नहीं है।

यदि अश व हर के आकलन लगभग समानुपाती हों अर्थात् इनमें समाभयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो अश व हर के अनुपात को हर के वास्तविक मान से गुणा करके अश के प्राचल का एक अच्छा आकलन प्राप्त हो जाता है।

माना कि समग्र में N एकक हैं और i वें एकक पर प्रेक्षित मान Y_i है और इसके तदनुसार सहचर का मान X_i है। तो, योग,

$$T_X = \sum_{i=1}^N X_i, \quad T_Y = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (12.84)$$

और माध्य-

$$\mu_X = \frac{T_X}{N}; \quad \mu_Y = \frac{T_Y}{N} \quad \dots (12.85)$$

समग्र अनुपात,

$$R = \frac{T_Y}{T_X} = \frac{\mu_Y}{\mu_X} \quad \dots(12.86)$$

यदि समग्र से n परिमाण के एक सरल माहृष्टिक प्रतिदर्श का चयन किया गया हो और i वें एकक पर x का मान y_i व सहचर का मान x_i है तो योग,

$$\hat{T}_X = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \hat{T}_Y = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \dots(12.87)$$

और $\bar{x} = \frac{\hat{T}_X}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{\hat{T}_Y}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \dots(12.87.1)$

आवृत्त अनुपात,

$$\hat{R} = \frac{\hat{T}_Y}{\hat{T}_X} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad \dots(12.88)$$

T_Y का अनुपात भावक,

$$\hat{T}_{YR} = \frac{\hat{T}_Y}{\hat{T}_X} T_X = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} T_X \quad \dots(12.89)$$

समग्र माध्य μ_Y का अनुपात भावक,

$$\hat{\mu}_{YR} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \cdot \mu_X \quad \dots(12.90)$$

\hat{T}_{YR} का प्रसरण,

$$V(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(N-1)} \sum_{i=1}^n (Y_i - RX_i)^2 \quad \dots(12.91)$$

$V(\hat{T}_{YR})$ का n प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा आवृत्त मान निम्न होता है.—

$$v(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{R} x_i)^2 \quad \dots(12.92)$$

$$= \frac{N(N-n)}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 + \hat{R}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \hat{R} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \quad \dots(12.92.1)$$

$$v(\hat{T}_{YR}) = \frac{N(N-n)}{n} (s_y^2 + R^2 s_x^2 - 2R s_{xy}) \dots (12.92)$$

$v(\hat{T}_{YR})$ प्रसरण $V(\hat{T}_{YR})$ का अभिनत माकलक है। अभिनत माकलक अभी तक ज्ञात नहीं किया जा सका है। अनुपात माकलक की अपेक्षित अभिनतता का आकलित मान, $\frac{b(R)}{R}$, निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\frac{b(R)}{R} = \frac{(N-n)}{Nn} [\{ c v(X) \}^2 - \rho c v(X) c v(Y)] \dots (12.93)$$

यहाँ $\frac{1}{n^2}$ व उच्च क्रम के पदों की अपेक्षा कर दी गयी है। यदि Y को X पर समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो उपर्युक्त सूत्र (12.93) से दिखाया जा सकता है कि यह अभिनतता शून्य हो जाती है।

आकलन की समाश्रयण विधि

अनुपात आकलन विधि द्वारा अच्छे आकलक प्राप्त होते हैं यदि चर Y व सहायक चर X में सम्बन्ध रैखिक हो और यह रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो। यदि समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर न जाती हो तो अनुपात आकलन की अपेक्षा रैखिक समाश्रयण आकलन विधि उत्तम है।

समग्र के N एवकों से एक n परिमाण के प्रतिदर्श का सरल यादृच्छिक विधि द्वारा चयन किया गया है। \bar{y} व \bar{x} चरों Y व X के लिये क्रमशः प्रतिदर्श माध्य हैं।

माना कि निम्न आकलक \bar{y}_D विचाराधीन है,

$$\bar{y}_D = \bar{y} - K(\bar{x} - \mu_x) \dots (12.94)$$

यहाँ \bar{y}_D एक अन्तर आकलक (difference estimator) है क्योंकि \bar{y} में से सरल $K(\bar{x} - \mu_x)$ को घटाया गया है। जबकि K एक स्थिरांक है। समीकरण (12.94) में K का चयन इस प्रकार करना होता है कि \bar{y}_D का प्रसरण न्यूनतम हो जबकि,

$$V(\bar{y}_D) = V(\bar{y}) + K^2 V(\bar{x}) - 2K \text{Cov}(\bar{y}, \bar{x}) \dots (12.95)$$

समीकरण (12.95) का K के सम्बन्ध में आशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर K का निम्न मान प्राप्त हो जाता है —

$$K = \frac{\text{Cov}(\bar{y}, \bar{x})}{V(\bar{x})} = \beta \dots (12.96)$$

यहाँ β , \bar{y} का \bar{x} पर समाश्रयण गुणांक है। K के मान β को (12.95) में प्रतिस्थापित करने पर \bar{y}_D का न्यूनतम प्रसरण निम्न होता है —

$$V(\bar{y}_0) = \frac{(N-n)}{Nn} S_y^2 (1 - \rho^2) \quad \dots (12 97)$$

$$\text{जहाँ } S_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \mu_y)^2$$

बिन्दु β का मान पंजात है, परत इससे आकलक b को B के स्थान पर प्रयोग करना होता है। इस स्थिति में,

$$\bar{y}_b = \bar{y} - b(\bar{x} - \mu_x) \quad \dots (12 98)$$

\bar{y}_b को रैखिक समाश्रयण आकलक कहते हैं। यहाँ प्रसरण,

$$V(\bar{y}_b) = V(\bar{y}) (1 - \rho^2) \quad \dots (12 99)$$

$$= \frac{N-n}{Nn} S_y^2 (1 - \rho^2) \quad \dots (12 99 1)$$

जबकि यहाँ $\frac{1}{n^2}$ व उच्च क्रम के पदों की उपेक्षा कर दी गयी है। $V(\bar{y}_b)$ का आकलक,

$$v(\bar{y}_b) = \frac{N-n}{Nn} s_y^2 (1 - r^2) \quad \dots (12 100)$$

होता है, जहाँ r प्रतिदर्श सहसम्बन्ध गुणांक है।

आकलक \bar{y}_b की सभितता - $\text{Cov}(b, \bar{x})$ के समान है। सूत्र (12 99) से स्पष्ट है कि यदि $\rho = 0$ हो तो \bar{y}_b का प्रसरण बही होता है जो कि सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की स्थिति में होता है। साथ ही यदि ρ का मान शून्य हो तो \bar{y}_b का प्रसरण पर्याप्त कम हो जाता है।

टिप्पणी : (1) अनुपात आकलक से समाश्रयण आकलक सर्वत्र उत्तम है। यदि समाश्रयण रेखा मूल बिन्दु से होकर जाती हो तो इन दो आकलन विधियों द्वारा समान परिशुद्ध परिणाम प्राप्त होते हैं।

(2) सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के प्रतिरिक्त अन्य प्रतिचयन विधियों जैसे स्थिति प्रतिचयन विधि, नमबद्ध प्रतिचयन आदि के लिए भी अनुपात या समाश्रयण आकलन का प्रयोग किया जा सकता है। अन्य विधियों के लिये सूत्रों को यहाँ नहीं दिया गया है।

स्थान का संग्रह

प्रतिदर्श के चयन करने के पश्चात् छाँटने काय्यपत्र की आवश्यकता के अनुसार प्रत्येक प्रतिचयन एक से सहरीत किये जाते हैं। इस प्रकार प्राप्त छाँटकों को प्राथमिक स्थान (primary data) कहते हैं। ये छाँटके दो प्रकार से प्राप्त किये जा सकते हैं।—

(1) व्यक्तिगत पूछ-ताछ :—इस प्रकार की पूछ-ताछ के लिए पहले प्रश्नों तथा कुछ सम्भव उत्तरों का एक प्रोफार्मा (proforma) तैयार कर लिया जाता है। इस प्रोफार्मा को सूची-पत्रक (schedule) कहते हैं। इस सूची-पत्रक में दिये प्रश्नों के उत्तर अन्वेषक प्रतिदर्श में चुने हुए एवकों से व्यक्तिगत पूछ-ताछ द्वारा प्राप्त करता है। उनके उत्तर के अनुसार अन्वेषक सूची-पत्रक में टिक (✓) लगा देता है या इन्हें लिख देता है। जैसे किसी घनाज के उत्पादन व्यय का अनुमान लगाना है तो उनसे व्यक्तिगत रूप से मिलकर भिन्न प्रश्न पूछते हैं जैसे वह सिचाई पर, खाद पर, बैलो पर, मजदूरी, बीज व बीटनाशी तथा खरपतवारनाशी आदि पर कितना व्यय करता है? उसे प्रति एकड़ कितना घनाज प्राप्त होता है, कितना भूमा या चरी आदि मिलती है। इस प्रकार की विश्वसनीय सूचना व्यक्तिगत पूछ-ताछ द्वारा प्राप्त की जाती है। कभी-कभी सर्वेक्षण इस प्रकार का होता है कि जिसमें अन्वेषक किसी से पूछताछ न करके स्वयं ही अवलोकन, नाप तोल आदि करके सूची-पत्रक को पूरा करता रहता है और कुछ समय में आवश्यक सूचना प्राप्त करने के पश्चात् वह उस स्थान को छोड़ देता है। इस प्रकार के सर्वेक्षण पहले प्रकार की अपेक्षा कम होते हैं। जैसे जनता में किसी नये नियम के विषय में प्रतिश्रिया को जानने, किसी क्षेत्र में एक विशेष विमारी के घटित होने या रोकथाम के उपायों का प्रभाव देखने आदि सर्वेक्षणों में व्यक्तिगत अवलोकन ही एक उचित उपाय है।

सूची-पत्रक

ग्राम सेवकों से कुछ जानकारी प्राप्त करने के लिए निम्न सूची-पत्रक का प्रयोग किया गया। यहाँ दूने मक्षेय में उदाहरण के रूप में दिया गया है जिससे पाठकों को सूची-पत्रक के विषय में स्पष्ट ज्ञान हो जाये।

1. ग्राम सेवक का व्यक्तिगत परिचय :

नाम _____ कोड नं० _____
 गाँव का नाम _____ पंचायत समिति _____
 (जिसमें वह नियुक्त है)
 आयु : _____ वैवाहिक स्तर : विवाहित , अविवाहित ,
 विधु
 जन्म स्थान : गाँव _____ पंचायत समिति _____ जिला _____
 शिक्षा का स्तर :
 (क) शिक्षित है (ख) हाई स्कूल या सेकण्डरी
 (ग) कृषि में डिप्लोमा प्राप्त (घ) इन्टर या हायर सेकण्डरी
 स्नातक

भाषाएँ जो बहु जानता है :

भाषा	बोल सकता है	पढ़ सकता है	लिख सकता है
हिन्दी			
अंग्रेजी			
अन्य ()			

पिता का नाम _____ व्यवसाय _____

2. ग्राम मेवक बनने से पूर्व आपने किस प्रकार का प्रशिक्षण लिया ?
(क) प्रशिक्षण का नाम _____ अवधि _____
3. आपने ग्राम मेवक बनने के पश्चात् कोई विशेष प्रकार का प्रशिक्षण लिया ।
(क) हाँ (ख) नहीं
यदि हाँ तो, प्रशिक्षण का नाम _____ अवधि _____
4. आपकी मेनी-वाड़ी की नयी विधियों का ज्ञान किन स्त्रोतों से होता है और इनमें से आपकी दृष्टि में फौदसा खोत अधिक प्रभावी है ?
(क) स्त्रोत प्रसार अधिकारी (ख) उन्नत किसान (ग) रेडियो
(घ) व्यापारी (ङ) राष्ट्रीय प्रदर्शन
(च) पुस्तकें एवं परने (छ) अन्य _____
सर्वोत्तम स्त्रोत का नाम या न० _____
5. आप किसानों की कठिनाइयों के विषय में ज्ञान किस प्रकार प्राप्त करने हैं ?
(क) स्वयं उनकी उपज देखाकर (ख) पूछताछ करके
(ग) उनके सेवों की मिट्टी की जाँच कराकर
(घ) शेत में कीटाणुओं का प्रभाव देखाकर
(ङ) पौधों में बीमारियों की जाँच करने
(च) अन्य _____
6. क्या आपने विचार में किसानों को निम्न आवश्यक पदार्थ उपलब्ध हैं ?
(क) अच्छा बीज (ख) रास (ग) पानी
(घ) कीटनाशी (ङ) सरपतकाराणो
7. क्या किसानों को प्रशिक्षण केन्द्रों पर भेजकर प्रशिक्षित करने से लाभ होता है
(क) हाँ (ख) नहीं
8. किसान को किस प्रकार सूचना देना प्रभावी है ?
(क) खेत में बात कर (ख) प्रदर्शनी लगाकर
(ग) व्यक्तिगत मिलकर (घ) राष्ट्रीय प्रदर्शनों द्वारा
(ङ) भाषण द्वारा (च) अन्य _____
9. क्या आप समझते हैं कि आप किसानों के लिए उपयोगी हैं ?
(क) हाँ (ख) नहीं

10 क्या आप अपने क्षेत्र में स्वतन्त्रता में कार्य कर पाते हैं ?

(क) हाँ (ख) नहीं यदि नहीं तो क्यों ?

11. क्या आप अपने कार्य से सन्तुष्ट हैं ?

(क) हाँ (ख) नहीं

(2) डाक द्वारा पूछ-ताछ इस विधि के अन्तर्गत तैयार किये गये प्रश्नों तथा कुछ सम्भावित उत्तरों के प्रोफार्मा की प्रश्नावली (questionnaire) कहते हैं। इसको तैयार करने में सूची-पत्रक की अपेक्षा अधिक सावधानी बतानी होती है इस प्रकार के सर्वेक्षण में प्रश्नावली को डाक द्वारा प्रत्येक चयनकृत प्रतिचयन एक के पाम भेज देने हैं और उनमें प्रार्थना की जाती है कि वे इसे पूर्णतया भरके वापस भेज दें। इस प्रकार के सर्वेक्षण में कम व्यय होता है और बहुत कम प्रशिक्षित व्यक्तियों की आवश्यकता होती है। इन विधि में एक दोष यह है कि अत्यधिक अनुक्रिया अभाव (non response) की समस्या सम्मुख आती है। इस समस्या का समाधान करने की विधि एल-बद्री (El-Badry) ने JASA, 1956 में (डाक प्रश्नावली के लिए एक प्रतिचयन विधि) (A sampling procedure for mailed questionnaire) नामक लेख में दी गयी है।

डाक-प्रश्नावली का प्रयोग किन्हीं दफ्तरों, अधिकारियों या शिक्षित तथा प्रगतिशील व्यक्तियों के प्रतिचयन एककों के रूप में होने की स्थिति में उचित है।

इसके अतिरिक्त किन्हीं प्रयोग में कुछ सशुद्ध एककों पर परीक्षण करने के उपरांत जो प्रेक्षण प्राप्त होते हैं वे प्राथमिक न्यास ही होते हैं।

न्यास का विश्लेषण

न्यास का विश्लेषण करने से पूर्व सूची-पत्रक या प्रश्नावली पर ली गयी सूचना का सम्पादन (editing) करना आवश्यक है। इस प्रकार कुछ स्पष्ट त्रुटियों को दूर कर सकते हैं और अनुपयोगी सूचना को निकाल दिया जाता है। इसके पश्चात् आवश्यक मारगियाँ बनाकर न्यास का मासिकीय विश्लेषण करके आकलन के मान जात कर लिये जाते हैं तथा विभिन्न परिकल्पनाओं की परीक्षा कर ली जाती है। इस विश्लेषण के आधार पर प्राप्त परिणामों का निर्वचन करके एक रिपोर्ट के रूप में प्रस्तुत या प्रकाशित कर दिया जाता है।

प्रश्नावली

1. एक शहर, जिसमें कि 10,000 परिवार हैं, का सर्वेक्षण करके शिक्षित व्यक्तियों की संख्या तथा पारिवारिक माध्य आय का पता लगाना है, तो बताइये कि किस प्रतिचयन विधि को अपनाया जाये और कितने परिमाण का प्रतिदर्शन लिया जाना उचित है कि अच्छे आकलन प्राप्त हो। इसके लिये आप किस प्रकार की पूर्व सूचना प्राप्त करना चाहेंगे ?
2. दिल्ली में नगर सम्पत्ति की सीमा निर्धारित करने के हेतु एक सर्वेक्षण करके पता लगाना है कि इसमें कितने मूल्य की सम्पत्ति सरकार के नियन्त्रण में आ जायेगी। माना कि प्राप्त सूचना के अनुसार ऐसे लगभग 7,000 परिवार हैं जो सम्पत्ति सीमा

में पाते हैं। इन परिवारों को तीन वर्गों में उच्च, मध्यम, और निम्न में सम्पत्ति के मूल्य के आधार पर विभाजित किया गया है और इन वर्गों में माना कि परिवारों की संख्या 1,500, 2,500 व 3,000 है, तो बताइये कि किस प्रतिचयन विधि का प्रयुक्त आये कि जिसमें कुल सम्पत्ति के अच्छे आगणक प्राप्त हो ? प्रत्येक वर्ग में उपयुक्त प्रतिदर्श परिमाण के विषय में भी विचार व्यक्त कीजिये।

- 3 देश राज (Des Raj) आकृतक को समझाये तथा अन्य आकृतकों की तुलना में इसके गुण एवं दोषों का विवेचन कीजिये।
- 4 प्रतिचयन त्रुटि व अप्रतिचयन त्रुटि में अन्तर उदाहरणों सहित बताइये।
- 5 निम्न पर टिप्पणी लिखिए —
 - (1) प्रयोगगत न्यास
 - (2) प्रतिचयन एकक
 - (3) वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन
 - (4) माहच्छिन सम्पत्ता सारणी
- 6 किसी प्रतिदर्श सर्वेक्षण में पूछ-नाछ की विधियों का वर्णन कीजिये और यह भी बताइये कि किन-किन स्थितियों में इनका प्रयोग करना उचित है ?

□ □ □

प्रायः दो या दो से अधिक चरों का एक साथ अध्ययन करने की आवश्यकता होती है। साथ ही इन चरों में फलनीय सम्बन्ध ज्ञानता भी आवश्यक हो जाता है। जैसे माना कि एक वस्तु की उत्पादन-लागत (production cost), बच्चे मात के मूल्य, बिजली व ईंधन का व्यय मजदूरी पर निर्भर है। यदि उत्पादन-लागत व अन्य तीनों चरों में फलनीय सम्बन्ध ज्ञात हो तो बच्चे मात के मूल्य, बिजली व ईंधन के व्यय और मजदूरी के निश्चित मानों के लिए उत्पादन-लागत का अनुमान किया जा सकता है। यहाँ उत्पादित वस्तु का मूल्य, प्राश्नित चर और अन्य तीनों चर, स्वतन्त्र चर कहलाते हैं।

समाश्रयण शब्द का विचार सर्वप्रथम गैल्टन (Galton) ने दिया जबकि उन्होंने यह कहा कि एक व्यक्ति के विशेष लक्षण उसके स्वकुल्य द्वारा शेयर (share) विभे जते हैं। इसी तथ्य को सिद्ध करने के हेतु कार्ल पियर्सन ने पुत्र की ऊँचाई का पिता की ऊँचाई पर समाश्रयण ज्ञात किया।

दो चरों की स्थिति में समाश्रयण रेखा या वक्र को इस प्रकार समझ सकते हैं। माना दो चर Y और X हैं और इनका प्रतिबन्धी बारम्बारता फलन $f(y/x)$ है। यदि $f(y/x)$ के किसी विशेष मान जैसे माध्य, माध्यिका आदि को विचार करें तो यह विशेष मान x पर निर्भर करता है। माना कि यह विशेष मान y_x है। (यहाँ Y एक प्राश्नित चर और X एक स्वतन्त्र चर है।) x में परिवर्तन करने पर y_x में भी परिवर्तन होगा। अतः x के विभिन्न मानों के लिए बिन्दुओं (x, y_x) को घालेखित करके मिलाने पर एक सरल रेखा या वक्र प्राप्त होता है। इन रेखा या वक्र के समीकरण को चर Y का चर X पर समाश्रयण समीकरण कहते हैं। इसी सिद्धान्त को एक से अधिक स्वतन्त्र चरों के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

माना कि एक प्राश्नित चर Y का स्वतन्त्र चरों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ पर समाश्रयण फलन ज्ञात करना है। यह फलन रेखीय या वक्र-रेखीय कैसा भी हो सकता है। व्यापक रूप में गणितीय फलन को निम्न प्रकार में निरूपित कर सकते हैं —

$$E(Y) = \psi(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k / \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_m) \quad \dots (13.1)$$

समीकरण (13.1) में θ_j , (जहाँ $j=1, 2, 3, \dots, m$) ज्ञात प्राचल है। व्यवहार में प्रायः फलन (13.1) को निम्न प्रकार भी लिखते हैं —

$$E(Y) = \psi(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k) \quad \dots (13.1.1)$$

इसी फलन को समाश्रयण फलन कहते हैं। इस फलन का रूप निर्धारित करना प्रयोग करने वाले की दक्षता पर निर्भर करता है। यदि फलन का रूप निश्चित भी कर लिया गया हो तो यह कहना कठिन है कि चरों में सम्बन्ध का अस्तित्व है भी या नहीं। अतः फलनीय सम्बन्ध चयन करने की निम्न दो विधियों में से एक का प्रयोग करना होता है।

विधि 1 — क्रिया सम्बन्धी मन्थों का वैयक्तिक दृष्टि से विचार करना। यह विधि उत्तम है किन्तु क्रिया के विषय में पर्याप्त ज्ञानकारी न होने की स्थिति में इस विधि को प्रयोग में नहीं लाया जा सकता।

विधि 2 — प्रेरित म्याम को धारित करने पर प्राप्त प्रकीर्ण धारण के निरीक्षण द्वारा। प्रथम विधि उपयुक्त न होने की स्थिति में यह विधि अधिक उपयोगी एक व्यावहारिक है।

प्रकीर्ण धारण—बिन्दुओं (X_i, Y_i) , जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, n$, को X-Y समतल (plane) में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त धारण को प्रकीर्ण धारण कहते हैं।

वक्र-समंजन

यदि चर Y का $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ चरों पर समाश्रयण पद्धत का निरवयव कर दिया गया है तो इसका प्रतिपाद है कि यही समष्टि में वास्तविक सम्बन्ध को दर्शाता है। अब प्रेरित मालों के आधार पर इस पद्धत के प्राक्तों के सर्वोत्तम प्रागणक प्राप्त करना है। प्राक्तों के प्राक्तन और उनके द्वारा पद्धत के निर्धारित करने को ही वक्र-समंजन कहते हैं। अब प्राक्तों के प्रागणक करने का प्रथम सम्मुख है। प्राक्तन की अनेकों विधियाँ हैं किन्तु सर्वोत्तम प्रागणक प्राप्त करने के लिए अधिकतर न्यूनतम वर्ग विधि (Method of least squares) का प्रयोग किया जाता है। अब इस विधि का यहाँ संक्षिप्त वर्णन किया गया है जोकि निम्न प्रकार है —

न्यूनतम वर्ग-विधि—सम्बन्ध (13.1) के अनुसार Y एक धारित चर है और $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ स्वतन्त्र चर हैं। माना कि Y', Y का $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ दिखे होने पर प्रत्याशित मान है और Y से अन्तर c है जिसको चि नुटि कहते हैं। अब,

$$Y = Y' + c = \psi(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k) + c \quad \dots (13.2)$$

यहाँ यह भी बताना की गयी है कि c एक साहचर्य चर है जिसका अन्त प्रामाण्य { और इसके माध्य व प्रसरण क्रम 0 और σ_c^2 हैं। यदि σ प्रेरण लिए गये है तबमें से σ प्रेरण में धारित और स्वतन्त्र चरों के मान क्रम Y_1 और $X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{k1}$ हैं। (13.2) के अनुसार,

$$Y_1 = \psi(X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{k1}) + c_1 \quad \dots (13.2.1)$$

$$\text{या } c_1 = (Y_1 - Y'_1) = Y_1 - \psi(X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{k1}) \quad \dots (13.2.2)$$

$(Y_1 - Y'_1)$ का मान पताकर है यदि $Y_1 > Y'_1$ हो और अभावक है यदि $Y_1 < Y'_1$ हो। अब इस चिह्न की समस्या का दूर करने के लिए दोनों ओर के अन्तर का वर्ग कर दिया जाता है। इस प्रकार हमें नुटि के परिमाण में ही सम्मुख रह जाता है। नुटि को न्यूनतम करने के लिए, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा मन्था $(Y_1 - Y'_1)^2$ को न्यूनतम करते हैं। यदि σ प्रेरण लिए गये हों तो गयी प्रेरणा के लिए निम्न अन्त Q को

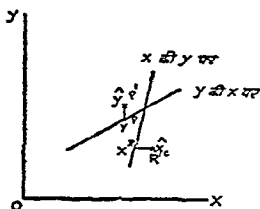
अवकल गणित (differential calculus) की सहायता से न्यूनतम करते हैं।

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i')^2 = \sum_{i=1}^n \{Y_i - \psi(X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, \dots, X_{ki})\}^2 \quad \dots (13.3)$$

उपर्युक्त विधि का प्रयोग विभिन्न फलनों के समझन के हेतु आगामी खण्डों में किया गया है।

सरल समाश्रयण रेखा

यदि सांश्रित चर और स्वतन्त्र चर में या चरों में फलनीय सम्बन्ध रैखिक समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया गया हो तो इसे रैखिक समाश्रयण कहते हैं। शब्द सरल में भाव है कि रेखा के समीकरण में चर Y केवल एक ही स्वतन्त्र चर X पर सांश्रित है। यदि रेखा के समीकरण को इस प्रकार लिया गया हो कि Y -अक्ष के समान्तर विचलनों के वर्ग के योग को न्यूनतम किया गया हो अर्थात् $\sum_i (Y_i - Y_i')^2$ को न्यूनतम किया गया हो तो इसे Y की X पर समाश्रयण रेखा कहते हैं। यदि X -अक्ष के समान्तर विचलनों के वर्ग को न्यूनतम किया गया हो अर्थात् $\sum_i (X_i - X_i')^2$ को न्यूनतम किया गया हो तो इसे X की Y पर समाश्रयण रेखा कहते हैं। यह स्थिति X के सांश्रित चर और Y के स्वतन्त्र चर होने की दशा में उत्पन्न होती है।



चित्र 13-1 दो समाश्रयण रेखाओं का निरूपण

माना कि समष्टि के लिए Y की X पर समाश्रयण रेखा समीकरण है,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + c \quad \dots (13.4)$$

यहाँ β_0 और β_1 दो प्राचल हैं। इन प्राचलों के भागणक b_0 , b_1 (मानलिया) न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। माना कि प्रतिदर्श में युग्म प्रेक्षणों की संख्या n है जो कि निम्न है :—

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

$$X : X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

अतः Y की X पर प्रागणित समाश्रयण रेखा निम्न है —

$$Y' = b_0 + b_1 X \quad \dots(13.5)$$

। वे प्रेशण के लिए रेखा समीकरण,

$$Y_i' = b_0 + b_1 X_i \quad \dots(13.5.1)$$

है अब इन प्रेशणों के पदों में b_0 व b_1 के मान ज्ञात करते हैं

स्पष्टतः,

$$(Y_i - Y_i') = (Y_i - b_0 - b_1 X_i)$$

$$\text{या } (Y_i - Y_i')^2 = (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2$$

अब प्रेशणों के लिए विचलनों के वर्गों का योग,

$$Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i')^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2 \quad \dots(13.6)$$

है। Q का b_0 , b_1 के सम्बन्ध में क्रमशः प्रागणिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर,

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \quad \dots(13.7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0 \quad \dots(13.7.1)$$

इन दोनों समीकरणों को हल करने पर, पहले (13.7) द्वारा,

$$\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n b_0 - b_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

$$\text{या } nb_0 = \sum_{i=1}^n Y_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{या } b_0 = (\bar{Y} - b_1 \bar{X}) \quad \dots(13.8)$$

इसी प्रकार (13.7.1) द्वारा

$$\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i - b_0 \sum_{i=1}^n X_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

b_0 का (13.8) द्वारा मान रखने पर,

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i - (\bar{Y} - b_1 \bar{X}) \sum_{i=1}^n X_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0$$

$$\therefore b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i}$$

$$= \frac{\sum_1 X_i Y_i - \frac{(\sum_1 X_i)(\sum_1 Y_i)}{n}}{\sum_1 X_i^2 - \frac{(\sum_1 X_i)^2}{n}} \quad \dots(13.9)$$

सूत्र (13.9) को माध्य से विचलन के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$b_1 = \frac{\sum_1 (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_1 (X_i - \bar{X})^2} \quad \dots(13.9.1)$$

माना कि $X_i - \bar{X} = x_i$ और $Y_i - \bar{Y} = y_i$

$$\therefore b_1 = \frac{\sum_1 x_i y_i}{\sum_1 x_i^2} \quad \dots(13.9.2)$$

यदि b_1 के लिए दायाँ ओर के व्यञ्जक में अंश व हर को $(n-1)$ से भाग कर दें तो

$$b_1 = \frac{\text{cov}(X, Y)}{v(X)} \quad \dots(13.9.3)$$

यदि $\text{cov}(X, Y) = s_{xy}$ और $v(X) = s_x^2$ रख दें तो

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \dots(13.9.4)$$

b_1 को Y का X पर प्राणिक समाश्रयण गुणांक कहते हैं और इसे b_{yx} द्वारा भी निरूपित करते हैं। अनुलग्न yx यह प्रदर्शित करता है कि Y का X पर समाश्रयण ज्ञात किया गया है। माना \hat{Y} , आश्रित चर Y का आकलित मान है। अतः आकलित समाश्रयण समीकरण निम्न है :—

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= (\bar{Y} - b_1 \bar{X}) + b_1 X \\ (\hat{Y} - \bar{Y}) &= b_1 (X - \bar{X}) \end{aligned} \quad \dots(13.10)$$

समीकरण (13.10) में b_1 , \bar{X} , \bar{Y} के परिकलित मानों को रखने पर प्राणिक समाश्रयण रेखा, $Y' = b_0 + b_1 X$ के रूप में ज्ञात हो जाती है।

यदि X की Y पर समाश्रयण रेखा $X' = \beta_0' + \beta_{xy} Y$ करना हो तो पहले की भाँति β_0' और β_{xy} के प्राणिक मान b_0' और b_{xy} ज्ञात कर सकते हैं। इस स्थिति में,

$$b_0' = (\bar{X} - b_{xy} \bar{Y}) \quad \dots(13.11)$$

$$\text{और } b_{xy} = \frac{\sum_1 (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_1 (Y_i - \bar{Y})^2} \quad \dots(13.12)$$

सूत्र (13 9 4) की भाँति,

$$b_{xy} = s_{xy}/s_y^2 \quad \dots (13 12 1)$$

यदि X को Y पर आश्रयित समाश्रयण देना है,

$$\hat{X} - \bar{X} = b_{xy} (Y - \bar{Y}) \quad \dots (13 13)$$

टिप्पणी (1) सभी सूत्रों का देखने से स्पष्ट है कि Y वा X पर समाश्रयण की स्थिति में यदि X को Y से घोर Y को X से बदल दें तो X वा Y पर समाश्रयण के लिए सूत्र एवं समीकरण ज्ञात हो जाते हैं।

(2) साथ ही यह बात ध्यान देने योग्य है कि X को Y पर समाश्रयण देना बही नहीं होती है जो Y को X पर होती है।

(3) यदि प्रतिदर्शों में युग्म प्रेक्षणों (X_i, Y_i) की बारम्बारता परिवर्ती हो तो b_{yx} का परिवर्तन निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है। माना कि युग्म प्रेक्षण (X_i, Y_i) की बारम्बारता f_i है जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ तो,

$$b_{yx} = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2} \quad \dots (13 14)$$

$$= \frac{\sum f_i X_i Y_i - \frac{(\sum f_i X_i)(\sum f_i Y_i)}{\sum f_i}}{\sum f_i X_i^2 - \frac{(\sum f_i X_i)^2}{\sum f_i}} \quad \dots (13 14 1)$$

(4) s_x व s_y सर्वत्र घनात्मक होते हैं। यद्यपि b_{yx} , b_{xy} व r_{xy} का चिह्न वही होता है यद्यपि μ_{11} , $\sum X_i Y_i$ व s_{xy} के चिह्न एक ही होते हैं।

समाश्रयण गुणांक की परिभाषा

यह घातिता पर से उक्त परिवर्तन का माप है जो कि स्वतन्त्र पर से एक इकाई परिवर्तन करने से उत्पन्न होता है।

समाश्रयण गुणांक b_{yx} की इकाई Y की इकाई प्रति X की इकाई के तुल्य है। जैसे Y का माप किलोग्राम में और X का माप सेंटीमीटर में किया गया हो तो b_{yx} की इकाई किलोग्राम प्रति सेंटीमीटर होती है यदि $b_{yx} = 3.5$ कि० प्रति ग० है तो इसका अर्थ है कि सम्बाई को 1 सेंटीमीटर बढ़ा देने पर भार 3.5 किलोग्राम बढ़ जाता है। यदि b_{yx} का मान ऋणात्मक हो तो Y के मान में कमी हो जाती है। इसी प्रकार का कया b_{xy} के लिए भी दिया जा सकता है।

उदाहरण 13.1 : एक सरपतकालागी (weedside) का मन्त्र की उदर पर प्रभाव जानने के लिए प्रयोग किया गया। परखा बोने के 10 दिन के बाद प्रत्येक घुलण्ड (plot)

में सरपतवारो व मक्का की उपज निम्न थी :—

सरपतवारो की सख्या (X) 80, 28, 42, 37, 61, 52, 45, 39, 38,
34, 56, 40

मक्का की उपज

(कबीटल प्रति हेक्टर) (Y) 10, 24, 15, 28, 16, 26, 25, 26, 18,
22, 22, 20

यह ज्ञात है कि उपज, सरपतवारो की सख्या पर निर्भर करती है। अतः उपज Y की सरपतवारो की सख्या X पर सरल समाश्रयण रेखा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\sum X = 552, \bar{X} = 46, \sum Y = 252, \bar{Y} = 21$$

निम्न सारणी बनाकर b_{yx} का मान सुगमता से परिवर्तित किया जा सकता है।

$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
34	-11	-374	1156	121
-18	3	- 54	324	9
-4	-6	24	16	36
-9	7	- 63	81	49
15	-5	- 75	225	25
6	5	30	36	25
-1	4	-4	1	16
-7	5	- 35	49	25
-8	-3	24	64	9
-12	1	- 12	144	1
10	1	10	100	1
-6	-1	6	36	1
0	0	-523	2232	318

दिये गये परिकलन के अनुसार,

$$\sum_1 (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = -523,$$

$$\sum_1 (X_i - \bar{X})^2 = 2232$$

$$\text{और } n = 12, \bar{X} = 46, \bar{Y} = 21$$

सूत्र (12 9 1) के अनुसार,

$$r_{yx} = \frac{-523}{2232} = -0.2343$$

अतः समीकरण (13 10) की सहायता से प्रागणित समाश्रयण रेखा,

$$(\hat{Y} - 21) = -0.2343 (X - 46)$$

$$\hat{Y} = -0.2343 X + 21 + 10.7778$$

$$\hat{Y} = -0.2343 X + 31.7778$$

है।

यदि $X = 50$ के लिए Y का प्रागणित मान ज्ञात करना है तो,

$$\hat{Y} = -0.2343 \times 50 + 31.7778$$

$$= -11.7150 + 31.7778$$

$$= 20.0628$$

इस प्रकार X के अर्थ किसी भी मान के लिए Y का प्रागणित मान ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी X के मान लेने में यह ध्यान रखना चाहिए कि समझित समाश्रयण समीकरण X के परिसर में व परिसर के बाहर निम्न व उच्च मानों के निकट मानों के लिए ही सत्य है।

सूत्रों के रेखिक रूपांतरण (संकेतिकरण) का समाश्रयण गुणांक पर प्रभाव

प्रतिदर्श में X और Y के रेखीय रूपांतरण के हेतु माना कि

$$u_i = \frac{X_i - a}{c}, \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

$$\text{या } X_i = a + cu_i, \quad Y_i = b + dv_i$$

$$\text{और माध्य } \bar{X} = a + c\bar{u}, \quad \bar{Y} = b + d\bar{v}$$

सूत्र (13 9 1) के अनुसार,

$$r_{yx} = \frac{\sum_i \{(a + cu_i) - (a + c\bar{u})\} \{(b + dv_i) - (b + d\bar{v})\}}{\sum_i \{(a + cu_i) - (a + c\bar{u})\}^2}$$

$$= \frac{cd \sum_i (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{c^2 \sum_i (u_i - \bar{u})^2}$$

$$= \frac{d}{c} r_{uv}$$

... (13 15)

b_{yx} और b_{xy} में सम्बन्ध में स्पष्ट है कि मूल बिन्दु को बदलने का समाश्रयण गुणांक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् यदि कोई अक्षर मान, X और Y के समुच्चय में से घटा या जोड़ दिये जाय तो b_{yx} के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है किन्तु गुणा या भाग करने का समाश्रयण गुणांक पर प्रभाव पड़ता है। यदि केवल मूल बिन्दु ही बदला गया हो तो उस स्थिति में $c=d=1$ होता है और यदि मापनी (scale) में ही परिवर्तन किया गया हो तो $a=b=0$ होता है।

दो सरल समाश्रयण रेखाओं का कटान बिन्दु

सूत्रों (13.10) और (13.13) द्वारा दी गयी दो सरल समाश्रयण रेखाएँ

$$\hat{Y} - \bar{Y} = b_{yx} (X - \bar{X})$$

$$\text{और} \quad \hat{X} - \bar{X} = b_{xy} (Y - \bar{Y})$$

हैं। इन दोनों समीकरणों को बिन्दु, जिसके निर्देशांक (\bar{X}, \bar{Y}) हैं, सन्तुष्ट करता है, अतः इन दोनों रेखाओं का कटान बिन्दु (\bar{X}, \bar{Y}) है अर्थात् X और Y के मध्य पर दोनों रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं।

सरल रेखीय समाश्रयण के लिए प्रसरण-विश्लेषण

यहाँ प्रसरण विश्लेषण को सीधे ही दिया गया है। इसके सिद्धान्तिक विवरण के लिए अध्याय 21 का अध्ययन कीजिये।

पूर्व की भाँति, माना कि समाश्रयण रेखा समीकरण $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ है और प्राचलता β_0 व β_1 के प्रागणक b_0 और b_1 हैं।

यहाँ कुल प्रसरण को तीन सघटकों में विभाजित किया जा सकता है। एक तो b_0 के कारण, दूसरा समाश्रयण (b_1/b_0) के कारण और तीसरा अवशिष्ट (residual) प्रसरण होता है।

माना कि प्रतिदर्श में निम्न n युगल प्रेक्षण

$$\left(\begin{array}{c} Y_1 \\ X_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} Y_2 \\ X_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} Y_3 \\ X_3 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} Y_n \\ X_n \end{array} \right)$$

हैं। इन प्रेक्षणों द्वारा कुल वर्ग-योग ($\sum y_0$) b_0 तथा समाश्रयण (b_1/b_0) के कारण वर्ग योग सामान्य राशियों से ज्ञात कर लिया जात है। वर्ग-योगों को उनकी तदनुसार स्वा० को० द्वारा भाग देने पर माध्य वर्ग योग (मा० वर्ग योग) ज्ञात हो जाते हैं। समाश्रयण मा० वर्ग योग का अवशिष्ट मा० वर्ग योग से अनुपात, परिष्कृत F के समान होता है।

$$\text{यहाँ कुल वर्ग योग} = \sum_i Y_i^2 \quad \dots (13.16)$$

$$b_0 \text{ के कारण वर्ग योग} = (\sum_i Y_i)^2/n \quad \dots (13.17)$$

$$\text{समाश्रयण } (b_1/b_0) \text{ के कारण } \text{व० व०} = b_1 \left\{ \frac{\sum_1 X_i Y_i - \frac{(\sum_1 X_i)(\sum_1 Y_i)}{n}}{\sum_1 X_i^2 - \frac{(\sum_1 X_i)^2}{n}} \right\} \quad (13.18)$$

$$= b_1 \frac{\sum_1 x_i y_i}{\sum_1 x_i^2} \quad (13.18.1)$$

$$= \frac{(\sum_1 x_i y_i)^2 / \sum_1 x_i^2}{\sum_1 y_i^2 - b_1 \sum_1 x_i y_i} \quad (13.18.2)$$

जहाँ $(X_i - \bar{X}) = x_i$ व $(Y_i - \bar{Y}) = y_i$
 घत प्रकृतिष्ट व $v = \sum_1 Y_i^2 - \frac{(\sum_1 Y_i)^2}{n} - b_1 \sum_1 x_i y_i$ (13.19)

$$= \sum_1 y_i^2 - \frac{(\sum_1 x_i y_i)^2}{\sum_1 x_i^2} \quad (13.20)$$

$$= \sum_1 y_i^2 - b_1 \sum_1 x_i y_i \quad (13.20.1)$$

$$= \sum_1 (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (13.20.2)$$

इन वग वोगो को निम्न प्रसरण-विश्लेषण सारणी म इत प्रकार प्रयाग करत है ।

सारणी (13.1) प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण स्रोत	व० व०	व० व०	व० व० व०	F मान
कुल	n	$\sum_1 Y_i^2$		
b_0	1	$\frac{(\sum_1 Y_i)^2}{n}$		
समाश्रयण (b_1/b_0)	1	$b_1 \sum_1 x_i y_i$	$b_1 \sum_1 x_i y_i$	$\frac{b_1 \sum_1 x_i y_i}{s_0^2} \sim F_{1, n-2}$
प्रकृतिष्ट	(n-2)	$\sum_1 y_i^2 - b_1 \sum_1 x_i y_i$	$\frac{\sum_1 y_i^2 - b_1 \sum_1 x_i y_i}{(n-2)}$ $= s_0^2$	
			(मान लिया)	

परिकलित F की पूर्व निर्धारित मा स्त. α व $(1, n-2)$ स्व को के लिए सारणीबद्ध F_α से तुलना करके b_1 की सार्थकता के प्रति निश्चय कर लिया जाता है।

यदि परिकलित $F > F_\alpha$ हा ता b_1 सार्थक है और यदि परिकलित $F < F_\alpha$

हो तो b_1 निरर्थक है अर्थात् समाश्रयण का व्यावहारिक दृष्टि से महत्त्व नहीं है।

उदाहरण 13 2 : यदि उदाहरण 13 1 म दिये गये न्यास के लिए Y का X पर समाश्रयण विश्लेषण करना है तो प्रसरण-विश्लेषण सारणी (13 1) बनाकर समाश्रयण की सार्थकता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

न्यास के लिए उदाहरण (13 1) के अनुसार परिकलित मान निम्न हैं —

$$\sum_1 x_1 y_1 = -523, \sum_1 x_1^2 = 2232$$

$$\sum_1 y_1^2 = 318, n = 12, b_1 = -0.2343$$

$$\text{समाश्रयण के कारण व य} = \frac{(-523)^2}{2232}$$

$$= 122.55$$

$$\text{अवशिष्ट व य} = 318.00 - 122.55$$

$$= 195.45$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण स्रोत	स्व को	व य	मा व य	F-मान
समाश्रयण	1	122.55	122.55	$\frac{122.55}{19.55} = 6.27$
अवशिष्ट	10	195.45	19.55	
पूर्णा	11	318.00		

माना कि $\alpha = 0.5$ है तो सारणी (परि० घ-5 2) द्वारा $F_{0.5, 1, 10} = 4.96$

है। परिकलित F , सारणीबद्ध F से बड़ा है अतः समाश्रयण सार्थक है। इसका अभिप्राय है कि खरपतवार की संख्या का उपज पर सार्थक विपरीत प्रभाव पड़ता है। यहाँ विपरीत प्रभाव इस कारण कहा गया है कि b_1 का मान ऋणात्मक है।

समाश्रयण-गुणांक की सायंकता की t-परीक्षा

यह पहले ही कहा जा चुका है कि यदि X एक t_n पर हो तो X^2 एक $F_{1,n}$ पर होगा। इस कारण यथाय F परीक्षण के जिसका वर्णन हम ऊपर कर चुके हैं हम

$\sqrt{\frac{b_1 \sum x_i y_i}{s_b^2}}$ पर t_{n-2} परीक्षण भी कर सकते हैं।

$$\sqrt{\frac{b_1 \sum x_i y_i}{s_b^2}} = \frac{b_1 \sqrt{\sum x_i^2}}{s_b}$$

माना कि निराकरणय पक्वत्वना

$H_0: \beta_{yx} = C$ को $H_1: \beta_{yx} \neq C$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है, जहाँ C एक ज्ञात अक्षर मान है। यदि β_{yx} की केवल मापकता परीक्षा करनी हो तो इस स्थिति में C को शून्य के समान मानते हैं।

माना कि n परिमाण के प्रतिदर्श में युग्म प्रेक्षण हैं —

Y $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$

X $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

H_0 की t-परीक्षा निम्न प्रकार है —

$$t_{n-2} = \frac{b_{yx} - \beta_{yx}}{s_b} \quad (13.21)$$

$\therefore \beta_{yx} = 0$ है,

$$t = \frac{b_{yx}}{s_b} \quad (13.21.1)$$

जबकि s_b, b_{yx} का मानक विचलन है।

b_{yx} का मान सूत्र (13.9) द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है और s_b निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं —

$$s_b^2 = \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_i y_i - \frac{(\sum_i x_i y_i)^2}{\sum_i x_i^2} \right\} \quad (13.22)$$

$$\text{और } s_b^2 = \frac{s_b^2}{\sum_i x_i^2}$$

$$\therefore s_b = \sqrt{\frac{s_b^2}{\sum_i x_i^2}} \quad (13.22.1)$$

प्रतिदशज (13 21) में b , β व s_b का मान रखकर, t का परिकलित मान ज्ञात कर लिया जाता है।

यदि α सा स्न और $(n-2)$ स्व को पर $t_{\alpha, (n-2)} < t$ हो, तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि β_{yx} का मान, C से सार्थक रूप में भिन्न है। यदि $t < t_{\alpha, (n-2)}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि β_{yx} का मान C सत्य है। $\beta_{yx} = 0$ की स्थिति में H_0 को स्वीकार करने से यह निष्कर्ष निकलता है कि, X में इकाई परिवर्तन करने पर, Y में परिवर्तन महत्वपूर्ण है।

β_{yx} की विश्वास्यता सीमाएँ

माध्य μ के लिए दिये गये सूत्र (9 9) के समान्य निम्न सूत्र द्वारा समग्र समाश्रयण युग्म β_{yx} की α सा स्न पर उपरि व निम्न सीमाएँ U तथा L , ज्ञान कर सकते हैं।

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = b_{yx} \pm s_b t_{\alpha, (n-2)} \quad (13 23)$$

उदाहरण 13 3 β_{yx} की सार्थकता-परीक्षा तथा विश्वास्यता सीमाएँ उदाहरण (13 2) में दिये गये ग्राह के लिए निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

इस उदाहरण द्वारा,

$$b_{yx} = -0.2343, n=12$$

$$s_b^2 = 19.55$$

सूत्र (13 22 1) द्वारा,

$$s_b^2 = \frac{19.55}{2232} = 0.008759$$

$$s_b = 0.93$$

H_0 $\beta_{yx} = 0$ की H_1 $\beta_{yx} \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है तो प्रतिदशज (13 21 1) द्वारा,

$$t = -\frac{0.2343}{0.93} = -2.52$$

सारणी (परि घ-3) द्वारा $\alpha = 0.5$ व स्व को 10 के लिए t का मान = 2.228

$$t > t_{(0.5)} (10)$$

अतः H_0 को अस्वीकार कर दिया। इसका अर्थ है कि β_{yx} सार्थक है। सूत्र (13 23) द्वारा β_{yx} की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = -0.2343 \pm 0.093 \times 2.228$$

$$= -0.2343 \pm 0.2072$$

अतः निम्न सीमा $L = -0.4415$

उपरि सीमा $U = -0.0271$

β_0 की साधकता-परीक्षा

$H_0: \beta_0 = 0$ वी $H_1: \beta_0 \neq 0$ के विरुद्ध, साधकता परीक्षा प्रतिदर्श 1 द्वारा करते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n-2} = \frac{b_0 - 0}{s_{b_0}} \quad (13.24)$$

जबकि b_0 का प्रागणिक मात $(\bar{Y} - b_{yx} \bar{X})$ के समान है s_{b_0} , b_0 का प्रागणिक मानक विचलन है।

b_0 का प्रसरण,

$$s_{b_0}^2 = s_e^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right\} \quad (13.25)$$

b_0 व s_{b_0} के मानों का (12.24) में प्रतिस्थापन करके t का मान परिवर्तित कर लिया जाता है। इस t की सारणीबद्ध $t_{\alpha, (n-2)}$ से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में निर्णय नियमानुसार कर लिया जाता है।

β_0 की $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = b_0 \pm s_{b_0} t_{\alpha, (n-2)} \quad (13.26)$$

उदाहरण 13.4 β_0 की साधकता परीक्षा तथा 95 प्रतिशत ($\alpha = 0.05$) विश्वास्यता सीमाएँ, उदाहरण (13.1) में दिये गये ग्यास के लिए निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

$$b_0 = 31.7778, n = 12, \bar{X} = 46, \bar{Y} = 21$$

$$\sum x_i^2 = 2232$$

सूत्र (13.25) द्वारा,

$$s_{b_0}^2 = 19.55 \left\{ \frac{1}{12} + \frac{46^2}{2232} \right\}$$

$$= 19.55 \{0.0833 + 0.9480\}$$

$$= 20.1616$$

$$\therefore s_{b_0} = 4.49$$

सूत्र (13 24) द्वारा,

$$t = \frac{31\ 7778}{4\ 49}$$

$$\approx 7\ 07$$

सारणीबद्ध (परि घ-3) द्वारा $t_{(05)}(10) = 2\ 228$ जो कि t के परिकल्पित मान से कम है अतः β_0 का मान सार्थक है।

सूत्र (13 26) द्वारा β_0 की 95% विश्वास्यता सीमाएँ निम्न हैं —

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = 31\ 7778 \pm 4\ 49 \times 2\ 228$$

$$= 31\ 7778 \pm 10\ 0037$$

अतः उपरि सीमा $U = 41\ 7815$

और निम्न सीमा $L = 21\ 7741$

\hat{Y} की मानक त्रुटि एवं $\mu_{y/x}$ की विश्वास्यता सीमाएँ

स्पष्टतः $\mu_{y/x} = \beta_0 + \beta_1 X$ का आगणक $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ है। जबकि $\mu_{y/x}$ एक प्रसामान्य समग्र में चर Y का X के दिए हुए मान के प्रति माध्य है। $\mu_{y/x}$ की 100 (1- α) प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न होती हैं —

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha, (n-2)} s_{\hat{Y}}^A \quad (13\ 27)$$

जब कि \hat{Y} की मानक त्रुटि का वर्ग $s_{\hat{Y}}^2$ निम्न होता है —

$$s_{\hat{Y}}^2 = s_e^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right\} \quad (13\ 28)$$

जबकि X एक निर्दिष्ट मान है।

यदि \hat{Y} को एक प्रसामान्य समग्र के माध्य का आगणक न मानकर एक Y -मान के आगणक के रूप में प्रयोग किया गया हो अर्थात् $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ का आगणक $\hat{Y} = b_0 + b_1 X$ हो।

यहाँ X के एक निश्चित मान के लिए Y का प्रागणक \hat{Y} है। इस स्थिति में,

$$s^2_{\hat{Y}} = s_e^2 \left\{ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2} \right\} \quad (13.29)$$

Y की $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ (13.26) के समरूप निम्न सूत्र द्वारा ज्ञान कर सकते हैं —

$$\left. \begin{matrix} U \\ L \end{matrix} \right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha, (n-2)} s^A_{\hat{Y}} \quad (13.30)$$

सरल घरेलिक समाश्रयण समीकरण

अनेक अनुसंधानों एवं गणितीय विश्लेषणों में यह देखा गया है कि प्राप्ति चर व एक या एक से अधिक स्वतंत्र चरों में सम्बन्ध रेखीय न होकर प्रायः घरेलिक होता है। इस वक्र का रूप ज्ञान भी हो सकता है और उसी के अनुसार समाश्रयण समीकरण के गणितीय प्रतिरूप (Mathematical model) का चयन करना होता है। इस प्रकार घरेलिकता के कारण होने वाली त्रुटि को समाप्त कर दिया जाता है। समाश्रयण वक्र का रूप निर्धारित करने के पश्चात् गणितीय समीकरण लिख दिया जाता है और प्रतिदर्श प्रेषणा की सहायता से वक्र का समजन कर दिया जाता है। इस प्रक्रिया को घरेलिक समाश्रयण समजन कहते हैं। कुछ मुख्य मुख्य वक्रों का वर्णन यहाँ दिया गया है।

घरघातांकी समाश्रयण वक्र

प्रायः परतंत्र चर (Y) और स्वतंत्र चर (X) में सम्बन्ध घरघातांकी वक्र नियम का पालन करता है। घरघातांकी वृद्धि वक्र समीकरण —

$$Y = a \beta^X \quad (13.31)$$

है। इस वृद्धि वक्र की विशेषता यह है कि किसी भी समय पर Y में वृद्धि उम समय तक प्राप्त Y के परिमाण के समानुपाती होती है।

इसका ज्यामितीय रूप उदाहरण (13.5) के साथ दिखाया गया है। यहाँ न्यूनतम वक्र बिंदु द्वारा प्राप्त युगपत समीकरणों को हल करने a व β के प्रागणक ज्ञात किये गये हैं। इस वक्र का समजन सयुगणक (Logarithm) की सहायता से किया जाता है।

$$\text{यहाँ } \log_{10} Y = \log_{10} a + X \log_{10} \beta \quad (13.32)$$

$$\text{माना कि } \log_{10} Y = Z, \log_{10} a = a, \log_{10} \beta = b$$

समीकरण (13.32) का निम्न रूप हो जाता है —

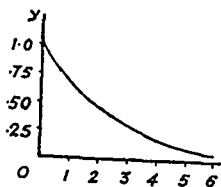
$$Z = a + bX \quad (13.32.1)$$

a और b के प्राक्वित्त मान (13.8) और (13.9) के द्वारा युगपत ज्ञान किये जा सकते हैं। इन मानों का प्रतिव्युत्पन्नक (antilogarithm) देगकर a व β के प्राक्वित्त मान ज्ञान कर लिए जाते हैं जिसका कि प्रतिस्वापन करके वादीय वक्र समीकरण निरिच्छ हो जाता है।

यदि चर X और Y , क्षय (decay) घातीय नियम का पालन करते हों तो घातीय वक्र समीकरण

$$Y = a\beta^x \quad \dots (13.33)$$

है। इस स्थिति में ज्यामितीय रूप को चित्र (13-2) में दिखाया गया है।



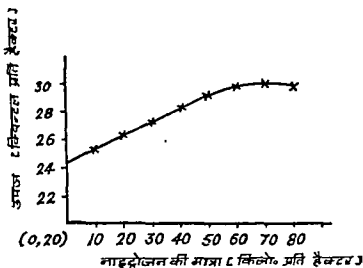
चित्र 13-2 चर घातीय वक्र का रूप

मिश्रचरलिस वक्र

इसी प्रकार अनन्तस्पर्शीय समाश्रयण (asymptotic regression) समीकरण

$$Y = a - \beta\rho^x \quad \dots (13.34)$$

है। यदि $X=0$ हो तो $Y = (a - \beta)$ है। इसके प्रतिरक्त जैसे-जैसे X का मान बढ़ता है ρ^x का मान घटता जाता है ($\because \rho < 1$) अतः Y का मान a की ओर प्रवृत्त करता है। इस a मान को ही अनन्तस्पर्शी कहते हैं। कृषि विज्ञान में इस वक्र को मिश्रचरलिस वक्र (Mitscherlich's curve) कहते हैं। इस वक्र का रूप चित्र (13-3) में दिखाया गया है।



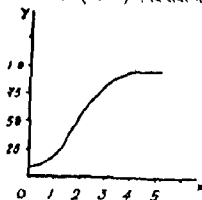
चित्र 13-3 मिश्रचरलिस वक्र

सधुगणकीय वृद्धि नियम

जनसंख्या में वृद्धि प्रायः सधुगणकीय वृद्धि नियम (logistic growth law) का पालन करती है। अतः इस स्थिति में निम्न सधुगणकीय वृद्धि वक्र का समझन किया जा सकता है—

$$\frac{1}{Y} = a + \beta P^x \quad \dots (13.35)$$

इस वक्र का ज्यामितीय रूप चित्र (13-4) में दिखाया गया है।



चित्र 13-4 सधुगणकीय वृद्धि वक्र का स्वरूप

उदाहरण 13.5 : विभिन्न तापक्रमों का पत्ती से वाष्पोत्सर्जन दर पर प्रभाव देता गया। साल तापक्रमों पर वाष्पोत्सर्जन की दर निम्न पायी गयी—

तापक्रम (X) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

वाष्पोत्सर्जन दर (Y) 2, 6, 10, 18, 25, 35, 50

यह ज्ञात है कि वाष्पोत्सर्जन दर तापक्रम पर निर्भर है और एक सीमा तक यह पातीय

नियम का पालन करता है। अतः इन प्रेशणों की महापत्ता में समीकरण $\hat{Y} = a\hat{\beta}^X$ का समझन कर सकते हैं।

पहले समीकरण (13.32.1) का समझन करेंगे और फिर प्रतिवधुगणक लेकर समीकरण (13.31) की साबित समीकरण ज्ञात कर लिया गया है।

Y	$\log Y = Z$	X	ZX	X ²
1.8	0.2553	5	1.2765	25
6.0	0.7782	10	7.7820	100
10.0	1.0000	15	15.0000	225
18.0	1.2553	20	25.1060	400
25.0	1.3979	25	34.9475	625
35.0	1.5441	30	46.3230	900
50.0	1.6990	35	59.4650	1225
	7.9298	140	188.7600	3500

समीकरण $Z = a + bX$ के समझन के लिए,

$$b = \frac{18876 - \frac{79298 \times 140}{7}}{3500 - \frac{(140)^2}{7}}$$

$$= \frac{3016}{700}$$

$$= 0.043$$

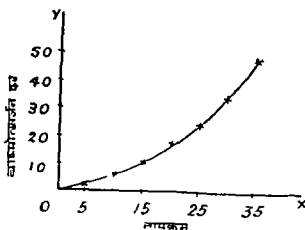
$$a = \bar{Z} - b\bar{X}$$

$$= (1.1328) - (0.043)(20)$$

$$= 0.2728$$

$$\therefore \hat{a} = \text{Antilog}(0.2728)$$

$$= 1.873$$



चित्र (13-5) चरघाताकी समाश्रयण वक्र

और $\beta = \text{Antilog}(0.043)$

$$= 1.104$$

अतः चरघाताकी वृद्धि वक्र

$$Y = (1.873)(1.104)^x$$

है।

द्विघात या उच्चतर घात समीकरण का समझन

अनेक अध्ययनों के अन्तर्गत ऐसा देखा गया है कि द्विघात या अन्य उच्चतर घात बहु-पद समाश्रयण समीकरण उचित है। यदि द्विघात समीकरण का समझन करना है तो माना कि इसका समग्र के लिए गणितीय प्रतिरूप

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad \dots (13.36)$$

है। निर्देशांक (Y, X) को प्राक पर प्रालिखित करने पर दम वक्र की मातृति परबलय (Parabola) जैसी होती है जिसकी प्रश उर्ध्वाधर है। साधारणतया इस परबलय वक्र का पूर्ण भाग प्राक में न होकर वक्रल इमका एक गण्ड ही होता है। इस वक्र का समजन न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा कर सकते हैं। माना कि प्राचली a_0, a_1, a_2 के प्राकसित मान क्रमशः a_0, a_1, a_2 हैं। अतः प्रागणित समीकरण

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad \dots (13.36.1)$$

है। माना कि प्रतिदशं म n युगल-प्रेक्षण (X_i, Y_i) है। (जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, n$)।

सदया $\sum (Y - \hat{Y})^2$ का न्यूनतम वर्ग विधि के अतर्गत a_0, a_1 व a_2 के सम्पुष्ट में प्रागिक अवकलन करने पर प्रगामान्य समीकरण प्राप्त होते हैं। इन समीकरणों को हल करने a_0, a_1, a_2 के मान प्राप्त कर लिए जाते हैं जिनका कि (13.36.1) में प्रतिस्थापन करने प्रागणित द्विघात समीकरण प्राप्त हो जाती है।

प्राप्त प्रगामान्य समीकरण निम्न होते हैं —

$$\left. \begin{aligned} \sum Y_i &= \sum a_0 + a_1 \sum X_i + a_2 \sum X_i^2 \\ \sum X_i Y_i &= a_0 \sum X_i + a_1 \sum X_i^2 + a_2 \sum X_i^3 \\ \sum X_i^2 Y_i &= a_0 \sum X_i^2 + a_1 \sum X_i^3 + a_2 \sum X_i^4 \end{aligned} \right\} \dots (13.37)$$

प्राक्वसक्तानुसार X^2 के स्थान पर द्विघात समीकरण (13.37) में $\sqrt{X}, \log X$

या $\frac{1}{X}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं और फिर इसका समजन भी ऊपर की भाँति कर

सकते हैं।

यदि घन समीकरण

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

का समजन करना हो तो ऊपर दी हुई विधि के समान a_0, a_1, a_2, a_3 के प्रागणित मान a_0, a_1, a_2, a_3 निम्न प्रगामान्य समीकरणों को हल करने प्राप्त कर सकते हैं।

$$\left. \begin{aligned} \sum Y_i &= \sum a_0 + a_1 \sum X_i + a_2 \sum X_i^2 + a_3 \sum X_i^3 \\ \sum X_i Y_i &= a_0 \sum X_i + a_1 \sum X_i^2 + a_2 \sum X_i^3 + a_3 \sum X_i^4 \\ \sum X_i^2 Y_i &= a_0 \sum X_i^2 + a_1 \sum X_i^3 + a_2 \sum X_i^4 + a_3 \sum X_i^5 \\ \sum X_i^3 Y_i &= a_0 \sum X_i^3 + a_1 \sum X_i^4 + a_2 \sum X_i^5 + a_3 \sum X_i^6 \end{aligned} \right\} \dots (13.38)$$

(13. 37) या (13 38) में दी हुई प्रसामान्य समीकरणों को इसी प्रकार हल कर सकते हैं जैसे कि बहुसमाश्रयण समीकरण (multiple regression equation) के समजन में दिया गया है। इस विधि का वर्णन आगामी खण्ड में दिया गया है।

चतुर्घाती या अन्य उच्चतर घाती समीकरण का समजन भी उपर्युक्त रीति से कर सकते हैं किन्तु बहुधा यह निश्चय करना कठिन हो जाता है कि समाश्रयण समीकरण एक घाती, द्विघाती, घन घाती या अन्य उच्च घात का सेना उचित है। इस बात का निर्णय करने में समाश्रयण विश्लेषण सहायता करता है। प्रसरण-विश्लेषण सारणी बनाकर एक घात, द्विघात, घन घात आदि पदों के समाश्रयण गुणांक और इन्हीं से विचलन के लिए माध्य वर्ग योग ज्ञात करके सार्यंकता की परीक्षा कर लेते हैं। यदि यहाँ उच्च घाती पद की सार्यंकता सिद्ध हो तो इसका अभिप्राय है कि अधिक घात का समीकरण सेने से Y का उत्तम भागणक प्राप्त होना है। इसके विपरीत यदि निरयंक सिद्ध हो तो उच्च घाती पद का सम्मिलित करना लाभप्रद नहीं है। किन्तु कभी-कभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्न होती है कि द्विघात पद के लिए परीक्षा द्वारा निरयंक परिणाम प्राप्त हो, पर घन घाती पद के लिए सार्यंकता सिद्ध होती है। ऐसी स्थिति में विशिष्ट रूप से कुछ कहना कठिन है। फिर भी व्यावहारिकता की दृष्टि से इस नियम का पालन किया जा सकता है कि यदि दो लगातार पदों के गुणांक निरयंक सिद्ध हो तो उन्हें छोड़ देना चाहिये और उनसे निम्न घात का समीकरण ही प्रागुक्ति के लिए पर्याप्त गूढ़ है। इन विश्लेषण की विधि का प्रयोग बहु समाश्रयण रेखा के समजन के समरूप होता है केवल समजन में यह अन्तर होता है कि यहाँ चर के पदों $X, X^2, X^3 \dots, X^k$ को विभिन्न चरों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ के रूप में प्रयोग करना होता है। बहुपद समीकरण के समजन के प्रति उदाहरण की बहु समाश्रयण रेखा के समजन के लिए उदाहरण द्वारा पाठक स्वयं समझ सकते हैं।

संबन्धीय बहुपद विधि द्वारा बहुघातीय समाश्रयण समीकरणों का समजन

यदि स्वतन्त्र चर X पर प्रेक्षण एक समान्तर श्रेणी में हो तो संबन्धीय बहुपद विधि का प्रयोग किया जा सकता है। ऊपर खण्ड में देखा गया है कि यदि उच्च घात का पद समीकरण में बढ़ाना है तो फिर से प्रसामान्य समीकरणों को ज्ञात करना एवं हल करना होता है अर्थात् यदि एक घात समीकरण का समजन कर लिया गया हो और अब द्विघात समीकरण का समजन करना हो तो एक घात समीकरण के समजन के लिए किये गये परिकलन तथा भागणकों को प्रयोग नहीं कर सकते हैं। किन्तु संबन्धीय बहुपद विधि द्वारा उच्च क्रम के पद को समीकरण में, पिछले परिकलनों का प्रयोग करके सुगमता से बढ़ा सकते हैं। यह ध्यान रहे कि स्वतन्त्र चर X के मानों में समान अन्तर का प्रतिबन्ध सत्य होना आवश्यक है। यहाँ केवल उस स्थिति में समजन विधि को दिया गया है जबकि मानों के अन्तराल 1 हो। यदि अन्तराल एक न हो तो अन्तराल से भाग देकर X का नैकीकरण कर देना चाहिये।

माना कि चर X पर प्रेक्षण समान्तर श्रेणी में हैं जिनका अन्तराल एक है और सब-

कोणीय बहुपद रीति से बहुपद समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_k X^k \quad \dots (13.39)$$

का समझन करना है। तब समीकरण (13.39) को सर्वत्र निम्न रूप में दिया जा सकता है —

$$Y = a_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_k \phi_k \quad \dots (13.39.1)$$

जहाँ a_p , ($p=0, 1, 2, \dots, k$)

स्विरांक हैं और ϕ_j सबकोणीय बहुपद है।

इस बहुपद समीकरण में गुणांक इस प्रकार चयन किये जाते हैं कि प्रतिदर्शों के n प्रयोगों के लिए,

$$\sum \phi_j \phi_k^j = 0 \quad \text{जबकि } j \neq k$$

इस स्थिति में बहुपद ϕ सबकोणीय कहलाते हैं।

माना कि a_p का प्रागणित मान a_p है जहाँ $p=0, 1, 2, \dots, k$

अतः प्रागणित बहुपद समीकरण निम्न हो जाता है :—

$$\bar{Y} = a_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots + a_k \phi_k \quad \dots (13.40)$$

उपर्युक्त समीकरण में दिये गये स्वरिकों के मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं :—

$$a_0 = \sum_i Y_i / n \quad \dots (13.41)$$

$$\text{और } a_j = \sum_i Y_i \phi_j / \sum_i \phi_j^2 \quad \dots (13.42)$$

$$j=1, 2, 3, \dots, k$$

यह ध्यान रहे कि $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_k$ इत्यादि क्रमशः एक घात, दो घात इत्यादि सबकोणीय बहुपदों को निरूपित करते हैं।

यदि X के मान समान्तर श्रेणी में हों तब तबका समांतर 1 है और चर X का माध्य \bar{X} है जो कि प्रतिदर्श परिमाण n पर प्राधारित है तो ϕ 's और चर X में निम्न सम्बन्ध होते हैं :—

$$\phi_1 = \lambda_1 (X - \bar{X})$$

$$\phi_2 = \lambda_2 \{ (X - \bar{X})^2 - \frac{1}{n} (n^2 - 1) \}$$

$$\phi_3 = \lambda_3 \{ (X - \bar{X})^3 - \frac{3}{n} (3n^2 - 7) (X - \bar{X}) \}$$

$$\phi_4 = \lambda_4 \{ (X - \bar{X})^4 - \frac{1}{n} (3n^2 - 13) (X - \bar{X})^2 + \frac{3}{n^2} (n^2 - 1) (n^2 - 9) \}$$

$$\phi_5 = \lambda_5 \left\{ (X - \bar{X})^5 - \frac{5}{n} (n^2 - 7) (X - \bar{X})^3 + \frac{15}{n^2} (15n^2 - 230n^2 + 407) (X - \bar{X}) \right\}$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ के मान X के पदों में समाकरण (13.40) में रखने पर बहुघातीय समाकरण समीकरण प्राप्त हो जाते हैं।

$$a_0 \text{ के कारण वर्ग योग} = a_0 \sum_1 Y_i$$

$$j\text{वें घातीय पद के कारण वर्ग योग में कमी} = a_j \left(\sum_1 Y_i \phi_{j,i} \right)$$

ϕ_1 जोकि सबसे नीचे का बहुपद है इसके गुणांक और इनकी सख्या प्रतिदर्श परिमाण n पर निर्भर करती है। यह नियम है कि n प्रतिदर्श प्रेक्षणों के लिए सबसे नीचे का बहुपदों की अधिकतम सख्या $(n - 1)$ है। स्पष्टतः किसी n के मान के लिए $(n - 1)$ में ϕ_1 's की सख्या कम तो हो सकती है किन्तु अधिक नहीं हो सकती है।

विभिन्न प्रतिदर्श परिणामों की स्थिति में $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ यदि के मान $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ के मान तथा $\sum \phi_{j,i}^2$ के मान निम्न सारणी में दिये गये हैं।

जब कि λ 's वह सच मान हैं जो n पर निर्भर हैं उनका चयन इस प्रकार किया जाता है कि ϕ_j के मानों का सपने न्यूनतम पदों की पूर्ण सख्या में सशुद्ध हो जाये।

(सारणी 13.2) ϕ_j, λ_j व $\sum \phi_{j,i}^2$ के मानों की सारणी

	n=3		n=4			n=5			
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
	-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1
	0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4
	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6
			3	1	1	1	-1	-2	-4
						2	2	1	1
λ 's	1	3	2	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{85}{12}$
$\sum \phi_{j,i}^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70

	n=6						n=7				n=8						
	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5
	-5	5	-5	1	-1		-3	5	-1	3	-1		-7	7	-7	7	-7
	-3	-1	7	3	5		-2	0	1	-7	4		-5	1	5	-13	23
	-1	-4	4	2	-10		-1	-3	1	1	-5		-3	-3	7	-3	-17
	1	-4	-4	2	10		0	-4	0	6	0		-1	-5	3	9	-15
	3	-1	-7	-3	-5		1	-3	-1	1	5		1	-5	-3	9	15
	5	5	5	1	1		2	0	-1	-7	-4		3	-3	-7	-3	17
							3	5	1	3	1		5	1	-5	-13	-23
λ^2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2
$\Sigma \phi_i^2$	70	84	180	28	252		28	84	6	154	84		168	168	264	616	2184

उच्च घातीय बहुपदों ϕ_j तथा n अन्य मानों के लिए दी गयी सारणी को देखिये ।
उपर्युक्त विधि का प्रयोग निम्न उदाहरण में किया गया है ।

उदाहरण 13.6 : गेहूँ की छोटी किस्म S-307 की उपज, रासायनिक खाद की बढ़ती हुई मात्रा के प्रयुक्त करने पर निम्न पायी गयी —

रासायनिक खाद की मात्रा (X) (किलोग्राम प्रति हेक्टर)	गेहूँ की उपज (Y) (किलोग्राम प्रति हेक्टर)
0 0	18 7
2 5	19 2
5 0	31 2
7 5	41 8
10 5	42 5
12 5	40 4
15 0	38 2
17 5	37 0

इस न्यास में चतुर्थघात बहुपद समीकरण का समझन तथा बहुघातीय पदों की सापेक्षता परीक्षा, दी हुई विधि के अनुसार इस प्रकार कर सकते हैं .—

यहाँ $n=8$ है और $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$, तक बहुपदों को लेना है । X के मानों को 2.5 से भाग कर दें तो इनमें समांतर 1 हो जाता है ।

X_j 's तथा बर्ने-योगों के परिकल्पन के हेतु सापेक्षी जब $n = 8$ सापेक्षी (132) के अनुसार

Y	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	$Y\phi_1$	$Y\phi_2$	$Y\phi_3$	$Y\phi_4$
187	-7	7	-7	7	-1309	1309	-1309	1309
192	-5	1	5	-13	-960	192	960	-2496
315	-3	-3	7	-3	-945	-945	2205	-945
418	-1	-5	3	9	-418	-2090	1254	3762
425	1	-5	-3	9	425	-2125	-1275	3825
404	3	-3	-7	-3	1212	-1212	-2828	-1212
382	5	1	-5	-13	1910	382	-1910	-4966
370	7	7	7	7	2590	2590	2590	2590
ΣY	2	1	2/3	7/12				
$\Sigma \phi_j^2$	168	168	264	616				
योग					2505	-1899	-313	1867

$$\sum_i Y_i = 269.3, \quad \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i y_i^2 = 659.16$$

$$a_0 = \frac{269.3}{8} = 33.66$$

$$a_1 = \frac{250.5}{268.0} = 1.49$$

$$a_2 = \frac{-189.9}{168.0} = -1.13$$

$$a_3 = \frac{-31.3}{264} = -0.118$$

$$a_4 = \frac{186.7}{616} = 0.303$$

$$\hat{Y} = 33.66 + 1.49 \phi_1 - 1.13 \phi_2 - 0.118 \phi_3 + 0.303 \phi_4$$

$$\phi_1 = \lambda_1 (X - \bar{X}) = 2 (X - \frac{38}{8}) = 2 (X - 3.5)$$

$$\phi_2 = \lambda_2 \left\{ (X - \bar{X})^2 - \frac{n^2 - 1}{12} \right\}$$

$$= 1 \left\{ (X - 3.5)^2 - \frac{63}{12} \right\}$$

$$= X^2 - 7.0 X + 12.25 - 5.25$$

$$= X^2 - 7.0 X + 7.0$$

$$\phi_3 = \lambda_3 \left\{ (X - \bar{X})^3 - (X - \bar{X}) \frac{3n^2 - 7}{20} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ (X - 3.5)^3 - (X - 3.5) \frac{185}{20} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \{ X^3 - 10.5 X^2 + 36.75 X - 42.875 - 9.25 X + 32.375 \}$$

$$= \frac{2}{3} \{ X^3 - 10.5 X^2 + 27.5 X - 10.5 \}$$

$$\phi_4 = \lambda_4 \left\{ (X - \bar{X})^4 - \frac{1}{12} (3n^2 - 13) (X - \bar{X})^2 + \frac{3}{800} (n^2 - 1) (n^2 - 9) \right\}$$

$$= \frac{1}{12} \left\{ (X - 3.5)^4 - \frac{1}{12} \times 179 (X - 3.5)^2 + \frac{3}{800} \times 63 \times 55 \right\}$$

$$= \frac{7}{2} \{ X^4 - 140 X^3 + 735 X^2 - 1715 X + 1500 \\ - 128 (X^2 - 70 X + 1225) + 1850 \}$$

$$= \frac{7}{2} \{ X^4 - 140 X^3 + 607 X^2 - 819 X + 1176 \}$$

$$\hat{Y} = 3366 + 149 \times 2 (X - 35) - 113 (X^2 - 70 X + 70)$$

$$- 0118 \times \frac{2}{3} (X^3 - 105 X^2 + 275 X - 105)$$

$$+ 0303 \times \frac{7}{2} (X^4 - 140 X^3 + 607 X^2 - 819 X + 1176) -$$

$$= 18224 - 6149 X + 10425 X^2 - 25546 X^3 + 01768 X^4$$

घातीय पदों के कारण व० य० में वमी,

$$\text{एक घात} = a_1 \sum_1 (Y_i \phi_{1i}) = 377245$$

$$\text{दो घात} = a_2 \sum_1 (Y_i \phi_{2i}) = 214587$$

$$\text{तीन घात} = a_3 \sum_1 (Y_i \phi_{3i}) = 3693$$

$$\text{चतुर्थ घात} = a_4 \sum_1 (Y_i \phi_{4i}) = \frac{56570}{652095}$$

टिप्पणी - X के किसी भी निश्चित मान के लिए Y का आगणित मान \hat{Y} जान सकते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि X के इस मान को, X मानों के अन्तराल में भाग देकर ही आगणित बहुघातीय समीकरण में प्रतिस्थापित करें अन्यथा Y का मान कुछ भ्रुत होगा।

माना कि $X=10$ के लिए Y का आगणित मान, \hat{Y} जान करना है तो $X=10$ न रखर $X = \frac{10}{25} = 4$ देना होगा जब $X=4$ हो तो

$$\hat{Y} = 18224 - 24596 + 166800 - 163490 + 45261 \\ = 42199$$

यह आगणित मान $X=10$ के लिए Y के प्रेषित मान के लगभग समान है।

बहुघातीय पदों की सार्यचना परीक्षा निम्न प्रसरण विच्छेदन सारणी द्वारा कर सकते हैं

विवरण स्रोत	स्व. को०	व० य०	घा० व० य०	$\alpha = 05$ पर	
				F-मान	सारणीकृत F-मान
एकघात पद	1	377.245	377 245	160.19	
द्विघातीय पद	1	214 587	214 587	91 12	
त्रिघातीय पद	1	3 693	3.693	1 57	$F_{1,3}$
चतुर्थघातीय पद	1	56 570	56 570	24 02	$=10 13$
समाश्रयण से विचलन	3	7 065	2 355		
कुल	7	659 16			

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि एक घात, द्विघात तथा चतुर्थघात के पद सार्थक हैं। यदि चाहें तो अन्य उच्च घात के पद यहाँ सम्मिलित किये जा सकते हैं किन्तु प्रेक्षणों की संख्या कम होने के कारण अन्य उच्च पदों को सम्मिलित करना उचित नहीं है। वास्तव में तो समाश्रयण से विचलन की स्वतन्त्रता-कोटि 3 भी कम है किन्तु यहाँ हल को अधिक जटिल न दिखाने के कारण केवल घाट प्रेक्षण ही लिये गये हैं।

बहुसमाश्रयण रेखा

ऐसा देखा गया है कि माश्रित चर (Y) का मान केवल एक स्वतन्त्र चर (X) पर निर्भर न होकर एक से अधिक स्वतन्त्र चरों

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$$

(जहाँ $K > 1$) पर निर्भर होता है।

इसका अर्थ है कि समाश्रयण समीकरण का समजन दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चरों की स्थिति में करना है। जैसे गेहूँ की उपज, खाद की मात्रा, पानी की मात्रा, तथा कीट-नाशी की मात्रा आदि पर निर्भर करती है। यदि उपज तथा इन स्वतन्त्र चरों में सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो बहुसमाश्रयण एक उचित विधि है। इसी प्रकार किसी फँदड़ी में एक उत्पादित वस्तु का मूल्य, बच्ची सामग्री के मूल्य, मजदूरी, पँक करने के खर्च, विज्ञापन व्यय, परिवहन भाडा, मशीनों के मूल्य-ह्रास आदि पर निर्भर करता है। इस प्रकार की स्थितियों में बहुसमाश्रयण रेखा के समजन द्वारा माश्रित चर व स्वतन्त्र चरों में सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं तथा इस प्रकार का समीकरण प्रागुक्ति के लिए अत्यन्त उपयोगी है। माना कि समग्र के लिए बहुसमाश्रयण समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_K X_K \quad \dots (13.43)$$

है। माना कि β_j का आगणक b_j है जहाँ $j = 1, 2, 3, \dots, k$ और प्रागणित समाश्रयण रेखा समीकरण,

$$Y^A = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_K X_K \quad \dots (13.44)$$

है। माना कि n परिमाण के प्रतिदर्श का चयन किया गया है अर्थात् प्रत्येक चर पर संगत प्रेक्षणों की संख्या n है तो इन प्रेक्षणों के द्वारा प्राचलों $b_0, b_1, b_2, \dots, b_K$ के मान ज्ञात करना है।

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ में से प्रत्येक को प्राणिक समाश्रयण गुणांक (Partial regression coefficient) कहते हैं। इन प्राणिकों के प्राणिक मान $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ शून्यतम वर्ग विधि द्वारा ज्ञात करते हैं, इस विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरण निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

$$Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - b_2 X_{2i} - \dots - b_k X_{ki})^2$$

या $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ के सम्बन्ध में प्राणिक अवकलन करने शून्य के समान रखने पर निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं —

$$\begin{aligned} \sum_i Y_i &= \sum_i b_0 + b_1 \sum_i X_{1i} + b_2 \sum_i X_{2i} + \dots + b_k \sum_i X_{ki} \\ \sum_i Y_i &= nb_0 + b_1 \sum_i X_{1i} + b_2 \sum_i X_{2i} + \dots + b_k \sum_i X_{ki} \\ \sum_i X_{1i} Y_i &= b_0 \sum_i X_{1i} + b_1 \sum_i X_{1i}^2 + b_2 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \dots + b_k \sum_i X_{1i} X_{ki} \\ \sum_i X_{2i} Y_i &= b_0 \sum_i X_{2i} + b_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_i X_{2i}^2 + \dots + b_k \sum_i X_{2i} X_{ki} \\ &\vdots \\ \sum_i X_{ki} Y_i &= b_0 \sum_i X_{ki} + b_1 \sum_i X_{ki} X_{1i} + b_2 \sum_i X_{ki} X_{2i} + \dots + b_k \sum_i X_{ki}^2 \end{aligned} \quad \left. \dots \right\} (13.45)$$

इन $(k+1)$ प्रसामान्य समीकरणों को हल करने $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं और इनका समीकरण (13.44) में प्रतिस्थापन करने प्राणिक बहुसमाश्रयण समीकरण ज्ञात हो जाता है। विन्तु उपर्युक्त समीकरणों को निरसन-प्रणाली (elimination method) द्वारा हल करना, दो से अधिक चर होने की स्थिति में, दुर्लभ हो जाता है। अतः इन समीकरणों को घास्यूह (Matrix) की सहायता से सुगमता से हल कर सकते हैं। (13.45) द्वारा दी हुई समीकरणों को घास्यूह के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं —

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \dots & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} & \dots & \dots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \dots & \dots & \sum X_{2i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{1i} X_{ki} & \sum X_{2i} X_{ki} & \dots & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki} Y_i \end{bmatrix} \quad \dots (13.45.1)$$

A
B
Y

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि (13.45.1) में समीकरणों के दायी ओर के पदों को बायी ओर और बायीं ओर के पदों को दायी ओर लिखा गया है।

यदि गुणाक आव्यूह को A से, समाश्रयण गुणाक आव्यूह को B से और दायी ओर के आव्यूह को Y से निरूपित कर दें तो (13.45.1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

$$A B = Y \quad \dots (13.45.2)$$

यहाँ A का क्रम $(K+1) \times (K+1)$, B का क्रम $(K+1) \times 1$ व Y का क्रम $(K+1) \times 1$ है।

समाश्रयण गुणाको का परिवर्तन करने के हेतु इस समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं :—

$$B = A^{-1} Y \quad \dots (13.45.3)$$

जबकि A^{-1} , A का प्रतिलोम आव्यूह है। A^{-1} को दू-लिटिल या बीलकीय सघनन विधि द्वारा सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। इन विधियों का वर्णन परिशिष्ट-क में दिया गया है। माना कि

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_K \\ c_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1K} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_K & c_{K1} & c_{K2} & \dots & c_{KK} \end{bmatrix} = (c)$$

अतः समीकरण (13.45.3),

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_K \\ c_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1K} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_K & c_{K1} & c_{K2} & \dots & c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma Y_j \\ \Sigma X_{j1} Y_j \\ \Sigma X_{j2} Y_j \\ \vdots \\ \Sigma X_{jK} Y_j \end{bmatrix} \quad \dots (13.45.4)$$

समीकरण (13.45.4) द्वारा,

$$b_0 = c_0 \Sigma Y_j + c_1 \Sigma X_{j1} Y_j + c_2 \Sigma X_{j2} Y_j + \dots + c_K \Sigma X_{jK} Y_j \quad \dots (13.46)$$

$$\text{और } b_j = c_j \Sigma Y_j + c_{j1} \Sigma X_{11} Y_j + c_{j2} \Sigma X_{21} Y_j + \dots + c_{jK} \Sigma X_{K1} Y_j \quad \dots (13.47)$$

जहाँ $j = 1, 2, 3, \dots, K$

$b_0, b_1, b_2, \dots, b_K$ के परिवर्तित मानों का समीकरण (13.44) में प्रतिस्थापन करें

प्रागणित समाश्रयण समीकरण प्राप्त हो जाती है। इस समीकरण में स्वतन्त्र चरों

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$$

के भावसंबंधकतानुसार मान रखने पर Y का प्रागणित मान प्राप्त कर लिया जाता है।

प्राय्यूह का क्रम जितना अधिक होता है उतना ही उसका प्रतिलोम ज्ञात करने में अधिक परिश्रम करना होता है। परंतु यदि प्रत्येक चर के मानों का प्रतिदर्श माध्य से विचलन ले लिया जाये तो $b_0 = \bar{Y}$ हो जाता है और अन्य K प्रागणिक समाश्रयण गुणांकों को, $(K \times K)$ क्रम के प्राय्यूह के प्रतिलोम की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार प्राय्यूह का क्रम कम हो जाता है और इस विधि में प्रत्येक चर के लिए,

$$x_j = X_{j1} - \bar{X}_j \quad \text{और} \quad y_i = Y_i - \bar{Y}$$

है।

इस प्रकार माध्य से विचलन लेने पर K क्रमांत b_j 's के लिए $(j=1, 2, 3, \dots, K)$ प्राय्यूह समीकरण निम्न हो जाता है —

$$\begin{bmatrix} \sum x_{11}^2 & \sum x_{11} x_{21} & \dots & \sum x_{11} x_{K1} \\ \sum x_{21} x_{21} & \sum x_{21}^2 & \dots & \sum x_{21} x_{K1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_{K1} x_{K1} & \sum x_{21} x_{K1} & \dots & \sum x_{K1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{11} y_1 \\ \sum x_{21} y_1 \\ \vdots \\ \sum x_{K1} y_1 \end{bmatrix} \quad \dots (13.48)$$

यदि b 's के गुणांक का प्रतिलोम प्राय्यूह (c_{ij}) है तो b 's के मान निम्न प्राय्यूह सम्बन्ध की सहायता से ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1K} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & c_{K3} & \dots & c_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{11} y_1 \\ \sum x_{21} y_1 \\ \vdots \\ \sum x_{K1} y_1 \end{bmatrix} \quad \dots (13.49)$$

उपर्युक्त सम्बन्ध द्वारा,

$$b_j = c_{j1} \sum x_{11} y_1 + c_{j2} \sum x_{21} y_1 + \dots + c_{jK} \sum x_{K1} y_1 \quad \dots (13.50)$$

जहाँ $j=1, 2, 3, \dots, K$

और $i=1, 2, 3, \dots, n$

b_0 तथा b 's के प्रागणित मानों का प्रतिस्थापन करने पर बहुसमाश्रयण समीकरण निम्न रूप में प्राप्त हो जाता है —

$$\hat{Y} = \bar{Y} + b_1 (X_1 - \bar{X}_1) + b_2 (X_2 - \bar{X}_2) + \dots + b_K (X_K - \bar{X}_K) \quad \dots (13.51)$$

इस समीकरण को हल करने पर,

$$\hat{Y} = (\bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 - \dots - b_k \bar{X}_k) + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k \quad \dots (13.51.1)$$

यहाँ

$$b_0 = \bar{Y} - (b_1 \bar{X}_1 + b_2 \bar{X}_2 + \dots + b_k \bar{X}_k)$$

समीकरण (13.44) और (13.51.1) एक समान हैं।

प्रांशिक समाश्रयण गुणांक

परिभाषा : यह मायित चर Y में अनुमानित परिवर्तन की मात्रा है जो कि स्वतन्त्र चर X का इकाई मान बढ़ाने से होता है जबकि अन्य स्वतन्त्र चरों में कोई परिवर्तन न किया गया हो। प्राय β_1, β_2 आदि को $\beta_{Y_1 23 \dots k}, \beta_{Y_2 134 \dots k}$ आदि के रूप में भी लिखते हैं। इस प्रकार का निरूपण स्वयं बताता है कि किस चर X का Y के प्रति प्रांशिक समाश्रयण गुणांक है। किन्तु लिखने में मुगम न होने के कारण व्यावहारिक दृष्टि से यह अच्छा निरूपण नहीं है। अतः इन्हें केवल $\beta_1, \beta_2 \dots$ आदि में ही निरूपित करते हैं और अन्य बातों को स्वयं ही ध्यान में रखा जाता है।

समाश्रयण से विचलन का माध्य वर्ग-योग

इस माध्य वर्ग-योग को $S^2_{Y 123 \dots k}$ में निरूपित करते हैं और

$$S^2_{Y 123 \dots k} = \frac{\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{(n - k - 1)} \quad \dots (13.52)$$

मुताबकि,

$$y_i = (Y_i - \bar{Y}) \quad \text{और} \quad x_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_j)$$

$$\text{जहाँ } j = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$\text{और } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

यहाँ

$$\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_i y_i^2 - R^2 \sum_i y_i^2 \quad \dots (13.53)$$

है। जब कि $R^2 \sum_i y_i^2$ समाश्रयण वर्ग-योग है और गणितीय रूप में इसका मान इस प्रकार होता है :—

$$R^2 \sum_i y_i^2 = b_1 \sum_i x_{1i} y_i + b_2 \sum_i x_{2i} y_i + \dots + b_k \sum_i x_{ki} y_i \quad \dots (13.54)$$

अतः (13.53) में $\sum_i y_i^2$ व $R^2 \sum_i y_i^2$ के मानों का प्रतिस्थापन करने पर

$\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ का मान ज्ञात हो जाता है। $\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ का प्रयोग करके (13.52) द्वारा $S^2_{Y 123 \dots k}$ का मान ज्ञात हो जाता है।

यदि एक भागणित समाश्रयण गुणांक b_j की मानक त्रुटि ज्ञात करना हो तो

$$s_{b_j}^2 = S^2_Y \text{ 123...K} \cdot C_{jj} \quad \dots(13.55)$$

जबकि $S^2_Y \text{ 123...K}$ का मान सूत्र (13.52) के अनुसार है और C_{jj} प्रतिलोम माय्बूह में (j, j) में कोष्ठिका का घन है। $s_{b_j}^2$ का वर्गमूल लेकर मानक विचलन s_{b_j} ज्ञात हो जाता है।

दो प्रांशिक समाश्रयण गुणांकों के अंतर $(b_j - b_l)$, जबकि $j \neq l$, की मानक त्रुटि $s(b_j - b_l)$ ज्ञात करने के लिए,

$$s^2(b_j - b_l) = S^2_Y \text{ 123...K} (C_{jj} + C_{ll} - 2 C_{jl}) \dots(13.56)$$

जहाँ $j, l = 1, 2, 3, \dots, K$

है। यहाँ प्रायः सभी संकेतन पूर्व की भांति हैं। C_{jj} , C_{ll} , C_{jl} के मान, प्रतिलोम माय्बूह के अनुसार प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं।

भागणित प्राधित चर \hat{Y} की मानक त्रुटि

माना कि \hat{Y} की मानक त्रुटि $s_{\hat{Y}}$ है जबकि \hat{Y} , $\mu(Y/X_0)$ का भागणित मान है और X_0 का निश्चित मान

$$X_0 = (X_{01}, X_{02}, X_{03}, \dots, X_{0k})$$

$$\therefore S^2_{\hat{Y}} = S^2_Y \text{ 123...K} \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^k C_{jj} (X_{0j} - \bar{X}_j)^2 + 2 \sum_{l>j=1}^k C_{jl} (X_{0j} - \bar{X}_j) (X_{0l} - \bar{X}_l) \right\} \dots(13.57)$$

$\mu(Y/X_0)$ की 100 (1- α) प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती हैं.—

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = \hat{Y} \pm t_{\alpha, (n-k-1)} s_{\hat{Y}} \quad \dots(13.58)$$

(जहाँ U उपरि सीमा व L-निम्न सीमा है)

$S^2_{\hat{Y}}$ का मान (13.57) द्वारा प्राप्त S^2_Y का वर्गमूल लेकर ज्ञात हो जाता है।

$t_{\alpha, (n-k-1)}$, α सा. स्त. व $(n-k-1)$ स्व. को. के लिए सांख्यिक्य मान है।

आंशिक समाश्रयण गुणांकों व दो गुणांकों में अन्तर की सायंकता-परीक्षा

परिकल्पना $H_0: \beta_j = 0$ की $H_1: \beta_j \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा, प्रतिदर्शज t द्वारा कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है —

$$t_{n-k-1} = b_j / s_{b_j} \quad \dots (13.59)$$

जहाँ b_j, β_j का आगणक है और s_{b_j}, b_j का मानक विचलन है।

यदि $t > t_{\alpha, (n-k-1)}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अर्थ है कि β_j सायंक है और इससे विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् β_j निरर्थक है। β_j के सायंक सिद्ध होने का अभिप्राय है कि चर X_j का समीकरण में जोड़ा जाना लाभप्रद है और निरर्थक होने पर X_j का आश्रित चर-पर व्यावहारिक दृष्टि से कोई प्रभाव नहीं है।

यदि परिकल्पना $H_0: \beta_j = \beta_1$ की $H_1: \beta_j \neq \beta_1$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है तो प्रतिदर्शज,

$$t_{n-k-1} = \frac{b_j - b_1}{s(b_j - b_1)} \quad \dots (13.60)$$

यहाँ b_j व b_1 गुणांक β_j व β_1 के क्रमशः आगणक हैं और $(b_j - b_1)$ की मानक त्रुटि, सूत्र (12.56) द्वारा परिकल्पित की जाती है। पहले की भाँति α मा० स्त० पर H_0 की परीक्षा करके समानता के प्रति निष्कर्ष निकाल लिए जाते हैं।

विश्वास्यता सीमाएँ

β_j व $(\beta_j - \beta_1)$ की 100 $(1-\alpha)$ प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ क्रमशः निम्न सूत्रों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = b_j \pm s_{b_j} t_{\alpha, (n-k-1)} \quad \dots (13.61)$$

और

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = (b_j - b_1) \pm s(b_j - b_1) \times t_{\alpha, (n-k-1)} \quad \dots (13.62)$$

इन सूत्रों में प्रयोगगत सकेतन सब पहले दिये जा चुके हैं।

रेखिक बहु समाश्रयण की स्थिति में प्रसरण-विश्लेषण

यदि रेखिक बहुसमाश्रयण समीकरण में $(k+1)$ प्राचल हैं अर्थात् चर y_k स्वतन्त्र चरों पर आश्रित है और $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k, k$ आंशिक समाश्रयण गुणांक हैं तो $H_0: \beta_1 = 0, 1=1, 2, 3, \dots, k$ की, $H_1: \text{कम से कम एक } \beta_i \text{ शून्य नहीं है के विरुद्ध परीक्षा, प्रसरण-विश्लेषण द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं —}$

(सारणी 13-3) प्रसरण विरमेयन सारणी

विवरण स्त्रोत	स्व० को०	व० व०	मा० व० व०	F-मान
समाश्रयण के कारण	k	$R^2 \sum Y_i^2$	$R^2 \sum y_i^2/k$	$\frac{R^2 \sum y_i/k}{(1-R^2) \sum y_i^2/}$
समाश्रयण से विचलन	(n-k-1)	$\sum y_i^2 - R^2 \sum Y_i^2$	$(1-R^2) \sum y_i^2/$ n-k-1	n-k-1
कुल	(n-1)	$\sum y_i^2$		

यदि F का परिकल्पित मान, α स्त० स्त० व {k, (n-k-1)} स्व० को० के लिए F के सारणीबद्ध मान में अधिक हो तो प्राथिक समाश्रयण गुणांक को शून्य होने के प्रति परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि बहुसमाश्रयण का सेना उचित है। इसका अर्थ है कि बहुसमाश्रयण द्वारा, प्राथित खर में विद्यमान प्राधिकार विचरण की गणना करली गयी है। यदि परिकल्पित F का मान सारणीबद्ध F-मान से कम हो तो बहुसमाश्रयण रखा जा लिया जाता उचित नहीं है।

उदाहरण 13.7 एक सक्षमिक सर्वेक्षण द्वारा पन्द्रह वर्ष की आयु के लड़कों के शारीरिक भार तथा चार मुख्य अंगों के माप निम्न प्रकार थे —

क्रम संख्या	भार (किग्रा/वर्ग) (Y)	अँबाई (व० मी०) (X_1)	बैठन अँबाई (मै० मी०) (X_2)	शिर की परिधि (इं० मी०) (X_3)	सीने की परिधि (इं० मी०) (X_4)
1	36.5	161.0	73.5	52.0	69.0
2.	40.5	151.0	79.0	53.0	72.5
3	27.1	143.0	68.0	52.5	64.0
4	33.2	144.0	65.0	52.0	67.0
5	36.0	155.5	73.0	54.0	68.0
6	28.5	133.0	67.0	51.0	63.0
7	38.0	152.0	71.0	52.5	73.0
8	38.0	159.5	76.0	54.6	68.0
9	29.0	143.0	74.0	51.0	63.5

10	34 0	152 0	72 0	53 0	68 0
11	39 0	160 0	76 0	53 0	68 0
12	40 0	155 5	77 0	54 0	71 0
13	41 0	149 5	75 0	52 0	70 0
14	29 0	142 0	80 0	52 5	62 5
15	31 0	148 0	78 0	52 0	63 0
16.	36 0	158 0	78 0	53 0	66 0
17	48 0	163 0	76 0	54 5	77 0
18	30 0	139 0	70 0	53 0	64 0
19	32 0	147 0	70 0	52 0	67 0
20	42 5	164 0	74 0	54 5	70 0

योग	709 0	3020 0	1472 4	1056 1	1354 5
-----	-------	--------	--------	--------	--------

माध्य मान	35 46	151 00	73 62	52 80	67 78
-----------	-------	--------	-------	-------	-------

सारणी में दिये गये न्यास के लिए,

(i) बहुसमाश्रयण रेखा समीकरण

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4$$

का समझन,

(ii) $X_1 = 160, X_2 = 76, X_3 = 53, X_4 = 68,$

मानों के लिए Y का घाणन,

(iii) आशिव समाश्रयण गुणांक β_1 की सापेक्षता-परीक्षा,

(iv) परिकल्पना $H_0: \beta_2 = \beta_3$ की परीक्षा

(v) β_4 के लिए विश्वास्यता सीमाएँ,

(vi) उपर्युक्त समाश्रयण रेखा के लिए प्रसरण विश्लेषण, निम्न प्रकार कर सकते हैं—

बहुसमाश्रयण रेखा का समझन करने के लिए सबसे पहले निम्न सत्यापनों को ज्ञात करना होता है। यहाँ छोटें अक्षर x, y माध्य से विचलन को निरूपित करते हैं।

$$\sum x_{11}^2 = 1411 00,$$

$$\sum x_{11} x_{21} = 319 50$$

$$\sum x_{21}^2 = 324 44,$$

$$\sum x_{11} x_{31} = 125 60$$

$$\sum x_{31}^2 = 22 05,$$

$$\sum x_{11} x_{41} = 427 00$$

$$\begin{aligned} \sum x_{4i}^2 &= 281\ 24, & \sum x_{2i} x_{3i} &= 30\ 74 \\ \sum x_{1i} y_i &= 735\ 80, & \sum x_{2i} x_{4i} &= 99\ 94 \\ \sum x_{2i} y_i &= 176\ 34, & \sum x_{3i} x_{4i} &= 43\ 68 \\ \sum x_{3i} y_i &= 75\ 11, & \sum y_i^2 &= 585\ 13 \\ \sum x_{4i} y_i &= 369\ 71 \end{aligned}$$

परो x_1, x_2, x_3, x_4 के योग तथा गुणना के योग द्वारा प्राप्त आव्यूह A निम्न है,

$$A = \begin{bmatrix} 1411\ 00 & 319\ 50 & 125\ 60 & 427\ 00 \\ 319\ 50 & 324\ 44 & 30\ 74 & 99\ 94 \\ 125\ 60 & 30\ 74 & 22\ 05 & 43\ 68 \\ 427\ 00 & 99\ 94 & 43\ 68 & 281\ 24 \end{bmatrix}$$

A का प्रतिरोम कोलनीय भजन विधि (परिशिष्ट-क) द्वारा निम्न प्रकार है —

1411 00	319 50	125 60	427 00	1	0	0	0
319 50	324 44	30 74	99 94	0	1	0	0
125 60	30 74	22 05	43 68	0	0	1	0
427 00	99 94	43 60	281 24	0	0	0	1
1	2264	0890	3026	0007087	0	0	0
0	252 1032	2 3045	3 2593	-2264	1	0	0
0	2 3042	10 8716	5 6734	-0890	0	1	0
0	3 2672	5 6770	152 0298	-3026	0	0	1
1	009141	01293		000898	003966	0	0
0	10 85054	5 6436		-0869	-009138	1	0
0	5 6471	151 9866		-2997	-01296	0	1

1	5201	- 008001	- 00842	09216	0
	149 0495	- 2545	- 008205	- 5204	1
1		- 001707	- 000055	- 003491	006709

नियमित पत्रियों को फिर से लिखकर उपरि विभुज के धर्मों को पूरा कर दिया।
 धम प्रकार प्राप्त दार्थों और नम बाबूत, A-2 को लिखित करता है।

1	2264	0890	3026	0007087	0	0	0
0	1	009141	01293	- 000898	003966	0	0
0	0	1	5201	- 008001	- 000842	09216	0
0	0	0	1	- 001707	- 000055	- 003491	006709
1	0	08693	2997	000912	- 000898	0	0
0	1	0	008176	- 000825	003974	- 000842	0
0	0	1	0	- 007113	- 000813	09398	- 003489
0	0	0	1	- 001707	- 000055	- 003491	006709

1	0	0	2997	00153	-- 000827	- 008170	- 0003032
0	1	0	0	- 000811	003974	- 0008135	- 0000548
0	0	1	0	- 007113	- 000813	09398	- 003489
0	0	0	1	- 001707	- 000055	- 003491	006709
1	0	0	0	002041	-- 000811	- 007124	- 001707
0	1	0	0	- 000811	0008135	- 0008135	- 0000548
0	0	1	0	- 007113	- 000813	09398	- 003489
0	0	0	1	- 001707	- 000055	- 003491	006709
I				A ⁻¹			

दायी घोर का आव्यूह A^{-1} लगाने सममित है योडा जो अन्तर पाँचवें दशमलव में है वह परिकलन के कारण है। यदि पाठक चाहें तो यह पुष्टि कर सकते हैं कि

$$A A^{-1} = I$$

घत A^{-1} का प्रयोग करके b_j , s के मान (13 50) की सहायता से निम्न हैं —

$$b_1 = (002041) (735 80) + (-000811) (176 34) + (-007124) (75 11) + (-001707) (369 71)$$

$$= 15018 - 1430 - 5351 - 6311$$

$$= 01926$$

$$b_2 = (-000811) (735 80) + (003974) (176 34) + (-0008135) (75 11) + (-0000548) (396 71)$$

$$= -5967 + 7008 - 0611 - 0203$$

$$= 0227$$

इसी प्रकार

$$b_3 = -8984$$

$$\text{और } b_4 = 9525$$

(13 50) के अनुसार, बहुसमाश्रयण रेखा समीकरण,

$$\hat{Y} = 3546 + 1926 (X_1 - 15100) + 0227 (X_2 - 7362)$$

$$- 8984 (X_3 - 5280) + 9525 (X_4 - 6778)$$

$$\hat{Y} = -124187 + 1926 X_1 + 0227 X_2 - 8984 X_3 + 9525 X_4$$

है।

(ii) उपर्युक्त भागणित समीकरण में $X_1 = 160$, $X_2 = 76$, $X_3 = 53$, $X_4 = 68$

रखने पर \hat{Y} का भागणित मान \hat{Y} ज्ञात हो जाता है।

$$\hat{Y} = -124187 + 1926 \times 60 + 0227 \times 76 - 8984 \times 53 + 9525 \times 68$$

$$= 372773$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि प्रश्न में, 11^{वें} प्रेक्षण में दिये हुए X 's के हल मानों के लिए \hat{Y} का प्रेक्षित मान 390 है जो कि भागणित मान से अधिक भिन्न नहीं है।

(iii) सूत्र (13 53) की सहायता से $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ का मान ज्ञात करने के लिए

(13 54) के अनुसार,

$$R^2 \sum Y_i^2 = (1926)(73580) + (0227)(17634) \\ - (8984)(7511) + (9525)(39671) \\ = 299844$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 58513 - 299844 \\ = 2852856$$

$$s^2_{y \cdot 1234} = \frac{2852856}{(20 - 4 - 1)} \\ = 190190$$

सूत्र (13.55) के अनुसार,

$$s^2_{b_1} = s^2_{y \cdot 1234} \times C_{11} \\ = 190190 \times 002041 \\ = 038818 \\ = 0.197$$

$$H_0: \beta_1 = 0$$

की $H_1: \beta_1 \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा के लिए (13.59) के अनुसार, प्रतिरंजक

$$t = \frac{1926}{0.197} \\ = 0.9776$$

5 प्रतिशत सापेक्षता स्तर और 15 स्व. मो. के लिए सारणी (परि. प-3) द्वारा $t = 2.131$ है।

जो कि परिकल्पित t से अधिक है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इसका अर्थ है कि β_1 निर्णयक है।

(iv) परिकल्पना $H_0: \beta_2 = \beta_3$ की $H_1: \beta_2 \neq \beta_3$ के विरुद्ध सापेक्षता परीक्षा सूत्र (13.60) के द्वारा कर सकते हैं। सूत्र (13.56) की सहायता से,

$$s^2(b_2 - b_3) = s^2_{y \cdot 1234} (C_{22} + C_{33} - 2C_{23}) \\ = 190190 (003974 + 093980 - 2(-0008135)) \\ = 190190 (099581) \\ = 1.8939$$

$$\therefore s(b_2 - b_3) = \sqrt{1.8939} \\ = 1.376$$

$$\therefore t = \frac{0.0227 - (-.8984)}{1.376}$$

$$= 6738$$

सारणी (परि० घ-3) द्वारा $t_{05;15} = 2.131$ है जोकि t के परिकल्पित मान से अधिक है अतः परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् β_2 और β_3 में अन्तर सापेक्ष नहीं है।

(v) β_4 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए,

$$s_{b_4}^2 = s_y^2 \cdot 1234 \cdot C_{44}$$

$$= 19.0190 \times 0.06709$$

$$= 1.27598$$

$$s_{b_4} = 3572$$

सूत्र (13.61) के अनुसार,

$$\left. \begin{array}{l} U \\ L \end{array} \right\} = 9525 \pm 3572 \times 2.131$$

$$= 9525 \pm 7612$$

अतः β_4 की उपरि सीमा $U = 17137$ और निम्न सीमा $L = 1913$ है।

(vi) रैखिक बहुसमाश्रयण के लिए प्रसरण-विवर्तन सारणी

विवरण-स्रोत	स्व० को०	घ० य०	घ० घ० य०	F-मान
समाश्रयण के कारण	4	299.844	74.96	$\frac{74.96}{19.02} = 3.94$
समाश्रयण से विचलन	15	285.286	19.02	
कुल	19	585.13		

उपरोक्त विवरण, सारणी (13.3) के अनुसार किया गया है।

$\alpha = 05$ और (4, 15) स्व० को० पर F का सारणी (परि० घ-5.2) द्वारा मान 3.06 है जो कि परिकल्पित F से कम है। अतः F -परीक्षा द्वारा बहुसमाश्रयण की सापेक्षता सिद्ध होती है। यह इस बात की पुष्टि करता है कि आश्रित चर का इन स्वतन्त्र चरों द्वारा पर्याप्त शुद्ध मापन किया गया है।

दो स्वतन्त्र चर होने पर समाश्रयण रेखा का समंजन

माना कि रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \quad \dots (13.63)$$

घोर $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ के प्रागणित मान क्रमश b_0, b_1 व b_2 हैं। उपर्युक्त समीकरण का समजन बिना प्राध्यूह को महायता से इस विशेष स्थिति में 'n' परिमाण के प्रतिदसों के प्राधार पर निम्न प्रकार किया जा सकता है। तथापि यह विधि भी न्यूनतम वर्ग विधि पर प्राधारित है। यहाँ प्रताभान्य समीकरणों को सामान्य रूप में हल करने, b_1 व b_2 के मानों का परिकलन किया गया है।

यदि $x_{1i} = X_{1i} - \bar{X}_1$, $x_{2i} = X_{2i} - \bar{X}_2$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$

मानते तो,

$$b_0 = \bar{Y} \quad \dots (13.64)$$

$$b_1 = \frac{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{1i} y_i) - (\sum x_{1i} x_{2i})(\sum x_{2i} y_i)}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i} x_{2i})^2} \quad \dots (13.65)$$

$$b_2 = \frac{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i} y_i) - (\sum x_{1i} x_{2i})(\sum x_{1i} y_i)}{(\sum x_{1i}^2)(\sum x_{2i}^2) - (\sum x_{1i} x_{2i})^2} \quad \dots (13.66)$$

b_0, b_1, b_2 के परिकलित मानों को निम्न समीकरण (13.67) में प्रतिस्थापित करने पर प्रागणित समाश्रयण रेखा,

$$\hat{Y} = \bar{Y} + b_1 (X_1 - \bar{X}_1) + b_2 (X_2 - \bar{X}_2) \quad \dots (13.67)$$

जात हो जाती है।

उदाहरण 13.8 गेहूँ की छ किस्मों की उपज तथा इससे दो सपटकों सम्बन्धी ग्यास निम्न सारणी में दिया गया है —

गेहूँ की किस्म	गेहूँ की उपज (किगटम प्रति हेक्टर)	सूखे को भाटा (किगटम प्रति हेक्टर)	सूखे (Spikes) की प्रति बर्त-मीटर संख्या
	(Y)	(X ₁)	(X ₂)
बल्पान सोनारा	58.22	82.21	419
सोनातिका	58.71	79.50	402
एम० 331	57.02	94.35	544
यू० पी० 301	55.78	85.61	433
ई० ए० 222-1	35.62	78.05	589
एच० डी० 1941	63.68	79.09	519

इस न्याम में रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण का समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं —

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 329\ 03, & \sum y_i^2 &= 479\ 60 \\ \sum X_{1i} &= 498\ 81 & \sum x_{1i}^2 &= 188\ 20 \\ \sum X_{2i} &= 2906\ 00 & \sum x_{2i}^2 &= 29399\ 34 \\ \sum x_{1i} y_i &= 171\ 55, & \sum x_{2i} y_i &= -2162\ 87 \\ \sum x_{1i} x_{2i} &= 229\ 37\end{aligned}$$

$$\bar{Y} = 54\ 838, \quad \bar{X}_1 = 83\ 135, \quad \bar{X}_2 = 484\ 333$$

सूत्रों (13 65) व (13 66) की सहायता से,

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{(29399\ 34)(171\ 55) - (229\ 37)(-2162\ 87)}{(188\ 20)(29399\ 34) - (229\ 37)^2} \\ &= \frac{5539554\ 2689}{5480345\ 1911} \\ &= 1\ 011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2 &= \frac{(188\ 20)(-2162\ 87) - (229\ 37)(171\ 55)}{(188\ 20)(29399\ 34) - (229\ 37)^2} \\ &= \frac{-446400\ 5575}{5480345\ 1911} \\ &= -0\ 08145\end{aligned}$$

(13 67) के अनुसार रैखिक बहुसमाश्रयण समीकरण,

$$\hat{Y} = 54\ 838 + 1\ 011 (X_2 - 83\ 135) - 0\ 08145 (X_2 - 484\ 333)$$

$$\hat{Y} = 10\ 238 + 1\ 011 X_1 - 0\ 08145 X_2$$

है।

यदि $X_1 = 80$, $X_2 = 500$ के लिए Y के मान का प्राग्गणन करना है तो,

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 10\ 238 + (1\ 011)(80) - (0\ 08145)(500) \\ &= 50\ 393\end{aligned}$$

प्रश्नावली

1 निम्न की परिभाषा दीजिये —

(क) समाश्रयण गुणांक

(ख) आंशिक समाश्रयण गुणांक

- 2 एक समाश्रयण रेखा का समजन किम मिद्वान्त पर प्राधारित है ? इस मिद्वान्त का समुचित वर्णन भी कीजिये ।
- 3 कारण बताइय कि चर Y का X पर समाश्रयण वह क्यों नहीं होता है जो X का चर Y पर होता है ।
- 4 निम्न ग्यास के लिए सरल समाश्रयण रेखाओं को ज्ञात कीजिये —

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

X=6.2 के मान के लिए Y का प्रागणन भी कीजिये ।

(भाई० ए० एम०, 1954)

$$\left[\begin{array}{l} \text{समाश्रयण रेखाएँ} \\ \hat{Y} = 95X + 7.25, \hat{X} = 95Y - 6.4 \\ \text{हैं और } \hat{Y} = 13.14 \text{ है।} \end{array} \right]$$

- 5 समाश्रयण से प्राप्त क्या समझते हैं ? साधारणतया दो समाश्रयण रेखाएँ क्या होती हैं ? ये रेखाएँ कब सपाती (Coincident) होती हैं ? एक प्राथिक अध्ययन में समाश्रयण समीकरण के प्रयोग का वर्णन कीजिये ।

(एम० कॉम०, बम्बई, 1964)

- 6 एक छात्र के प्रतिदोषों की कठोरता (X) और तनाव-सामर्थ्य (Y) निम्नी निम्नित इकाइयों में निम्न दिये हुए हैं —

X .	146	152	158	164	170	176	182
Y	75	78	77	79	82	85	86

Y की X पर समाश्रयण रेखा ज्ञात कीजिये ।

(भाई० सी० इबल्यू० ए०, 1969)

$$[\text{उत्तर } \hat{Y} = 0.31X + 29.46]$$

7. बम्बई के स्टॉक-एक्सचेंज पर 12 स्टॉकों के एक निश्चित दिन के बंद मूल्य (X) और हजार शेयरों के द्विती (Y) के प्रति निम्न परिष्कृत दिये गये । इन परिष्कृतों की सहायता से समाश्रयण रेखाएँ ज्ञात कीजिये ।

$$\Sigma X = 580, \Sigma Y = 370, \Sigma XY = 11494$$

$$\Sigma X^2 = 41,658, \Sigma Y^2 = 17,206$$

(बी० ए० (पॉलर्स) दिल्ली, 1971)

$$\left[\begin{array}{l} \text{उत्तर } \hat{Y} = 53.55 - 0.47X \\ \hat{X} = 79.16 - 1.1Y \end{array} \right]$$

8. यदि दो चर Y और X हैं जिनमें Y , चर X पर घाश्रित है तो बताइये कि लम्बकोणीय बहुपद विधि द्वारा एक बहुपद समाश्रयण समीकरण का समजन करने के क्या लाभ हैं? यह बताइये कि किस स्थिति में लम्बकोणीय बहुपद विधि का प्रयोग करना सुगम है?
9. एक प्रयोग में खदं गेहूँ (dwarf wheat) की एक किस्म, सोनारा-64 (Sonara-64) की उपज नाइट्रोजन की विभिन्न मात्राओं पर निम्न प्रकार दी—

नाइट्रोजन की मात्रा (किलो प्रति हेक्टर)	देई की उपज (क्विण्टल प्रति हेक्टर)
0	17.84
40	26.90
80	44.57
120	51.63
160	52.61
200	53.89

इस न्यास में एक घन घातीय बहुपद समीकरण का समजन कीजिये और रैखिक द्विघात व घनघात पदों की सार्यवता की परीक्षा कीजिये।

10. एक प्रयोग में लिए गये कुछ बछड़ों की मायु (X) तथा तदनुसार भार (Y) निम्न सारणी में दिये गये हैं जदकि इन बछड़ों को सदैव एक से भोजन पर ही रखा गया :—

मायु

(महीनो में) :	0.5,	1.0,	1.5,	2.0,	2.5,
	3.0,	3.5,	4.0,	4.5,	5.0
	5.5	6.0			

भार

(किलोग्राम में) :	25.0,	29.0,	33.3,	38.7,	44.8
	51.0	58.5,	66.7	76.3	86.7
	94.8,	103.5			

- (i) Y की X पर समाश्रयण रेखा का समजन कीजिये।
(ii) समाश्रयण गुणाव की सार्यवता-परीक्षा कीजिये।

(iii) समाश्रयण गुणांक β_{yx} की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमारे शत कीजिये ।

(iv) समाश्रयण रेखा को ग्राफ पेपर पर प्रालेखित कीजिये ।

11 एक प्रयोग के अन्तर्गत K_2O की विभिन्न मात्राओं पर कन्द (Tuber) की उपज निम्न प्रकार थी —

K_2O की मात्रा (किलो० प्रति हेक्टर)	कन्द की उपज (किरटम प्रति हेक्टर)
0	221
25	251
50	265
75	275
100	291
125	262
150	242

(i) इस न्याम में एक द्विघात समीकरण का समझन कीजिये ।

(ii) रैखिक तथा द्विघात पदों की सापेक्षता-परीक्षा कीजिये ।

(iii) K_2O की 80 किलोग्राम प्रति हेक्टर मात्रा के लिए उपज की प्रागुक्ति कीजिये ।

12 चावल पर किये गये एक क्रीट नियन्त्रण प्रयोग के अन्तर्गत निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए —

चावल की उपज (किरटम प्रति हेक्टर) (Y)	5% जनसंख्या में बंधक बीजियों की संख्या (X_1)	प्रति मूक माधुर बाणों की संख्या (X_2)	बाड़ी पर बागुबाडा (X_3)
3009	1269	106.8	6.7
3882	1320	118.1	3.9
3208	1295	116.2	4.4
3616	1322	128.6	4.0
3430	1302	134.5	4.1
3843	1205	142.5	4.2

(i) भ्रमेकघा समाश्रयण रेखा,

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

का समंजन कीजिये।

(ii) प्रांशिक समाश्रयण गुणांकों की सापेक्षता परीक्षा कीजिये।

(iii) परिकल्पना $H_0 : \beta_{1.23} = \beta_{3.12}$ की $H_1 : \beta_{1.23} \neq \beta_{3.12}$ के विरुद्ध परीक्षा कीजिये।

(iv) समाश्रयण विक्षेपण कीजिये और बहुसमाश्रयण रेखा के श्रेष्ठिक पर टिप्पणी कीजिये।

13. चरों X_1, X_2, X_3 के माध्य से विचलन के वर्ग-योगों तथा गुणनफलनों के आव्यूह का प्रतिलोम आव्यूह निम्न है :—

$$(C_{ij}) = \begin{bmatrix} 10 & -15 & -20 \\ & 12 & -05 \\ & & 17 \end{bmatrix}$$

और $\sum_i x_{1i} Y_i = 15, \sum_i x_{2i} Y_i = 25, \sum_i x_{3i} Y_i = 20, n = 10$

प्रांशिक समाश्रयण गुणांकों का परिकलन कीजिये।

14. तिल की विभिन्न किस्मों पर प्रयोग में निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए :—

किस्म संख्या	प्रति बोधे की उपज (घन में) (Y)	प्रति बोधे में भाटाएँ (X ₁)	प्रति सम्युट (Capsule) बीजों की संख्या (X ₂)
1	5.4	5.1	70.6
2	5.5	5.2	58.4
3	6.0	1.3	75.6
4	6.6	4.6	79.5
5	1.7	3.0	63.2
6	4.6	1.6	66.5
7	3.9	2.7	72.2
8	8.0	4.1	69.8
9	6.6	3.6	108.5
10	0.6	4.2	59.3

उपर्युक्त न्यास द्वारा समाश्रयण रेखा

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

का समंजन कीजिये और $X_1 = 5$ व $X_2 = 80$ के लिए Y का भागणन कीजिये।

□ □ □

पिछले अध्याय में हम देख चुके हैं कि यदि Y का X पर समाश्रयण सरल रेखीय हो तो माध्य त्रुटि वर्ग योग,

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} \\ &= \sigma_y^2 \left[1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right] \end{aligned}$$

होता है। यदि $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$ हो तो समाश्रयण के उपयोग से कुछ लाभ नहीं होता है अर्थात् X के ज्ञान में Y के मान का अनुमान लगाने में कोई सहायता नहीं मिलती है। $\sigma_{xy}^2 / \sigma_x^2 \sigma_y^2$ का मान जितना अधिक हो उतनी ही त्रुटि कम होती है। इसलिए हमको Y और X के बीच रैखिक सहसम्बन्ध का बोटि माप माना जा सकता है। इसको ρ^2 से सूचित करते हैं। ρ इसका वर्गमूल है जिसका मान धनात्मक या ऋणात्मक, σ_{xy} के मान के अनुसार होता है। ρ को X और Y का सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं। ρ के आकलन को r से निरूपित किया जाता है।

परिभाषा सहसम्बन्ध गुणांक किन्हीं दो चरों में रैखिक माहन्यं (Linear association) की कोटि का माप है।

ध्ववहार में अधिकतर प्रतिदर्शों का प्रयोग किया जाता है। अतः यहाँ सब सूत्र r के लिए दिये गये हैं। ρ का मान, इन्हीं सूत्रों में समग्र के समस्त मानों को रखकर जान कर सकते हैं।

माना कि एक n परिमाण के प्रतिदर्शों एकदो पर चरों X और Y के लिए सुगमन प्रेषण निम्न है—

$$X : X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

सहसम्बन्ध गुणांक r का सूत्र,

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{v(X)} \sqrt{v(Y)}} \quad \dots (14.1)$$

है। यदि $\text{cov}(X, Y) = s_{xy}$, $v(X) = s_x^2$ और $v(Y) = s_y^2$, सूत्र (14.1)

में रखें तो,

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} \quad \dots (14.1.1)$$

है। इस सूत्र को निम्न रूप में सुगमता से दिया जा सकता है :—

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad \dots (14.1.2)$$

$$= \frac{\sum_i X_i Y_i - \frac{(\sum_i X_i)(\sum_i Y_i)}{n}}{\sqrt{\left\{ \sum_i X_i^2 - \frac{(\sum_i X_i)^2}{n} \right\} \left\{ \sum_i Y_i^2 - \frac{(\sum_i Y_i)^2}{n} \right\}}} \quad \dots (14.1.3)$$

यदि सूत्र (14.1.2) में $(X_i - \bar{X}) = x_i$, $(Y_i - \bar{Y}) = y_i$ रखें तो

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sqrt{\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2}}$$

स्वार्ज असमिका (Schwarz inequality),

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

के अनुसार ρ (या r) का मान कभी 1 से अधिक नहीं हो सकता है। यदि चरों में सहप्रसरण का मान ऋणात्मक हो तो ρ का मान -1 से कम नहीं हो सकता है क्योंकि सूत्र में हर (denominator) कदापि ऋणात्मक नहीं हो सकता है। यदि दो चर स्वतन्त्र हों तो उनमें सहसम्बन्ध गुणांक सदैव शून्य होता है। इसका कारण यह है कि इस स्थिति में सहप्रसरण शून्य हो जाता है। इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :—

$$\text{माना } E(X_i) = E(\bar{X}) = \mu_X$$

$$\text{और } E(Y_i) = E(\bar{Y}) = \mu_Y$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \\ &= E(X - \mu_X) E(Y - \mu_Y) \\ &= (\mu_X - \mu_X)(\mu_Y - \mu_Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

किन्तु यदि $r=0$ हो तो इसका यह तात्पर्य नहीं है कि X और Y स्वतन्त्र हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक के लिए ऊपर दिये सूत्रों में से किसी एक का परिचलन में सुविधा के अनुसार उपयोग कर सकते हैं। r का मान घनात्मक हो तो घनात्मक सहसम्बन्ध और ऋणात्मक हो तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहलाता है।

उदाहरण 14.1 उदाहरण (13.1) में दिये गये 12 युगल प्रेक्षणों के लिए, खरपतवारों की संख्या तथा मक्का की उरज में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं —

वहाँ दिये गये परिकलनों का यहाँ सीधा प्रयोग किया गया है।

सूत्र (13.1.2) के द्वारा,

$$r = \frac{-523}{\sqrt{2232 \times 318}}$$

$$= \frac{-523}{842.48} = -0.62$$

r का मान -0.62 है जो कि उच्च क्रम का ऋणात्मक सहसम्बन्ध है। अतः यह कह सकते हैं कि जब खरपतवार की संख्या बढ़ती है तो उरज घटती है। r सार्थक होने पर ही दिया गया तर्क वैध है। r की सार्थकता-परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा की जाती है जिसका विवरण आने वाले अध्याय में सूत्र (14.13.1) द्वारा दिया गया है।

सहसम्बन्ध गुणांक और समाश्रयण गुणांकों में सम्बन्ध

हम जानते हैं कि,

$$b_{rx} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{v(X)} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \dots(14.2)$$

$$b_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{v(Y)} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} \quad \dots(14.3)$$

और

$$r_{xy} = r_{yx} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{v(X) v(Y)}} \quad \dots(14.4)$$

$$= \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} \quad \dots(14.4.1)$$

$$\therefore r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}$$

$$= b_{rx} \cdot b_{xy}$$

$$\text{या } r = \sqrt{b_{rx} \cdot b_{xy}} \quad \dots(14.5)$$

अतः सम्बन्ध (14 5) द्वारा स्पष्ट है कि सहसम्बन्ध गुणांक दोनों समाश्रयण गुणांको के गुणोत्तर माध्य के समान होता है। साथ ही यह बात ध्यान देने योग्य है कि b_{YX} , b_{XY} , s_{XY} और r का चिह्न सदैव एक मा होता है क्योंकि s_X व s_Y सर्वदा धनात्मक होते हैं। अतः r का चिह्न वही लेना होता है जो कि b_{YX} या b_{XY} का है।

निर्धारण गुणांक

सूत्र (14 1 4) की सहायता से,

$$\text{सख्या } \frac{(\sum x_i y_i)^2 / \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = r^2 \sum y_i^2 \quad (14 6)$$

$$\text{या } r^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2 / \sum x_i^2}{\sum y_i^2} \quad (14 7)$$

$$r^2 = r^2 \sum y_i^2 / \sum y_i^2 \quad (14 8)$$

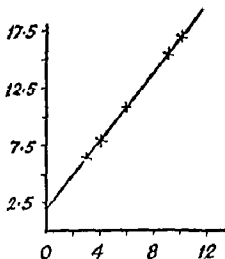
सम्बन्ध (14 8) से स्पष्ट है कि r^2 समाश्रयण के कारण वर्ग योग और कुल वर्ग योग के अनुपात के समान होता है। इस सख्या r^2 को निर्धारण गुणांक कहते हैं इसी प्रकार सख्या $(1 - r^2)$ अनिर्धारण गुणांक कहलाती है। सख्या $\sqrt{1 - r^2}$ को सकामण गुणांक (Coefficient of alienation) कहते हैं।

सहसम्बन्ध गुणांक का ज्यामितीय निरूपण

इस अध्याय के प्रारम्भ में ही कहा जा चुका है कि चर X और Y में सम्बन्ध रेखीय होता है। इस रेखा की चतुर्थांश (quadrant) में स्थिति, r के मान पर निर्भर करती है। उदाहरण के लिए कुछ मान लेकर रेखा की स्थिति को बिन्दु द्वारा प्रदर्शित किया गया है। किसी भी स्थिति में सामान्य रेखा समीकरण को $Y = mX + c$ के रूप में दिया जा सकता है।

(1) यदि $r = 1$ हो तो सूत्र (14 1 2) में Y के स्थान पर $mX + c$ रख देने पर $r = 1$ आ जाता है अतः $r = 1$ होना m व c पर निर्भर नहीं है, इसका अभिप्राय है कि X और Y में परिपूर्ण सहसम्बन्ध होने पर जितना परिवर्तन एक विचरमान में होता है उसके समानुपाती परिवर्तन अन्य चर के तदनुसार मान में होता है। इस स्थिति में सब युगल प्रेक्षण रेखा पर स्थिति होते हैं। जैसा कि चित्र (14 1) में दिखाया गया है। निम्न प्रेक्षणों के लिए $r = 1$ है।

X	Y
3	6 5
4	8 0
6	11 0
9	15 5
10	17 0



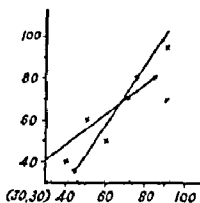
चित्र 14-1 $r=1$ अर्थात् चरों में परिपूर्ण सहसम्बन्ध का आलेखी प्रदर्शन

(2) निम्न प्रेरणा के लिए सहसम्बन्ध गुणांक $r=903$ है अर्थात् चर X और Y में सम्बन्ध उच्च स्तरीय है।

X . 45, 70, 65, 30, 90, 40, 50, 75, 85, 60

Y 35, 90, 70, 40, 95, 40, 60, 80, 80, 50

इस स्थिति में सब युगल प्रेरणा रेखा पर स्थित नहीं होते हैं। किन्तु रेखा पर अधिकतम बिन्दु इकट्ठे गमीय में ही होते हैं जैसा कि चित्र (14-2) से स्पष्ट है।



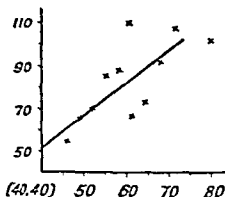
चित्र 14-2 $r=903$ की स्थिति में आलेखी निरूपण

(3) निम्न युगल प्रेरणाओं में सहसम्बन्ध गुणांक $r=452$ है। यहाँ प्रेरणा में सहसम्बन्ध घट्य है।

X 40, 46, 49, 61, 64, 52, 55, 58, 68, 77, 70, 60

Y : 51, 55, 65, 67, 73, 70, 85, 88, 92, 102, 106, 110

इस स्थिति में कुछ ही प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते हैं। इसके प्रतिरक्त यहाँ अस्थिर बिन्दुओं की रेखा से दूरी उच्च स्तरीय सहसम्बन्ध की अपेक्षा अधिक होती है जैसा कि चित्र (14-3) में दिखाया गया है।

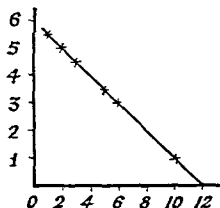


चित्र 14-3 $r = 0.452$ की स्थिति में रेखा चित्र

(4) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणांक $r = -1$ है यहाँ सहसम्बन्ध परिपूर्ण एक ऋणात्मक है।

X	2,	1,	5,	3,	6,	10,	12
Y	50,	55,	35,	45,	30,	10,	0

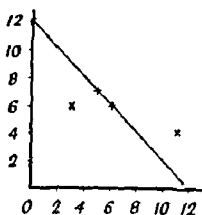
इन सहसम्बन्ध गुणांक के लिए रेखा मूल-मूल से 90° से अधिक का कोण बनाती है। सब युगल प्रेक्षण रेखा पर स्थित होते हैं। भूत यदि एक विवर का मान बढ़ता है तो अन्य का मान एक निश्चित समानुपात में घटता है। इस रेखा को उपर्युक्त प्रेक्षणों के लिए चित्र (14-4) में दिखाया गया है।



चित्र 14-4 $r = -1$ अर्थात् ऋणात्मक परिपूर्ण सहसम्बन्ध का रेखीय निरूपण

(5) निम्न युगल प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध गुणांक $r = -0.153$ है।

X	3,	5,	6,	0,	11
Y	6,	7,	6,	12,	4

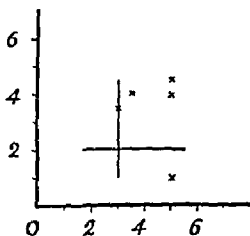


चित्र 14-5 $r = -153$ की स्थिति में प्रस्थित बिन्दु एवं रेखा

इस स्थिति में भी रेखा X-अक्ष से 90° से अधिक का कोण बनाती है। यही सब युगल प्रेशणों में एक चर के अनुसार दूसरे में परिवर्तन समानुपातिक नहीं होता है। इसके प्रतिरक्त रेखा पर कुछ ही प्रायोगिक बिन्दु स्थित होते हैं। जितना r का मान कम होता है उतनी ही बिन्दुओं की रेखा से दूरी अधिक होती है जंसा बि (चित्र 14-5) से स्पष्ट है।

(6) निम्न युगल प्रेशणों में सहसम्बन्ध गुणांक शून्य के समान है अर्थात् $r=0$ है।

X :	50,	2.5,	50,	30,	35,	50
Y :	10,	20,	40,	45,	40,	45



चित्र 14-6 $r=0$ की स्थिति में प्रकीर्णत घासेस

ज्यों में सहसम्बन्ध न होने की स्थिति में चित्र एक प्रकीर्णत घासेस (Scatter diagram) होता है। पर X और Y स्वतन्त्र होने के कारण, प्रायोगिक बिन्दु सर्व

(collinear) नहीं होते हैं। अतः इस रेखा पर दो से अधिक बिन्दु स्थित नहीं होते हैं और एक दूसरे से दूरी भी अधिक होती है।

इन चित्रों की भाँति, r के किसी भी अन्य मान को निरूपित करती हुई रेखा दिखाई जा सकती है।

युगल प्रेक्षणों की परिधर्तों बारम्बारता की स्थिति में सहसम्बन्ध

पूर्व में दिये r के लिए सूत्रों में यह कल्पना की गई थी कि प्रत्येक प्रेक्षण एक बार या समान बारम्बारता सहित घटित है। यदि यह कल्पना सत्य न हो अर्थात् युगल प्रेक्षणों की बारम्बारता भिन्न-भिन्न हो तो r के परिकलन में बारम्बारता को भी सम्मिलित करना आवश्यक है। माना कि युगल प्रेक्षण और उनकी तदनुसार बारम्बारता इस प्रकार है :—

चर (X)	चर (Y)	बारम्बारता (f)
X_1	Y_1	f_1
X_2	Y_2	f_2
X_3	Y_3	f_3
\vdots	\vdots	\vdots
X_K	Y_K	f_K

$$\text{माना } \sum_{i=1}^K f_i = n \quad (\text{प्रतिदर्श परिमाण})$$

चर X और Y में सहसम्बन्ध गुणांक r को निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं :—

$$r = \frac{\sum_{i=1}^K f_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^K f_i (X_i - \bar{X})^2 \times \sum_{i=1}^K f_i (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad \dots (14.9)$$

यदि $X_i - \bar{X} = x_i$ और $(Y_i - \bar{Y}) = y_i$ रखें तो,

$$\therefore r = \frac{\sum f_i x_i y_i}{\sqrt{(\sum f_i x_i^2)(\sum f_i y_i^2)}} \quad \dots (14.9.1)$$

यदि प्रेक्षणों का माध्य से विचलन ज्ञात करने में कठिनाई या अशुद्धि हो तो उपर्युक्त सूत्र को निम्न रूप में प्रयोग कर सकते हैं। इसमें प्रेक्षणों का माध्य से विचलन ज्ञात नहीं करना होता है :—

$$r = \frac{\sum_i f_i X_i Y_i - \frac{(\sum_i f_i X_i)(\sum_i f_i Y_i)}{n}}{\sqrt{\sum_i f_i X_i^2 - \frac{(\sum_i f_i X_i)^2}{n}} \sqrt{\sum_i f_i Y_i^2 - \frac{(\sum_i f_i Y_i)^2}{n}}} \dots (14.9.2)$$

जहाँ $\sum_i f_i = n$

उदाहरण 14.2 : एक बच्चा के विद्यार्थियों की उपस्थिति, इनके द्वारा प्राप्त अंकों के वर्ग अंतराल तथा विद्यार्थियों की संख्या निम्न सारणी में दी गई है।

बच्चों के वर्ग अंतराल X	उपस्थिति Y	विद्यार्थियों की संख्या f
20 — 30	26	1
30 — 40	33	2
40 — 50	34	6
50 — 60	35	4
60 — 70	40	5
70 — 80	42	2

विद्यार्थियों के अंकों व उपस्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं.—

बच्चों के मध्य-मान यहाँ अंक X के मानों के रूप में लिये जाते हैं।

अंक X व Y में सहसम्बन्ध गुणांक निम्न सारणी बनाकर ज्ञात करना सुगम है।

$$\text{यहाँ } \sum_i f_i X_i = 1060$$

$$\text{और } \sum_i f_i = 20$$

$$\therefore \bar{X} = \frac{1060}{20} = 53$$

$$\sum_i f_i Y_i = 720 \quad \therefore \bar{Y} = \frac{720}{20} = 36$$

$$\text{माना } X_i - \bar{X} = x_i$$

$$\text{और } Y_i - \bar{Y} = y_i$$

परिकलन के लिए सारणी .—

X	Y	f	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$f x_i^2$	$f y_i^2$	$f x_i y_i$
25	26	1	-28	-10	784	100	280	784	100	280
35	33	2	-18	-3	324	9	54	648	18	100
45	34	6	-8	-2	64	4	16	384	24	96
55	35	4	2	-1	4	1	-2	16	4	-8
65	40	5	12	+4	144	16	48	720	80	240
75	42	2	22	+6	484	36	132	968	72	264
योग								3520	298	980

सूत्र (14.9.1) द्वारा,

$$r = \frac{980}{\sqrt{298 \times 3520}} = \frac{980}{\sqrt{1048960}} = \frac{980}{1024.13} = 0.956$$

है। अतः विद्यार्थियों के प्राप्त अंकों तथा लपस्थिति में उच्च क्रम का सहसम्बन्ध है।

सहसम्बन्ध-गुणांक का प्रायिकता घनत्व फलन

यह अध्याय (10) में दिया जा चुका है कि एक प्रसामान्य चर X, जिसका माध्य μ_x और मानक विचलन σ_x है, का घनत्व फलन

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2}}$$

होता है। X के दो मानों के बीच प्रेक्षणीय प्रायिकता, इन पर कोटियों के बीच के क्षेत्र के समान होती है इसी प्रकार दो चर X और Y जिनके बंटन क्रमशः $N(\mu_x, \sigma_x)$ और $N(\mu_y, \sigma_y)$ हैं, समतल पर मानों का एक युगल प्रदर्शित करते हैं। प्रसामान्य द्विचर बंटन की स्थिति में घनत्व फलन $f(x, y)$ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left\{ \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\}}$$

.... (14.10)

घनत्व फलन को द्विचर के सम्बन्ध में एक वक्र से नहीं बल्कि एक पृष्ठ में दर्शाते हैं।

जहाँ ρ चरों X और Y में समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक है। इस स्थिति में प्रापिकता, घापतन द्वारा ज्ञात की जाती है और प्रसामान्य द्विचर बारम्बारता बटन का रूप घुटि-त्रिकोण (Cocked hat) जैसा होता है। इसको चित्र (14-7) में दिखाया गया है।



चित्र 14-7 घुटि-त्रिकोण (Cocked hat)

प्रसामान्य द्विचर बटन के लिए शोषित वर्ग योग s_x^2 , s_y^2 और सहसम्बन्ध गुणांक का सम्मिलित बटन इस प्रकार का होता है —

$$C e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{s_x^2}{\sigma_x^2} - 2\rho r \cdot \frac{s_x s_y}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{s_y^2}{\sigma_y^2} \right)} \times (s_x s_y)^{n-2} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} ds_x ds_y dr \dots (14.11)$$

ध्यन्त्रक (14.11) में,

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad s_y^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

और C एक घबर है।

यदि $\rho = 0$ हो अर्थात् प्रतिदर्शों का चयन असहसम्बन्धित द्विचर प्रसामान्य समग्र से किया गया हो तो इस स्थिति में बटन (14.11) निम्न हो जाता है —

$$C e^{-\frac{n}{2} \left(\frac{S_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \right)} \times (S_x S_y)^{n-2} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dS_x dS_y dr \dots (14.11.1)$$

(14.11.1) से स्पष्ट है कि r का बटन s_x व s_y के बटन से मुक्त है अर्थात्

$$dP = C (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} dr \dots (14.11.2)$$

$$\text{जबकि } C = \frac{1}{\beta \left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2} \right)} \quad \text{और } -1 < r < 1$$

यदि फलन (14.11.2) में,

$$r = \frac{t}{\sqrt{t^2 + n - 2}}$$

का प्रतिस्थापन करें तो dP , t -बटन, जिसकी स्व० को० $(n-2)$ है, के तुल्य हो जाता है अतः

$$t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \dots (14.11.3)$$

सम्बन्ध (14.11.3) से स्पष्ट है कि r का बटन स्टूडेंट t होता है। यदि $\rho \neq 0$ हो अर्थात् समग्र सहसम्बन्ध गुणांक शून्य नहीं हो तो रूपान्तरण का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है :—

$$Z = \frac{S_x S_y}{\sigma_x \sigma_y}, \quad z = \log \frac{\sigma_y S_x}{\sigma_x S_y}, \quad r = r$$

Z व Z का अवकलन करके r का बटन ज्ञात कर सकते हैं जो कि निम्न प्रकार है :—

$$dP = C' (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} d^{n-2} \left\{ \frac{\cos^{-1}(-\rho r)}{\sqrt{1-\rho^2 r^2}} \right\} \quad \dots (14.12)$$

$$\text{जहाँ } C' = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi \sqrt{n-2}} \text{ के है।}$$

रैखिक रूपान्तरण (संकेतीकरण) का सहसम्बन्ध गुणांक पर प्रभाव

यदि चर X और Y पर दिये गये युगल प्रेक्षणों के समुच्चय में चर X पर लिए गये प्रत्येक प्रेक्षण में से कोई स्वेच्छ अक्षर 'a' घटा दें और किसी स्वेच्छ अक्षर 'c' से भाग कर दें और चर Y पर प्रेक्षणों में से एक स्वेच्छ अक्षर 'b' घटा दें और 'd' से भाग कर दें तो सहसम्बन्ध-गुणांक पर संकेतीकरण का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् संकेतित प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित r का मान वही होता है जो कि मूल प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित करने पर प्राप्त होता है। यही नियम किसी स्वेच्छ अक्षर को जोड़ने या गुणा करने के लिए भी सत्य है।

संकेतीकरण का विशेष लाभ यह है कि यदि परिकलन बिना गणना यन्त्र के करना हो तो इसकी सहायता से r का परिकलन सुगमता से किया जा सकता है।

उपर्युक्त कथन को इस प्रकार सिद्ध कर सकते हैं :—

माना कि

$$u_i = \frac{X_i - a}{c}; \quad v_i = \frac{Y_i - b}{d}$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\therefore X_i = a + cu_i, \quad Y_i = b + dv_i$$

$$\text{या } \bar{X} = a + c\bar{u}, \quad \bar{Y} = b + d\bar{v}$$

सूत्र (14.1.2) में X_i, Y_i को X, Y के मानों को, a व v के बरों में प्रतिस्थापित करने पर यदि $r_{xy} = r_{uv}$ प्राप्त हो जाये तो इच्छा करते हैं कि संकेतिकरण का सहसम्बन्ध-सूत्र पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अर्थात् प्रतिस्थापन के बाद संकेतिकरण में कुछ गण्य अक्षरों का स्वयं निश्चय हो जाता है —

प्रमाण —

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}} \\
 &= \frac{\sum \{(a + c u_i) - (a + c \bar{u})\} \{(b + d v_i) - (b + d \bar{v})\}}{\sqrt{\sum \{(a + c u_i) - (a + c \bar{u})\}^2 \sum \{(b + d v_i) - (b + d \bar{v})\}^2}} \\
 &= \frac{cd \sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{c^2 \sum (u_i - \bar{u})^2 d^2 \sum (v_i - \bar{v})^2}} \\
 &= \frac{cd}{\sqrt{c^2 d^2}} \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum (u_i - \bar{u})^2 \sum (v_i - \bar{v})^2}} \\
 &= r_{uv}
 \end{aligned}$$

उपर्युक्त विवरण में यह निष्कर्ष सिद्ध होता है कि चरों के लिए स्केली (Scale) बदलने का सहसम्बन्ध गुणांक r पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। स्पष्ट चरों a, b, c, d के मान एक समान भी हो सकते हैं।

उदाहरण 14.3 एक विद्यालय में दोषी बना के विद्यार्थियों की बंटन ऊँचाई और छात्री की परिधि निम्न थी —

ऊँचाई (से० मी०) (X)	125,	135,	130,	130,	141.5	132.5,
	133,	134.5				
छात्री की परिधि (से० मी०) (Y)	62,	65,	57,	63.5,	63,	60,
	59,	58				

यहाँ विद्यार्थियों की ऊँचाई तथा छात्री की परिधि में सहसम्बन्ध-गुणांक संकेतिकरण की सहायता से सुगमता से परिचयित किया जा सकता है।

X के प्रत्येक मान के 130 बराबर और Y के प्रत्येक मान में 60 बराबर, संकेतिक प्रयोग तथा परिचयन कारणी निम्न प्रकार है —

$(X-130) = X'$	$(Y-60) = Y'$	X^2	Y^2	$X'Y'$
-5	2	25 00	4 00	-10 00
5	5	25 00	25 00	25 00
0	-3	0 00	9 00	0 00
0	3 5	0 00	12 25	0 00
11.5	3	132 25	9 00	34 50
2 5	0	6 25	0 00	0 00
3 0	-1	9 00	1 00	-3 00
4 5	-2	20 25	4 00	-9 00
21 5	7 5	217 75	64 25	37 50

सूत्र (14.13) द्वारा,

$$r = \frac{37.5 - \frac{21.5 \times 7.5}{8}}{\sqrt{\left\{217.75 - \frac{(21.5)^2}{8}\right\} \left\{64.25 - \frac{(7.5)^2}{8}\right\}}}$$

$$= \frac{17.35}{\sqrt{159.97 \times 57.22}} = \frac{17.35}{95.67}$$

$$= 0.181$$

सहसम्बन्ध-गुणांक की सार्थकता-परीक्षा

प्रतिदर्श के n स्वतन्त्र युगल प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित सहसम्बन्ध-गुणांक का मान कुछ भी हो बहुधा द्विचर प्रसामान्य समप्र m दोनों चरों के स्वतन्त्र होने की सम्भावना रहती है या सहसम्बन्ध-गुणांक का कोई विशेष मान होने की आशा की जाती है। इसका कारण यह है कि सम्भवतः प्रतिदर्श में ऐसे एकको का चयन हो गया हो जिन पर प्रेक्षणों द्वारा प्राप्त सहसम्बन्ध-गुणांक का मान, समप्र में सहसम्बन्ध गुणांक से सर्वाधिक भिन्न हो। इसके प्रतिरिक्त r का बटन प्रतिदर्श परिमाण n पर भी निर्भर रहता है अतः सहसम्बन्ध-गुणांक की सार्थकता परीक्षा करने में इसका 0 से सार्थक रूप से भिन्न होने या न होने का पता चल जाता है। सहसम्बन्ध-गुणांक के शून्य होने की परिवर्तन की परीक्षा निम्न रूप में की जाती है। यहाँ

$H_0: \rho = 0$, की $H_1: \rho \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा की जाती है

माना कि प्रतिदर्श में n युगल प्रेक्षण

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) \dots (X_n, Y_n)$$

हैं और इनमें प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक का मान r है। H_0 की परीक्षा प्रतिदर्शज t द्वारा की जाती है। यहाँ प्रतिदर्शज

$$t_{n-2} = \frac{r}{s_r} \quad \dots (14.13)$$

जबकि यहाँ s_r r का मानक विचलन है

$$\text{जब } \rho = 0 \text{ हो तो } s_r^2 = \frac{1 - r^2}{n - 2}$$

$$\therefore t_{n-2} = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \dots (14.13.1)$$

परिवर्तित t के मान की, α मा० स्त० तथा $(n-2)$ स्व० को० पर सारणीबद्ध t के मान से तुलना करके परिकल्पना H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है। यदि परिवर्तित $t > t_{\alpha, n-2}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। जिसका अभिप्राय है कि चरों X और Y में सार्पक सम्बन्ध है। यदि $t < t_{\alpha}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिसका अभिप्राय है कि चर स्वतन्त्र हैं।

उदाहरण 14.4 r का परिवर्तित मान उदाहरण (14.1) के अनुसार -0.62 है और प्रतिदर्श परिमाण 12 है। परिकल्पना $H_0: \rho = 0$ की $H_1: \rho \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शज (14.13.1) द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

$$\begin{aligned} t &= \frac{-0.62 \times \sqrt{12-2}}{\sqrt{1 - (-0.62)^2}} \\ &= \frac{-0.62 \times 3.162}{\sqrt{1 - 0.3844}} \\ &= \frac{-1.960}{0.784} \\ &= -2.5 \end{aligned}$$

सारणी (परि० घ-3) द्वारा 5% मा० स्त० और 10 स्व० को० के लिए t का मान 2.228 है। यह मान t के परिवर्तित मान से कम है, अतः H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि सड़कघातों की संख्या और उपज में सार्पक ऋणात्मक सहसम्बन्ध है।

(घ) यदि किसी विशिष्ट जानकारी के अनुसार किन्हीं दो चरों में एक निश्चल सहसम्बन्ध गुणांक होने की मांग हो तो परिकल्पना $H_0: \rho = \rho_0$ की $H_1: \rho \neq \rho_0$

के विरुद्ध परीक्षा की जाती है। यहाँ ρ_0 वह अचर मान है जिसके होने की प्राप्ति की गई है। इस परिवर्तन की परीक्षा (14.13) में दिये गये प्रतिदर्शज से नहीं की जा सकती है क्योंकि $(r - \rho_0)/s_r$ का बटन स्टूडेंट- t नहीं होता है जब तक कि ρ_0 का मान 0 न हो। अतः H_0 की परीक्षा करने से पूर्व फिशर- Z रूपान्तरण (Fisher's- Z transformation) का प्रयोग करना होता है जो कि इस प्रकार है —

$$Z_r = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \text{Tan h}^{-1} r \quad \dots (14.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{ \log_e (1+r) - \log_e (1-r) \} \\ &= \frac{1}{2} \log_e 10 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \} \\ &= 1.1513 \{ \log_{10} (1+r) - \log_{10} (1-r) \} \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right) = \text{Tan h}^{-1} \rho_0 \quad \dots (14.14.1)$$

$$= 1.1513 \{ \log_{10} (1+\rho_0) - \log_{10} (1-\rho_0) \}$$

Z से r में रूपान्तरण के लिए दी गई सारणी (परि० घ-16) की सहायता से Z_r व Z_{ρ_0} के मानों को ज्ञात कर सकते हैं। फिशर ने बताया कि Z_r लगभग एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य Z_{ρ_0} और प्रसरण $\frac{1}{n-3}$ के सन्निकट होता है। उन्होंने इस और भी ध्यान आकर्षित किया कि Z_r का माध्य, n लघु होने की स्थिति में, कुछ अभिन्नत है। इसके लिए सशोधन पद $\frac{\rho_0}{2(n-1)}$ का प्रयोग करने का सुझाव दिया। इसका

अर्थ है कि n लघु होने की स्थिति में $\langle Z_r - Z_{\rho_0} \rangle$ का माध्य $\frac{\rho_0}{2(n-1)}$ होता है।

यदि n बृहत् हो तो प्रसामान्य विचर,

$$Z = \frac{Z_r - Z_{\rho_0}}{1/\sqrt{n-3}} \quad \dots (14.15)$$

$$= (Z_r - Z_{\rho_0}) \sqrt{n-3} \quad \dots (14.15.1)$$

यदि n बृहत् न हो तो,

$$Z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right) + \frac{\rho_0}{2(n-1)} \quad \dots (14.16)$$

के है। परिवर्तन H_0 की परीक्षा के लिए n के मान के अनुसार Z के मान का परिवर्तन, सूत्र (14.15) या (14.16) द्वारा कर लिया जाता है। इससे पश्चात् प्रसामान्य वक्र

के क्षेत्र वाली मारपी द्वारा सम्बन्धित क्षेत्र की प्रायिकता ज्ञान कर सी जाती है या α मा० स्त० के लिए उम मारपी द्वारा Z का मान ज्ञान कर लिया जाता है। यदि प्राप्त सम्बन्धित क्षेत्र पूर्व निर्धारित मा० स्त० से कम हो तो H_0 को सम्वीकार कर दिया जाता है पर्यान् H_1 स्वीकृत है।

यदि परिकल्पित Z के मान की मारपीबद्ध Z के मान Z_{α} से तुलना की गई हो तो $Z > Z_{\alpha}$ होने की स्थिति में परिकल्पना H_0 का सम्वीकार कर दिया जाता है और $Z < Z_{\alpha}$ होने पर H_0 का स्वीकार कर लिया जाता है।

समग्र सहसम्बन्ध-गुणांक ρ की विश्वास्यता सीमाएँ

ρ की विश्वास्यता सीमाएँ सूत्र (9.9) के समक्य निम्न सूत्र द्वारा ज्ञान कर सकते हैं α मा० स्त० पर Z_{ρ} की उपरि व निम्न सीमाओं के लिए सूत्र निम्न हैं —

$$\left. \begin{matrix} Z_{\alpha} \\ Z_1 \end{matrix} \right\} = Z_r \pm Z_{(1-\alpha/2)} \cdot r(Z_r) \quad \dots(14.17)$$

$$= Z_r \pm Z_{(1-\alpha/2)} \frac{1}{\sqrt{n-3}} \quad \dots(14.17.1)$$

Z ही उपरि सीमा तथा निम्न सीमा को, क्रमशः बीच का (+) व (-) चिह्न लेकर, ज्ञान कर लिया जाता है। फिर मारपी द्वारा Z -मानों के दृश्यमान r के मान ज्ञान कर लिए जाते हैं जा कि ρ की उपरि तथा निम्न सीमाओं को निर्दिष्ट करते हैं।

उदाहरण 14.5 ज्यामितीय निष्पन्न भाग (3) में $r = 452$ है और मुक्त प्रेक्षणों की संख्या $n = 12$ है।

माना कि चर X और Y में किसी पूर्व जानकारी के आधार पर सहसम्बन्ध-गुणांक 0.5 होने की आशा है। तो यह जानने के लिए, कि इन मुक्त प्रेक्षणों में सहसम्बन्ध-गुणांक विद्यते विचार में महमति प्रकट करता है परिकल्पना $H_0: \rho = 0.5$ की $H_1: \rho \neq 0.5$ के विरुद्ध परीक्षा करना है।

इस परिकल्पना की परीक्षा करने के लिए निम्न Z -स्पायन्स का प्रयोग करना आवश्यक है। इन मारपी (परि० प-16) की सहायता से

$$r = 452 \text{ के लिए}$$

$$Z_r = 487$$

$$\rho_0 = 0.5 \text{ के लिए,}$$

सूत्र (14.8) द्वारा,

$$Z_{\rho_0} = 549 + \frac{.5}{2 \times 11} = 572$$

$$\begin{aligned} \text{मत: सूत्र (14.15.1) द्वारा प्रातदशंज,} \\ Z = (.452 - .572) \sqrt{(12 - 3)} \\ = -0.120 \times 3 = -0.36 \end{aligned}$$

$\alpha = .05$ सा० स्त० के लिए Z का मान 1.96 है जो कि Z के परिकल्पित मान $.36$ से अधिक है। मत: परिकल्पना H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

इसी निर्णय को संशय अन्तराल का क्षेत्र ज्ञात करके भी लिया जा सकता है।

0 से $.36$ का क्षेत्र $.1406$ है। Z पर कोटि से बाहर का क्षेत्र $= (.5 - .1406) = 0.3594$ है जो कि $.025$ से अधिक है मत H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

दो द्विचर प्रसामान्य समष्टियों के सहसम्बन्ध-गुणांकों की समानता की परीक्षा

यहाँ परिकल्पना $H_0 \rho_1 = \rho_2$ की $H_1 \rho_1 \neq \rho_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि दो प्रतिदर्शों का चयन दोनों समष्टो से स्वतन्त्र रूप में किया गया है और इनके परिमाण क्रमशः n_1 और n_2 हैं। इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकल्पित सहसम्बन्ध-गुणांक क्रमशः r_1 और r_2 हैं। इन प्रापणित सहसम्बन्ध गुणांकों के आधार पर H_0 की परीक्षा करनी है।

इस परिकल्पना की परीक्षा के लिए भी फिशर के Z -हयान्तरण का प्रयोग करना होता है।

माना कि

$$Z_1 = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r_1}{1-r_1} \right) = \text{Tan } h^{-1} r_1 \quad \dots (14.18)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r_2}{1-r_2} \right) = \text{Tan } h^{-1} r_2 \quad \dots (14.19)$$

$(Z_1 - Z_2)$ का बंटन प्रसामान्य होता है जिसका माध्य

$$\left\{ \frac{\rho}{2(n_1-1)} - \frac{\rho}{2(n_2-1)} \right\}$$

है (जहाँ ρ सामान्य सहसम्बन्ध गुणांक है) और प्रसरण,

$$\left\{ \frac{1}{(n_1-3)} + \frac{1}{(n_2-3)} \right\}$$

है।

यदि प्रतिदर्श परिमाण लघु न हो और n_1 व n_2 के मान में अन्तर अधिक न हो तो,

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \quad \dots (14.20)$$

एक मानक प्रसामान्य विचर $N(0,1)$ होता है।

पिछले सख्त में शिरे विवरण की भाँति प्रसामान्य वक्र के क्षेत्र वाली सारणी (परि० प-2) द्वारा प्राविबलता ज्ञात करने या α सा०स्त० के लिए सारणी द्वारा $Z_{(1-\alpha/2)}$ का मान ज्ञात करने H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

उदाहरण 14.6 एक स्कूल में सोलह वर्ष के 72 बच्चों की ऊँचाई सेंटीमीटर में घीर भार किलोग्राम में नापे गये। इन भारों तथा ऊँचाई में परिकल्पित सहसम्बन्ध गुणांक $r_1 = 776$ है।

इसी प्रकार सत्रह वर्ष के 30 बच्चा के भार तथा ऊँचाई में सहसम्बन्ध-गुणांक $r_2 = 534$ है।

इस परिकल्पना की परीक्षा करनी है कि सोलह वर्ष की आयु के व. सत्रह वर्ष की आयु के बच्चा के भार तथा ऊँचाई में सहसम्बन्ध वही रहता है अर्थात् $H_0: \rho_1 = \rho_2$ की $H_1: \rho_1 \neq \rho_2$ के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

$r_1 = 776$ व $r_2 = 534$ के लिए सारणी (परि० प-16) द्वारा प्राप्त Z के मान क्रमशः $Z_1 = 1.035$ और $Z_2 = .596$ हैं।

सूत्र (14.20) द्वारा,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1.035 - .596}{\sqrt{\frac{1}{29} + \frac{1}{27}}} \\ &= (439) / \sqrt{.0515} \\ &= \frac{439}{.2265} \\ &= 1.938 \end{aligned}$$

$\alpha = .05$ के लिए सारणीबद्ध $Z = 1.96$ है जो कि 1.938 से अधिक है। अतः H_0 का स्वीकार कर लिया जाता है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि सोलह और सत्रह वर्ष की आयु के बच्चों की ऊँचाई व भार में समान सहसम्बन्ध है।

K समय सहसम्बन्ध गुणांकों की सजातीयता की परीक्षा जब कि $K > 2$

यहाँ परिकल्पना $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_k$ की, H_1 कम से कम कोई वा. सहसम्बन्ध गुणांक समान नहीं है, के विरुद्ध परीक्षा करनी है।

माना कि K समयों से K स्वतन्त्र प्रतिदर्शों का अध्ययन किया गया है जिनके परिचालन क्रमशः $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ हैं। किन्हीं दो चर X और Y में इन प्रतिदर्शों द्वारा परिकल्पित सहसम्बन्ध गुणांक क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ हैं। यदि यह प्रतिपत्ति सत्य है और इसकी उल्लेख की जा सकती है तो सहसम्बन्ध गुणांकों की सजातीयता की परीक्षा, Z मानों की समानता के लक्ष्य होती है। इस परिकल्पना की परीक्षा में भी किन्तु Z -संशोधन का प्रयोग करना

होता है और यहाँ H_0 की χ^2 -परीक्षा की जाती है। प्रतिदर्शज χ^2 का परिवर्तन निम्न सारणी बनाकर सुगमता में कर सकते हैं —

प्रतिदर्श संख्या	प्रतिदर्श परिमाण	सहसम्बन्ध गुणांक	$\text{Tanh}^{-1} r=Z$	प्रसरण के व्युत्क्रम $(n-3)$	संख्या $(n-3) Z$	संख्या $(n-3) Z^2$
1	n_1	r_1	Z_1	(n_1-3)	$(n_1-3) Z_1$	$(n_1-3) Z_1^2$
2	n_2	r_2	Z_2	(n_2-3)	$(n_2-3) Z_2$	$(n_2-3) Z_2^2$
3	n_3	r_3	Z_3	(n_3-3)	$(n_3-3) Z_3$	$(n_3-3) Z_3^2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	n_k	r_k	Z_k	(n_k-3)	$(n_k-3) Z_k$	$(n_k-3) Z_k^2$
योग				$\sum_1 (n_i-3)$	$\sum_1 (n_i-3) Z_i$	$\sum_1 (n_i-3) Z_i^2$

उपरोक्त सारणी में परिवर्तित सख्याओं का प्रयोग करके प्रतिदर्शज χ^2 का मान निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं —

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^k (n_i - 3) Z_i^2 - \frac{\left\{ \sum_{i=1}^k (n_i - 3) Z_i \right\}^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 3)} \quad \dots (14.21)$$

सारणी द्वारा α सा० स्त० और $(k-1)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध χ^2 का मान ज्ञात कर लिया जाता है और यदि परिवर्तित $\chi^2 > \chi^2_{k-1}$ हो तो H_0 को प्रस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक में सजातीयता नहीं है या H_1 स्वीकृत है।

इसी प्रकार यदि $\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ हो तो H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात्

सहसम्बन्ध गुणांक $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k$ सजातीय हैं अर्थात् H_1 प्रस्वीकृत है।

टिप्पणी - यदि अभिनति के लिए संशोधन करना हो तो ρ का सर्वोत्तम प्रायणक $\hat{\rho}$ ज्ञात कर लिया जाता है। इस स्थिति में प्रातदर्शज,

$$\chi^2_{k-1} = \sum_{i=1}^k (n_i - 3) \left\{ Z_i - \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \hat{\rho}}{1 - \hat{\rho}} \right) - \frac{\hat{\rho}}{2(n_i - 1)} \right\}^2 \quad \dots (14.22)$$

होता है। यहाँ भी परिवर्तित H_0 के विषय में निर्णय ऊपर की भाँति ही कर लिया जाता है।

उदाहरण 147 एक क्षेत्रीय सांख्यिक सर्वेक्षण के घनमंत विभिन्न आयु के बच्चों के भार (किलोग्राम) और ऊँचाई (मि.टीमीटर) में सहसम्बन्ध गुणांक परिवर्तित किये गये। बच्चों की आयु, प्रतिदशं परिमाण और सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार थे —

$$\text{पौनह वयं : } n_1 = 30, \quad r_1 = 876$$

$$\text{सीतह वयं } n_2 = 32, \quad r_2 = 776$$

$$\text{सात्रह वयं } n_3 = 30, \quad r_3 = 534$$

$$\text{मठारह वयं } n_4 = 14, \quad r_4 = 763$$

तो परिवर्तना $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$ की H_1 कम से कम कोई दो ρ समान नहीं हैं के विरुद्ध परीक्षा निम्न सारणी बनाकर प्रतिदशज χ^2 द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं —

n	r	z	(n-3)	(n-3) Z	(n-3) Z ²
30	876	1.37	27	36.99	50.68
32	776	1.03	29	29.87	30.78
30	534	0.60	27	16.20	9.72
14	763	1.00	11	11.00	11.00
			94	94.06	102.18

माना कि अभिलिखि उपेक्षणीय है। घन प्रतिदशज,

$$\chi^2 = 102.18 - \frac{(94.06)^2}{94}$$

$$= 102.18 - 94.12$$

$$= 8.06$$

सारणी (परि० प-4) द्वारा $\chi^2_{0.05, 3} = 7.815$

परिदशज $\chi^2 > \chi^2_{0.05, 3}$ घन H_0 को अस्वीकार कर दिया। अतः घनभिन्नय है

कि अरुदा समय सहसम्बन्ध गुणांक समान नहीं है। इस स्थिति में H_1 स्वीकृत है।

कोटि सहसम्बन्ध

माना कि प्रतिदशं, n युक्ति का समूह है जिन्हें 1 से n तक अंकित कर दिया जाता है और इन समूह के घनो को बिन्ही दो लक्षणों के अनुसार कोटिगत कर दिया गया है। इन दोन लक्षणों में सम्बन्ध की माशा जानने के लिए कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञान करना होता है।

माना कि समूह के n अंशों की कोटियाँ लक्षण A के अनुसार क्रमशः $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$ हैं और लक्षण B के अनुसार क्रमशः $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$ हैं। यह कोटियाँ केवल पूर्ण-संख्या हो सकती हैं जो कि 1 से n तक हो सकती हैं। इसके साथ यह भी कल्पना करली जाती है कि किन्हीं दो अंशों की कोटि समान नहीं है। इस स्थिति में कोटि सहसम्बन्ध गुणांक r_s को निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं। इसका आविष्कार स्पियरमैन (Spearman) ने किया था अतः इसे स्पियरमैन का कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक भी कहते हैं। r का अनुलग्न s , स्पियरमैन के नाम के प्रथम अक्षर का प्रतीक है।

माना कि i वें एकव की कोटियों का अन्तर d_i है अर्थात्

$$X_i - Y_i = d_i$$

कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक

$$r_s = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad \dots (14.23)$$

इस सूत्र को व्यंजक (14.14) की सहायता से सुगमता से निम्न प्रकार व्युत्पन्न किया जा सकता है।

व्युत्पत्ति :—

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= \sum_{i=1}^n Y_i = (1+2+3+\dots+n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \bar{Y} \quad (\because \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i)$$

माना कि $X_i - \bar{X} = x_i$, $Y_i - \bar{Y} = y_i$

$$\text{और} \quad \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

यह ज्ञात है कि

$$\sum_i X_i^2 = \sum_i Y_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d_i को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$d_i = \{(X_i - \bar{X}) - (Y_i - \bar{Y})\}$$

$$\therefore \sum_i d_i^2 = \sum_i \{(X_i - \bar{X}) - (Y_i - \bar{Y})\}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_1 (x_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_1 x_i^2 + \sum_1 y_i^2 - 2 \sum_1 x_i y_i \\
 \sum_1 x_i y_i &= \frac{1}{2} \left(\sum_1 x_i^2 + \sum_1 y_i^2 - \sum_1 d_i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n^3 - n}{6} - \sum_1 d_i^2 \right)
 \end{aligned}$$

और $\sqrt{\sum_1 x_i^2 \times \sum_1 y_i^2} = \frac{1}{2} (n^3 - n)$

$$\begin{aligned}
 \therefore r_s &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{n^3 - n}{6} - \sum_1 d_i^2 \right)}{\frac{1}{2} (n^3 - n)} \\
 &= 1 - \frac{6 \sum_1 d_i^2}{n^3 - n}
 \end{aligned}$$

r_s का परिसर -1 से $+1$ तक है। यदि $r_s = 1$ हो तो इसका अभिप्राय है कि दोनों लक्षणों की कोटियों में पूर्ण सहमति है या कोई अन्तर नहीं है। r_s का मान -1 कोटियों में पूर्ण अन्वहमति बताना है।

r_s की सापेक्षता-परीक्षा

स्वियरमैन सहसम्बन्ध गुणांक r_s की सापेक्षता-परीक्षा इन प्रकार कर सकते हैं।

यदि $n > 20$ हो तो r_s का बटन प्रमाणात्मक होता है। अतः r_s के सापेक्ष होने की Z-परीक्षा की जा सकती है।

यदि n का मान 10 से 20 हो तो $r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$ का बटन लगभग स्टूडेंट $-t$ होता है जिसकी स्व० को० $(n-2)$ है। यह परीक्षा उभी प्रकार कर सकते हैं जैसा कि $H_0 : \rho = 0$ की परीक्षा में किया गया है।

यदि $n < 10$ हो तो इस स्थिति में r_s के बटन का श्रुत्यन्त करना होता है। इस स्थिति में परीक्षा¹ का वर्णन इस पुस्तक के स्तर के बाहर है।

उदाहरण 14.8 : एक सुन्दरता प्रतियोगिता में भाग लेने वाली 10 सुन्दरियों का दो निर्णायकों द्वारा निम्न क्रम में कोटियाँ प्रदान की गईं।

प्रथम निर्णायक :	1	6	5	10	3	4	2	9	7	8
द्वितीय निर्णायक :	6	4	9	8	2	3	1	10	5	7

1. इस परीक्षा के हेतु, पुस्तक "Rank Correlation methods" by M. G. Kendall को पढ़िये।

यह जानने के लिए कि दोनों निर्णायकों में सुन्दरता के प्रति कितनी एक से अभिरुचि है, कोटि सहसम्बन्ध द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

प्रथम निर्णायक द्वारा कोटि (X)	द्वितीय निर्णायक द्वारा कोटि (Y)	कोटि अन्तर (X-Y)=d	d ²
1	6	-5	25
6	4	+2	4
5	9	-4	16
10	8	+2	4
3	2	+1	1
4	3	+1	1
2	1	+1	1
9	10	-1	1
7	5	+2	4
8	7	+1	1
योग		0	58

उपर्युक्त न्यास के लिए,

$$n=10, \sum_i d_i=0, \sum_i d_i^2=58$$

अतः सूत्र (14.23) द्वारा कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक,

$$\begin{aligned} r_s &= 1 - \frac{6 \times 58}{10(10^2 - 1)} \\ &= 1 - \frac{348}{10 \times 99} \\ &= 1 - 0.35 \\ &= 0.65 \end{aligned}$$

r_s को सापेक्षता-परीक्षा के लिए प्रतिदर्शज,

$$\begin{aligned} t_{n-2} &= r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \\ &= \frac{.65 \times \sqrt{8}}{\sqrt{1-(.65)^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{65 \times 283}{76}$$

$$= 2.42$$

$\alpha = 0.5$ सा० स्त० व 8 स्त० व 10 व लिए। का मापनीय मान (परि० प-3) द्वारा प्राप्त 2.306 है जो कि 1 के परिष्कृत मान से कम है। अतः t_5 की सार्थकता सिद्ध होती है। अतः यह कह सकते हैं कि निर्णायक द्वारा दी गई काटियों में उच्च क्रम का सहसम्बन्ध है। इसका अभिप्राय है कि निर्णायक में सुन्दरता के प्रति पर्याप्त एक ही अभिरुचि है।

सामंजस्य गुणांक

कभी-कभी ऐसी स्थिति भी उत्पन्न होती है कि n एकका की कोटि p निर्णायक द्वारा स्वतन्त्र रूप में निश्चित की जाती है इस स्थिति में यह जानना आवश्यक हो जाता है कि एक ही एकक की कोटियों में सामंजस्य है या नहीं अर्थात् निर्णायकों में सामंजस्य है या नहीं। इस जानकारी को प्राप्त करने के लिए केंडाल और स्मिथ (Kendall and Smith) ने एक माप 'W' का आविष्कार किया जिसे सामंजस्य-गुणांक कहते हैं। माना कि W का मापणक w है। w का परिवर्तन निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है—

$$w = \frac{12S}{p^2(n^2 - n)} \quad \dots (14.24)$$

उपरोक्त सूत्र में S प्रत्येक निर्णायक द्वारा निर्धारित कोटियों के योगों का $p(n+1)/2$ से विचलन का वर्ग-योग है। यहाँ $p(n+1)/2$ कोटियों के योग का माध्य है।

W का मान 0 से 1 तक विचरण कर सकता है। यदि $W=0$ हो, तो इसमें यह निष्कर्ष निकलता है कि निर्णायकों में लक्षणों के प्रति एक-ही अभिरुचि नहीं है। यदि $W=1$ हो तो इसका अर्थ है कि उनमें पूर्णतया एक-ही अभिरुचि है।

परिचलना $H_0: W=0$ की $H_1: W \neq 0$ के विरुद्ध परीक्षा, χ^2 द्वारा की जाती है। यहाँ α का मान 7 से अधिक होना आवश्यक है अर्थात् $n > 7$ होना चाहिये।

यहाँ प्रतिपर्णक,

$$\chi^2_{n-1} = p(n-1)w \quad \dots (14.25)$$

$$= \frac{12S}{pn(n+1)} \quad \dots (14.25.1)$$

के हैं। यह बटन सममय χ^2 होता है और χ^2 की स्व० को० $(n-1)$ है। α सा० स्त० पर, नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है।

यदि W सार्थक हो तो α वस्तुओं की सांख्यिक कोटि का मापणक करना चाहिये अथवा नहीं करना चाहिये। क्योंकि W सार्थक न होने की स्थिति में यह कहना कठिन है कि सांख्यिक कोटियों का अस्तित्व है या नहीं।

यदि $p=2$ हों तो कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक का प्रयोग करना ही उचित है।

उदाहरण 14.9 : एक पद के लिए, तीन विशेषज्ञों ने नौ घन्टायों का साक्षात्कार किया और निम्न सारणी में दिये हुए क्रम में घन्टायों की कोटिद्वय किया :—

व्यक्ति क्रमांक	विशेषज्ञ द्वारा कोटिद्वय			
	क	ख	ग	दो
1	2	1	2	5
2	4	3	4	11
3	8	6	5	19
4	9	9	7	25
5	3	2	1	6
6	5	8	6	19
7	7	5	9	21
8	1	4	3	8
9	6	7	8	21

अब यह ज्ञात करने के लिए कि विशेषज्ञों में साक्षात्कार के पश्चात् घन्टायों की कोटियों के प्रति सहमति है या नहीं, सामंजस्य गुणक का प्रयोग करना उचित है। साथ ही इस गुणक की सापेक्षता-परीक्षा भी की गई है।

यहाँ $p=3$, $n=9$ अतः कोटियों के योग का माध्य,

$$\frac{p \times (n+1)}{1} = \frac{3 \times 10}{2} = 15$$

और घन्टायों की कोटियों के योग का माध्य से विचलन के वर्गों का योग,

$$\begin{aligned} S &= (5-15)^2 + (11-15)^2 + (19-15)^2 + (25-15)^2 + (6-15)^2 + (19-15)^2 \\ &\quad + (21-15)^2 + (8-15)^2 + (21-15)^2 \\ &= 100 + 16 + 16 + 100 + 81 + 16 + 36 + 49 + 36 \\ &= 450 \end{aligned}$$

सूत्र (14.24) द्वारा,

$$W = \frac{12 \times 450}{9 \times (729-9)} = \frac{5}{6} = .833$$

$H_0: W=0$ को $H_1: W \neq 0$ के विरुद्ध सापेक्षता परीक्षा सूत्र (14.25) के द्वारा कर सकते हैं।

$$\chi^2 = 3(9-1) \times \frac{5}{6} = 20.00$$

माना कि पूर्व निर्धारित सा० स्त० $\alpha = 05$ है। (परि० घ-4) द्वारा $\alpha = 05$ व 8 स्व० को० के लिए सारणीबद्ध $\chi^2 = 15.507$ है जो कि χ^2 के परिवर्तित मान से कम है। अतः w सार्थक है। इसका अभिप्राय है कि विशेषज्ञों द्वारा दी गई बोटियों में सामंजस्य है।

सहसम्बन्ध अनुपात

माना कि दो मतल बटित चर X और Y हैं और इनमें फलनीय सम्बन्ध $Y = \phi(X)$ है। यदि चर Y का X पर समाश्रयण रैखिक हो तो सहसम्बन्ध गुणांक ρ ज्ञात करना उचित है। किन्तु चर X व Y में समाश्रयण रैखिक न होने की स्थिति में सहसम्बन्ध अनुपात η^2 ज्ञात करना उचित है।

चरो X व Y में सहसम्बन्ध अनुपात η^2 निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सहसम्बन्ध अनुपात ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि X के एक मान के संगत Y का एक ही मान हो। अतः यहाँ η^2 के आकलन E^2 के लिए मूल, X के एक मान के संगत चर Y के f_j मान लेकर दिया गया है। माना कि X_i के संगत मान Y_{ij} हैं जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, l$ और $j = 1, 2, 3, \dots, f_i$

सहसम्बन्ध अनुपात

$$E^2 = \frac{\text{समूहों में वर्गों का योगफल}}{\text{समोच्चित वर्गों का योगफल}} \quad \dots (14.26)$$

$$\text{समूहों में वर्गों का योगफल} = \sum_{i=1}^l f_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2$$

$$\text{जब कि } \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}/f_i \text{ और } \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^l f_i}$$

$$\sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} = f_i \bar{Y}_i = G_i \quad (\text{मान लिया})$$

$$\sum_{i=1}^l f_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^l \frac{\left(\sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} \right)^2}{f_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} \right)^2}{\sum_{i=1}^l f_i}$$

$$\text{और } \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij} = G \quad (\text{मान लिया})$$

$$\therefore \sum_{i=1}^I f_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^I \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}$$

जहाँ $\sum_{i=1}^I f_i = n$

$$\begin{aligned} \text{संगोहित वर्गों का योग} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{f_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} \end{aligned}$$

$$\therefore E^2 = \frac{\sum_{i=1}^I f_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{f_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^I \frac{G_i^2}{f_i} - \frac{G^2}{n}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{f_i} Y_{ij}^2 - \frac{G^2}{n}} \quad \dots (14.26.1)$$

E^2 के लिए व्यञ्जक से स्पष्ट है कि इसका मान समूहों के परिमाण पर अत्यधिक निर्भर है। E^2 का परिसर 0 से 1 है। यदि प्रत्येक समूह में एक प्रेक्षण हो तो $E^2 = 1$ और सब प्रेक्षण एक ही समूह में हो तो $E^2 = 0$ अतः प्रेक्षणों के समूहीकरण में विशेष सावधानी बतानी चाहिए।

अन्तरवर्ग सहसम्बन्ध

प्रायः वर्ग या समूह में विद्यमान प्रेक्षणों में साहचर्य की मात्रा ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। इस साहचर्य मात्रा को अन्तरवर्ग सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं। कुछ लेखकों ने इसे समरूपिक सहसम्बन्ध गुणांक (homotypic correlation coefficient) के नाम से भी लिखा है। इस गुणांक की आवश्यकता जीव विज्ञान में कभी-कभी पाई गई है। जैसे भाईयो की ऊँचाई में सहसम्बन्ध या भारों में सहसम्बन्ध ज्ञात करना हो तो एक को चर X और अन्य को आयु के अनुसार या सबसे बड़े और सबसे छोटे क अनुसार Y मानने से सहसम्बन्ध में मिथ्यापन (Spurious element) भा जाता है क्योंकि यहाँ हमारा उद्देश्य एक ही परिवार के उन सब सदस्यों में सहसम्बन्ध ज्ञात करना है जिनका एक सा स्थान हो। यह अनुभव किया गया है कि अधिकांश रूप से एक ही वर्ग के सदस्यों में सहसम्बन्ध

प्रेक्षणों में घनारम्भ सहसम्बन्ध होता है कुछ विशेष स्थिति में यह सम्बन्ध शून्यात्मक भी हो सकता है। किन्तु उन स्थितियों की यहाँ उल्लेख नहीं है।

माना कि X_{ij} , i वें वर्ग में j वा प्रेक्षण है व वर्गों की संख्या l है। j वें वर्ग में माना कि प्रेक्षणों की संख्या n_j है। जबकि $i=1, 2, 3, \dots, l$ और $j=1, 2, 3, \dots, n_j$

माना कि प्रत्येक X_{ij} का माध्य μ और प्रसरण σ^2 है। एक ही वर्ग के दो सदस्यों में सहसम्बन्ध गुणांक ρ_1 है और इसका आकलन r_1 है। तो

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^l n_i^2 (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^l (n_i - 1) \sum_{j=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2} \quad \dots (14.27)$$

यदि $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_l = n$ हो, तो

$$r_1 = \frac{n^2 \sum_{i=1}^l (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2} \quad \dots (14.27.1)$$

$$= \frac{S_b^2 - S_w^2}{S_b^2 + (n-1)S_w^2} \quad \dots (14.27.2)$$

उपर्युक्त व्यंजक में S_b^2 विभिन्न समूहों में वर्गों का योगफल है और S_w^2 समूहों के अन्दर वर्गों का योगफल है। S_b^2 का प्रत्याशित मान $\{1 + (n-1)\rho_1\}\sigma^2$ और S_w^2 का प्रत्याशित मान $(1 - \rho_1)\sigma^2$ है।

यदि ρ_1 का मान शून्यात्मक हो तो भी $-\frac{1}{(n-1)}$ से कम नहीं हो सकता है

क्योंकि $\rho_1 < -\frac{1}{n-1}$ हो तो S_b^2 का प्रत्याशित मान शून्यात्मक हो जायेगा जो कि

असम्भव है। यदि $\rho_1 = -\frac{1}{n-1}$ हो तो $S_b^2 = 0$ हो जाता है जिसका अर्थ है

कि समूह माध्यों में कोई अन्तर नहीं है।

दो सहसम्बन्धित चरों के प्रसरणों की तुलना

माना कि दो चरों X_1 व X_2 के प्रसरण क्रमशः σ_1^2 व σ_2^2 हैं और इनमें सहसम्बन्ध गुणांक ρ है तथा इनके आकलन क्रमशः s_1^2 , s_2^2 व r हैं।

माना कि $X_1 - X_2 = D$ और $X_1 + X_2 = S$ है।

चरो D व S में सहप्रसरण,

$$\begin{aligned}\sigma_{DS} &= \text{Cov} \{(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)\} \\ &= E \{(X_1^2 - X_2^2) - (\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2)\} \\ &= E (X_1^2 - \bar{X}_1^2) - E (X_2^2 - \bar{X}_2^2) \\ &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \quad \dots (14.28)\end{aligned}$$

यदि योगों व अन्तरों को प्रतिद्वंद्व प्रेक्षणों के लिए ज्ञात किया गया हो तो σ_{DS} का प्राक्लक,

$$s_{DS} = s_1^2 - s_2^2 \quad \dots (14.28.1)$$

है। यह सुगमता से मिट किया जा सकता है कि,

$$\sigma^2_{X_1 + X_2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \quad \dots (14.29)$$

और इसका प्राक्लक,

$$s^2_{X_1 + X_2} = s_1^2 + s_2^2 + 2r s_1 s_2 \quad \dots (14.29.1)$$

इसी प्रकार,

$$\sigma^2_{X_1 - X_2} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \quad \dots (14.30)$$

और इसका प्राक्लक,

$$s^2_{X_1 - X_2} = s_1^2 + s_2^2 - 2r s_1 s_2 \quad \dots (14.30.1)$$

परिकल्पना $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ की $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ के विरुद्ध परीक्षा इस प्रकार की जाती है।

माना कि D व S में सहसम्बन्ध गुणांक ρ_{DS} है और इसका प्राक्लक r_{DS} है।

सूत्र (14.1.1) के अनुसार

$$\begin{aligned}r_{DS} &= \frac{s_1^2 - s_2^2}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2 + 2r s_1 s_2)(s_1^2 + s_2^2 - 2r s_1 s_2)}} \quad \dots (14.31) \\ &= \frac{(s_1^2 - s_2^2)}{\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)^2 - 4r^2 s_1^2 s_2^2}} \\ &= \frac{(s_1^2/s_2^2 - 1)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} + 1\right)^2 - 4r^2 \frac{s_1^2}{s_2^2}}} \quad \dots (14.31.1)\end{aligned}$$

यदि $\frac{s_1^2}{s_2^2} = F$ रखें,

$$\text{तो } r_{DS} = \frac{F-1}{\sqrt{(F+1)^2 - 4r^2 F}} \quad \dots (14.32)$$

निराकरणीय परिवर्तन के अन्तर्गत $r_{DS} = 0$

यदि $s_1^2 > s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान धनात्मक होता है और $s_1^2 < s_2^2$ हो तो r_{DS} का मान ऋणात्मक होता है।

r_{DS} का धनात्मक व सार्थक मान $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ की सार्थकता को सिद्ध करता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है।

इसी प्रकार r_{DS} का ऋणात्मक व सार्थक मान $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ की सार्थकता सिद्ध करता है अर्थात् H_1 स्वीकृत है। यदि r_{DS} का मान सार्थक न हो तो H_0 स्वीकृत होता है, जिसका अर्थ है कि $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

मिथ्या या निरर्थक सहसम्बन्ध

इस अध्याय में दिये गये विवरण से स्पष्ट है कि किन्हीं दो चरों पर लिए गये प्रेक्षणों द्वारा सहसम्बन्ध-गुणांक का परिवर्तन करें तो सहसम्बन्ध-गुणांक का कुछ मान अवश्य प्राप्त हो जाता है और यह मान सार्थक भी हो सकता है। किन्तु यह ज्ञान करना पर्याप्त नहीं है। हमें अधिक महत्वपूर्ण यह है कि यह देना जाय कि इस मान का व्यावहारिक दृष्टि में क्या महत्त्व है। यदि दो चर ऐसे हैं कि जिनमें सहसम्बन्ध-गुणांक बनाना मूलतः-पूर्ण है तो हमें सहसम्बन्ध गुणांक का मिथ्या या निरर्थक सहसम्बन्ध गुणांक बताने हैं। जैसे पिछले पन्द्रह वर्षों में प्रति वर्ष लाहे के उत्पादन और जूतों की माँग में सहसम्बन्ध ज्ञात करें और यह सहसम्बन्ध, धनात्मक व सार्थक हो तो यह बताना कि लोहे के उत्पादन बढ़ने से जूतों की माँग बढ़ती है एक मूलतःपूर्ण निष्कर्ष है। इसका कारण यह है कि दो चरों में कार्य कारण का सम्बन्ध नहीं बताता। दिये हुए उदाहरण में दोनों चरों के मान बढ़ें किन्तु इनके लिए कोई अन्य कारण हो सकते हैं न कि जूतों की माँग बढ़ने से लोहे का उत्पादन बढ़ा है। अतः इस प्रकार के चरों में सहसम्बन्ध मिथ्या या निरर्थक है। जिन चरों में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करना हो उन चरों की व्यावहारिकता की अवश्य ध्यान देना चाहिये अन्यथा निरर्थक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

बहु सहसम्बन्ध

बहु समाश्रयण समीकरण से सम्बन्धित प्रसरण विलेपण के अन्तर्गत एक सत्या R^2 का वर्णन किया गया है। यह सत्या R^2 सरल रेखीय समाश्रयण में r^2 के सम्यक् अर्थात् R^2 समाश्रयण द्वारा जितने वर्ग योग और कुल वर्ग योग व अनुपात के समान होता है। R^2 को निर्धारण गुणांक (Coefficient of determination) कहते हैं। इसके प्रतिरिक्त प्रसरण विलेपण सारणी में दिया गया है कि समाश्रयण में विचरन वर्ग योग, $(1-R^2) \sum y_i^2$

के समान है। अतः R^2 का पराम 0 से 1 तक हो सकता है अर्थात् $0 \leq R^2 \leq 1$ । क्योंकि (R^2) ऋणात्मक कदापि नहीं हो सकता है। इसी सन्दर्भ में मर्यादा R जिसे बहुसहसम्बन्ध-गुणांक कहते हैं, को इस प्रकार समझ सकते हैं।

बहुसहसम्बन्ध गुणांक R , \hat{Y} और Y में रैखिक साहचर्य की मात्रा है। इसको इस प्रकार भी कह सकते हैं कि बहुसहसम्बन्ध गुणांक, R , ममस्त चर Y में मयुक्त रैखिक साहचर्य की मात्रा है यदि K चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$ हैं जो कि स्वतन्त्र या परतन्त्र वैसे भी हों। माना कि इन चरों पर वाहच्छिव प्रेषण $(X_{1j}, X_{2j}, X_{3j}, \dots, X_{Kj})$ है, तो सामान्य रूप में चर X_j की चरों $X_1, X_2, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_K$ में सहसम्बन्ध की मात्रा को $R_{j12 \dots (j-1)(j+1) \dots K}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह किसी एक चर का अन्य चरों से संयुक्त रैखिक सम्बन्ध का माप है। R के माप प्रायः अनुलग्न नही लिखते हैं क्योंकि ये लिखने में असुविधाजनक हैं। इस स्थिति में अनुलग्न को इसके माप स्वयं ही मान लिया जाता है। R का पराम 0 से 1 होता है।

K चरों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$ के लिए युगत चरों में सरल सहसम्बन्ध-गुणांक आब्यूह निम्न होता है :—

$$P = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \dots r_{1K} \\ & 1 & r_{23} \dots r_{2K} \\ & & 1 \dots r_{3K} \\ & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \dots (14.33)$$

यह एक सममित आब्यूह है जिसके विचरण के अंग सदैव 1 होते हैं। r के अनुलग्न यह बताने हैं कि किन चरों में सहसम्बन्ध जान किया गया है।

R के मान का परिवर्तन निम्न सूत्र की म्हायता में कर सकते हैं :—

$$R_{j123 \dots (j-1), (j+1) \dots K} = \left(1 - \frac{P_j}{P_{jj}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (14.34)$$

जबकि $|P|$ सरल सहसम्बन्ध-गुणांक आब्यूह के मारणिक (determinant) का मान है और P_{jj} सहसम्बन्ध गुणांक r_{jj} के सहखण्ड (cofactor) का मान है। यह चिदिता हो कि सूत्र (14.34) में $|P|$ व P_{jj} मानों का चिद्ग गदैव एक-सा होता है अन्यथा $R_{j123 \dots (j-1), (j+1) \dots K}$ का मान एक में अधिक हो जायेगा जोकि असम्भव मान है। साथ ही $|P| \leq P_{jj}$ होता है अन्यथा बहुसहसम्बन्ध गुणांक का मान बान्पनिक हो जायेगा।

यदि तीन चर X_1, X_2, X_3 हों तो

$$R_{1\ 23} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots(14.35)$$

$$R_{2\ 13} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots(14.36)$$

$$R_{3\ 12} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{33}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots(14.37)$$

जबकि

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ & 1 & r_{23} \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

घौर $R_{1\ 23}$ चर X_1 का चरों X_2 व X_3 से बहुसहसम्बन्ध है। इस प्रकार अन्य दो की व्याख्या दी जा सकती है।

यदि बहुसहसम्बन्ध-गुणांक का मान 1 हो तो इसका अर्थ है कि किसी एक चर का अन्य चरों में आदर्श बहु सहसम्बन्ध है। यही कारण है कि बहु समाधारण रेखा के समतल में R का मान जितना अधिक होता है उतना ही रेखिक समीकरण के सम्बन्ध को उपयुक्त तथा शुद्ध समझा जाता है।

यदि $R_{j\ 12,3,\dots,j-1,j+1,\dots,K} = 0$ हो तो इसका अभिप्राय है कि चर X_j का अन्य चरों में कोई सम्बन्ध नहीं है।

यदि तीन चरों X_1, X_2, X_3 में X_1 का X_2, X_3 पर, X_2 का X_1, X_3 पर तथा X_3 का X_1, X_2 पर समाधारण ज्ञान किया गया हो तो तीन समाधारण-समतलों के संगती होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध,

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12} r_{13} r_{23} = 1$$

है।

उदाहरण 14.10 चार चर X_1, X_2, X_3, X_4 जो कि उदाहरण (13.7) में दिए गये हैं, पर दिये गये प्रेशनों को लेकर चर X_1 का X_2, X_3, X_4 में बहु सहसम्बन्ध गुणांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :-

उदाहरण (13.7) में ज्ञात किये गये चरों के वर्गों व योग घौर गुणनखण्डों के योगों को प्रयोग करके सूत्र,

$$r_{ij} = \frac{\sum x_i x_j}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum x_j^2}}$$

जहाँ $i, j = 1, 2, 3, 4$.

की सहायता से सरल सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कर लिए, जो कि निम्न हैं—

$$r_{12} = \frac{319.50}{\sqrt{1411.0 \times 324.4}} = .47$$

$$r_{13} = \frac{125.60}{\sqrt{1411.0 \times 20.5}} = .71$$

$$r_{14} = \frac{427.00}{\sqrt{1411.0 \times 281.24}} = .68$$

$$r_{23} = \frac{30.74}{\sqrt{324.44 \times 22.05}} = .36$$

$$r_{24} = \frac{99.94}{\sqrt{324.44 \times 281.24}} = .33$$

$$r_{34} = \frac{43.68}{\sqrt{22.05 \times 281.24}} = .55$$

इन परिकल्पित सहसम्बन्ध-गुणांकों की सहायता से निम्न सहसम्बन्ध-गुणांक माय्यूह प्राप्त होगा है।

$$P = \begin{bmatrix} 1 & .47 & .71 & .68 \\ .47 & 1 & .36 & .33 \\ .71 & .36 & 1 & .55 \\ .68 & .33 & .55 & 1 \end{bmatrix}$$

सूत्र (14.34) के अनुसार, बहु सहसम्बन्ध गुणांक

$$R_{1 \cdot 234} = \left(1 - \frac{|P|}{P_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

अतः ऊपर दिये माय्यूह का सारणिक $|P|$ तथा सहस्रण्ड P_{11} ज्ञात करने हैं। तबजाज (Irving's) विधि का प्रयोग करके सारणिक का मान ज्ञात किया।

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & .47 & .71 & 68 \\ .47 & 1 & .36 & .33 \\ .71 & .36 & 1 & .55 \\ 68 & 33 & .55 & 1 \end{vmatrix}$$

पहले स्तम्भ के शेषों के पदों में विस्तार करव,

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & .36 & .55 & -47 & .47 & 71 & 68 \\ 36 & 1 & 55 & -47 & .36 & 1 & .55 \\ 33 & 55 & 1 & -47 & .33 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 71 \begin{vmatrix} .47 & .71 & .68 & -68 & .47 & 71 & 68 \\ 1 & .36 & 33 & -68 & 1 & 36 & .33 \\ 33 & 55 & 1 & -68 & 36 & 1 & 55 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \{ 1 (6975) - .36 (.1785) + .33 (-.1320) \} \\ &\quad - 47 \{ .47 (8185) - .36 (3360) + .33 (-.4457) \} \\ &\quad + 71 \{ .47 (1785) - 1 (3360) + .33 (-.0105) \} \\ &\quad - 68 \{ .47 (-1320) - 1 (-.2892) + .36 (-.0105) \} \\ &= (589680) - 47(116654) - 71(2556) - 68(22338) \\ &= 589680 - 54827 - 181476 - 151898 \\ &= 201479 \end{aligned}$$

जबकि सहसम्बन्ध,

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & .36 & .33 \\ 36 & 1 & 55 \\ 33 & 55 & 1 \end{vmatrix} = .589680$$

$$\begin{aligned} \therefore R_{1231} &= \left(1 - \frac{201497}{589680} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1 - 3417)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{.6583} \\ &= .811 \end{aligned}$$

चर X_1 का चरो X_2 , X_3 व X_4 से उच्च क्रम का बहु सहसम्बन्ध है।

प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक

यह बहुचर बटन में किन्ही दो चरो में सहसम्बन्ध की मात्रा है जब कि अन्य चरो का रैखिक प्रभाव का इन दाना चरा में निरसन कर दिया गया हो। यदि त्रिचर बटन में चर X_1 , X_2 , X_3 हैं तो X_1 व X_2 में सहसम्बन्ध जबकि X_1 व X_2 से तीसरे चर के रैखिक प्रभाव का निरसन कर लिया गया हो, प्रांशिक सहसम्बन्ध कहलाता है। इसे $\rho_{12.3}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और $\rho_{12.3}$ व आकलक का $r_{12.3}$ से सूचित करते हैं।

यदि त्रिचर बटन में चर x_1 , x_2 , x_3 अपने-अपने माध्य से विचलित चर हैं तो x_1 व x_2 में प्रांशिक सहसम्बन्ध व हतु x_1 व x_2 के प्रत्येक मान में x_3 का वह मान घटा दें जो x_1 व x_2 को प्रभावित करता है। माना नय चर $x_{1.3}$ व $x_{2.3}$ द्वारा निरूपित विय गय है। $x_{1.3}$ व $x_{2.3}$ में सहसम्बन्ध गुणांक ही X_1 व X_2 में प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक कहलाता है। $x_{1.3}$ व $x_{2.3}$ का निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$x_{1.3} = x_1 - r_{13} \frac{s_1}{s_3} x_3$$

$$\text{और } x_{2.3} = x_2 - r_{23} \frac{s_2}{s_3} x_3$$

यहाँ s_1 , s_2 , s_3 क्रमशः X_1 , X_2 व X_3 के आकलित मानक विचलन हैं। सरल सहसम्बन्ध गुणांक की राति से $x_{1.3}$ व $x_{2.3}$ में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करे ता

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} \quad (14.38)$$

है। इसी प्रकार यदि चर X_1 , X_3 , X_4 व X_2 हता X_1 व X_2 में प्रांशिक सहसम्बन्ध जबकि X_1 व X_2 से चरा X_3 व X_4 के रैखिक प्रभाव का निरसन कर दिया गया हो, $r_{12.34}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और $r_{12.34}$ के लिए सूत्र निम्न होता है :—

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{13.4} r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} \quad (14.39)$$

सूत्र (14.39) में $r_{12.3}$ का मान सूत्र (14.38) द्वारा तथा $r_{13.4}$ व $r_{23.4}$ के मान (14.38) के समरूप सूत्रों

$$r_{143} = \frac{r_{14} - r_{13} r_{43}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{43}^2)}}$$

$$r_{243} = \frac{r_{24} - r_{23} r_{43}}{\sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{43}^2)}}$$

द्वारा ज्ञात करने प्रतिस्थापित कर दिये जाते हैं और r_{1234} का मान परिवर्तित कर लिया जाता है ।

यदि चरों की संख्या चार से अधिक हो तो प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक के लिए सूत्र व्युत्पन्न जटिल हो जाता है । किन्तु इसका मान सहसम्बन्ध गुणांक समूहों की सहायता से ज्ञात करना सुगम है । माना कि k चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ हैं और सहसम्बन्ध गुणांक समूह $[P]$, (14.13) के अनुसार है तो किसी दो चरों X_j व X_k में प्रांशिक सहसम्बन्ध गुणांक $r_{j123\dots k}$ जबकि $j \neq k$ और अनुक्रम $1, 2, 3, \dots, k$ में j व k सम्मिलित नहीं है निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है —

$$r_{j123\dots k} = - (P_{jj} P_{kk})^{-1/2} \quad (14.40)$$

जहाँ P_{jj} , P_{kk} व P_{kk} सहसम्बन्ध-गुणांक समूहों के सार्वजनिक मन्तव्य $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{kk}$ का सहसंयोजक है ।

प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक का पराम -1 से $+1$ होता है अर्थात्

$$-1 < r_{j123\dots k} < +1$$

टिप्पणी यह ध्यान रहे कि बहु तथा प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक के लिए जो सूत्र दिये गये हैं वे सामान्य प्राथमिकी के साकलक हैं । प्राथमिकी की स्थिति में बहु सहसम्बन्ध गुणांक का $R_{j12\dots j-1, j+1, \dots, k}$ व प्रांशिक सहसम्बन्ध गुणांक को $\rho_{j123\dots k}$ द्वारा निरूपित करते हैं । इनके साकलक का ज्ञात करने के लिए प्रत्येक चर X_1, X_2, \dots, X_k पर n समान प्रेषण प्रतिदर्शों में लिए जाते हैं जिनके द्वारा प्रथम

$$r_{j12\dots j-1, j+1, \dots, k} \text{ व } r_{j123\dots k}$$

का परिक्लन किया जाता है ।

प्रांशिक सहसम्बन्ध-गुणांक की साधकता-परीक्षा

यदि परिक्ल्यता,

$$H_0: \rho_{j123\dots k} = 0 \text{ व } H_1: \rho_{j123\dots k} \neq 0$$

के विरुद्ध परीक्षा करने की साधकता-परीक्षा का प्रयोग करने है । यह परीक्षा $H_0: \rho = 0$ की परीक्षा के समुच्चय है । यदि प्रतिदर्शों में k चरों पर n समान प्रेषण लिए गये हों तो प्रतिदर्शों,

$$t_{n-k} = \frac{r_{123\dots k} \sqrt{n-k}}{\sqrt{1-r_{123\dots k}^2}} \quad \dots(14.41)$$

यदि t का परिकल्पित मान पूर्वनिर्धारित α सा० स्त० α व $(n-k)$ स्व० की० के लिए सांख्यिक मान से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है जिनका अर्थ है कि प्राणिक सहसम्बन्ध-गुणांक का मान नार्थक है। इनके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है जिनका अर्थ है कि H_0 निरर्थक है।

उदाहरण 14.11 उदाहरण (14.10) में दिए गये चरों X_1, X_2, X_3, X_4 में सरल सहसम्बन्ध-गुणांकों को प्रयोग करके प्राणिक सहसम्बन्ध-गुणांक r_{1234} का परिकल्पित मान तदा इसकी सार्थकता परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सरल सहसम्बन्ध-गुणांक हैं,

$$r_{12} = 47, r_{13} = 71, r_{14} = 68$$

$$r_{23} = 36, r_{24} = 33, r_{34} = 55 \text{ व } n = 20$$

सूत्र (14.38) व समरूप सूत्रों द्वारा r_{123}, r_{143} व r_{234} के मान ज्ञान करके सूत्र (14.39) में रखने पर r_{1234} का मान ज्ञान कर लिया गया है।

$$r_{123} = \frac{47 - (71)(36)}{\sqrt{(1-71^2)(1-36^2)}}$$

$$= \frac{2144}{\sqrt{4959 \times 8704}}$$

$$= 3263$$

$$r_{143} = \frac{68 - (71)(55)}{\sqrt{(1-71^2)(1-55^2)}}$$

$$= \frac{-2895}{\sqrt{4959 \times 6975}}$$

$$= -4923$$

$$r_{234} = \frac{33 - (36)(55)}{\sqrt{(1-36^2)(1-55^2)}}$$

$$= \frac{-1320}{\sqrt{8704 \times 6975}}$$

$$= -1694$$

$$\therefore r_{1234} = \frac{3263 - (4923)(1694)}{\sqrt{(1-4923^2)(1-1694^2)}}$$

$$= \frac{2429}{\sqrt{(7576)(9713)}} \\ = 283$$

परिकल्पना,

$$H_0 : \rho_{12 \cdot 34} = 0 \text{ को } H_1 : \rho_{12 \cdot 34} \neq 0$$

के विरुद्ध परीक्षा प्रतिदर्शन (14.41) से द्वारा इस प्रकार कर सकते हैं -

$$t = \frac{283 \sqrt{20-4}}{\sqrt{1-283^2}} \\ = \frac{283 \times 4}{959} \\ = 1.18$$

सारणी (परि० घ-3) द्वारा $\alpha = 0.5$ और 16 स्व० को० के लिए $t = 2.120$ का निःपरिकल्पित t के मान से अधिक है। अतः H_0 स्वीकृत है।

दूसरा अभिप्राय है कि $r_{12 \cdot 34}$ निरर्थक है अर्थात् सहसम्बन्ध गुणांक $r_{12 \cdot 34}$ का परिकल्पन मूल (14.40) की सहायता से निम्न प्रकार कर सकते हैं। यहाँ

$$r_{12 \cdot 34} = \frac{P_{12}}{(P_{11} P_{22})^{\frac{1}{2}}}$$

उदाहरण (14.10) में किये परिकल्पना की सहायता से,

$$P_{12} = \begin{vmatrix} 47 & 36 & 33 \\ 71 & 1 & 55 \\ 68 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +116654$$

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 36 & 33 \\ 36 & 1 & 55 \\ 33 & 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 589680$$

$$P_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot 71 & \cdot 68 \\ \cdot 71 & 1 & 55 \\ \cdot 68 & \cdot 55 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 (\cdot 6975) - \cdot 71 (\cdot 3360) + \cdot 68 (- \cdot 2895)$$

$$= \cdot 6975 - \cdot 238560 - \cdot 196860$$

$$= \cdot 262080$$

$$r_{12 \cdot 3}^2 = \frac{\cdot 116654}{(589680 \times 262080)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\cdot 116654}{(\cdot 154543)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{116654}{\cdot 393}$$

$$= 296$$

यह बात ध्यान देने योग्य है कि $r_{12 \cdot 3}$ का मान दोनों सूत्रों द्वारा वही है जो योडा-ना प्रन्तर है वह संख्याओं के निकटन के कारण है।

कुछ सम्बन्ध

प्राथमिक सहसम्बन्ध-गुणाक तथा प्राथमिक समाश्रयण गुणाकों में निम्न सम्बन्ध होता है.

$$r_{ij}^2 / 12 \dots k = b_{j/12 \dots k} b_{i/j.12 \dots k} \dots (14.42)$$

यदि केवल तीन चर X_1, X_2, X_3 हों तो

$$r_{12 \cdot 3}^2 = b_{12 \cdot 3} b_{21 \cdot 3} \dots (14.42.1)$$

यदि k चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ हैं और चर X_1 का $X_2, X_3, X_3, \dots, X_k$ से बहु सहसम्बन्ध-गुणाक $R_{1 \cdot 23 \dots k}$ है तो इसका प्रत्य प्राथमिक सहसम्बन्ध-गुणाकों से सम्बन्ध निम्न होता है :—

$$1 - R_{1 \cdot 23 \dots k}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13 \cdot 2}^2) \dots (1 - r_{1k \cdot 23 \dots k-1}^2) \dots (14.43)$$

प्रश्नावली

1. क्या सहसम्बन्ध-गुणाक एक से अधिक हो सकता है? अपने उत्तर की तथ्यों द्वारा पुष्टि कीजिये।
2. यदि σ_X^2 और σ_Y^2 दो स्वतन्त्र चरों X व Y के प्रसरण हैं तो सिद्ध कीजिये कि $(\alpha X + \beta Y)$ का प्रसरण $(\alpha^2 \sigma_X^2 + \beta^2 \sigma_Y^2)$ है।

3. निम्न सहसम्बन्ध-गुणांकों का ज्यामितीय निरूपण कीजिये :—

(i) $r=0.68$ (ii) $r=-.50$ (iii) $r=.02$ (iv) $r=1$

3. यदि दो चरों X व Y में सहसम्बन्ध धनात्मक है तो बताइये कि चरों - X और - Y में सहसम्बन्ध धनात्मक होगा या ऋणात्मक ?

5. (प्र) यदि x और y दो चर हैं जिनके माध्य शून्य हैं व समान प्रसरण σ^2 है और इनमें सहसम्बन्ध भी शून्य है तो सिद्ध कीजिये कि

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

और $v = x \sin \alpha - y \cos \alpha$

का समान प्रसरण σ^2 है और सहसम्बन्ध शून्य है ।

(बा० ए०, देहली 1952)

6. सिद्ध कीजिये कि सहसम्बन्ध मूल बिन्दु और रेखाओं में परिवर्तन के प्रभाव से मुक्त है ।

(आइ० सी० ए० डब्लू, 1964)

7. सहसम्बन्ध के अर्थ तथा सापेक्षता की संरचना को स्पष्ट कीजिये ।

(बी० एम०, माडराई, 1966)

8. निम्न प्रेक्षणों के लिए कार्मै पियमन सहसम्बन्ध-गुणांक का परिचालन कीजिये ।

X : 22 35 23 19 33 58 31 22 29

Y : 27 34 32 24 33 48 29 25 29

(केरल, 1969)

(उत्तर $r=0.953$)

9. एक फूल प्रदर्शनी में तीन निर्मायकों में एक प्रकार के 10 मुख्य फूलों को निम्न कोटियां प्रदान की :—

निर्मायक	फूल									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
P	8	7	5	3	6	2	9	10	1	4
Q	9	10	3	1	5	4	7	6	2	8
R	10	5	4	2	7	3	8	9	1	6

उपरोक्त कोटियां द्वारा सामंजस्य गुणांक ज्ञान कीजिये और इसकी सापेक्षता को परीक्षा कीजिये ।

10. एक समूह द्वारा सहसम्बन्ध-गुणांक का परिचालन करने पर निम्न सफल मान प्राप्त हुए,

$$n=25, \Sigma XY=516, \Sigma X=125, \Sigma Y=100$$

$$\Sigma X^2=650, \Sigma Y^2=480$$

कुछ समय पश्चात् जाँच करने पर पता चला कि उसने दो गुगल

X		Y
6		14
8		6

लिख लिये थे जबकि ये

X		Y
8		12
6		8

थे। सहसम्बन्ध-गुणांक का शुद्ध मान ज्ञात कीजिये।

(बी० एस० सी०, मद्रास, 1964)

(उत्तर $r=0.4133$)

11. निम्न सारणी में कुछ वर्षों में बैंगो के बचत खाते में जमा धन (करोड़ डालर) और ताला बन्दी व हडतालों की संख्या (हजारों में) दी गई है। सहसम्बन्ध-गुणांक का परिकलन कीजिये और इस पर टिप्पणी लिखिए।

बचत खाते में जमा : 5.1 5.4 5.5 5.9 6.5 6.0 7.2

तालाबन्दी और हडतालें 3.8 4.4 3.3 3.6 3.3 2.3 1.0

(ग्रार्ड० सी० डब्लू० ए०, 1966)

(उत्तर : $r = -0.822$, मिथ्या सहसम्बन्ध है)

12. विभिन्न चरों में सहसम्बन्ध मापूह निम्न दिया गया है।

बनाक की उपर	प्रति पुत्र (Clump) प्रभावो दोत्रियों की संख्या	मेघों (Spikes) की संख्या	प्रतिस्पाइकटेट कर्नलों की संख्या	
(X_1)	(X_2)	(X_3)	(X_4)	
X_1	1.00	0.712	0.789	0.714
X_2		1.00	0.789	0.730
X_3			1.00	0.791
X_4				1.00

(i) बहु सहसम्बन्ध-गुणांक $R_{1.234}$ का परिकलन कीजिये।

(ii) आंशिक सहसम्बन्ध-गुणांक $r_{13.24}$ का परिकलन कीजिये और इसका साधकता-परीक्षा कीजिये जबकि प्रतिदर्श में चरों पर 15 सगत प्रेक्षण थे।

13. गावों पर किये गये एक प्रयोग में 127 गाय सूखी तथा 35 गाय दूध देने वाली थीं। इन सूखी तथा दूध देने वाली गायों के मूत्र पोटैसियम तथा पचनशील पोटैसियम में सहसम्बन्ध-गुणांक क्रमशः 0.832 और 0.972 थे। परीक्षा कीजिये कि सूखी तथा दूध देने वाली गायों के मूत्र में मूत्र पोटैसियम तथा पचनीय पोटैसियम में सहसम्बन्ध-गुणांक समान है।

14. निम्न सारणी में मायो की राख्या, अन्तर्गृहीत सोडियम तथा पचनीय सोडियम सम्बन्धी प्रेक्षण दिये गये हैं जो कि विभिन्न रूपों में दिये गये थे।

मायो की संख्या	अन्तर्गृहीत सोडियम	पचनीय सोडियम
5	85	61
4	125	95
1	42	31
6	60	15
3	230	85
3	230	68
1	51	41

(1) अन्तर्गृहीत सोडियम तथा पचनीय सोडियम में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये।

(2) परिकल्पित सहसम्बन्ध गुणांक की मापकता-परीक्षा कीजिये।

(3) इस मास द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ρ की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कीजिये।

15. 12 शोधनों के अन्तर्गत उर्वर दोजियों (fertile tillers) की संख्या और अशुद्ध दोजियों (sterile tillers) की संख्या निम्न प्रकार है —

शोधन क्रमांक	उर्वर दोजियों की संख्या	अशुद्ध दोजियों की संख्या
1	378	818
2	598	943
3	382	1135
4	377	1171
5	388	727
6	611	1660
7	242	884
8	442	1274
9	409	862
10	368	1030
11	583	834
12	330	1020

उर्बर होजियों की संख्या व अनुर्बर होजियों की संख्या में सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञान कीजिये।

16. 6 मुषगों पर प्रयोग द्वारा शारीरिक भार (ग्राम) X और रैन्सियम की मात्रा (ग्राम) Y में परिकल्पित सहसम्बन्ध-गुणांक 0.98 है। परिकल्पना शारीरिक भार और रैन्सियम की मात्रा में परिपूर्ण सहसम्बन्ध है, की परीक्षा कीजिये।
17. चूहों पर पाँच विभिन्न परीक्षणों के अन्तर्गत कुल भार वृद्धि और कुल साईंसीन की मात्रा में सहसम्बन्ध-गुणांक और चूहों की संख्या निम्न प्रकार थी —

चूहों की संख्या प्रति बीरन (d)	सहसम्बन्ध-गुणांक (r)
5	0.975
6	0.990
5	0.926
5	0.865
6	0.891

समग्र में इन सहसम्बन्ध-गुणांकों की मजादारीयता की परीक्षा कीजिये।

18. 16 विद्यार्थियों की गणित तथा भौतिक विज्ञान के आधार पर कोटियाँ निम्न पायी गयीं —

गणित :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,
भौतिक विज्ञान	1,	10,	3,	4	5,	7,	2,	6,
	8,	11,	15,	9,	14,	12,	16,	13.

गणित तथा भौतिक विज्ञान में कुशलता के प्रति इन समूह का कोटि सहसम्बन्ध-गुणांक ज्ञान कीजिये।

(भागरा, 1952)

19. यदि चर Y की चर X पर और X की Y पर समाश्रयण रेखाएँ क्रमशः $Y = a_0 + a_1 X$ और $X = b_0 + b_1 Y$ हैं तो सिद्ध कीजिये कि $a_1 b_1 = r^2$.

(बी० ए०, मद्रास, 1967)

20. अध्याय 12 की प्रस्तावनी के प्रश्न 12 से दिये गये ग्यास के लिए,

(i) चर X का चरों X_1, X_2, X_3 से बहु सहस्रम्बन्ध-गुणांक ज्ञात कीजिये।

(ii) सांशिक सहस्रम्बन्ध-गुणांक r_{12} का परिवर्तन कीजिये और इसकी सार्थकता-परीक्षा कीजिये।

टिप्पणी : प्रस्तावनी में विशयविद्यालयों के दिये गये प्रश्न मूल रूप में सांशिक गुणांक से जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है।

□ □ □

सूचकांक वह सख्या है जो एक धर के लिए किसी समय, स्थान या स्थिति में परिमाण और अन्य समय, स्थान या स्थिति में परिमाण के अनुपात को निरूपित करती है। सूचकांक के द्वारा समय-समय पर या एक स्थान से दूसरे स्थान में अपेक्षित परिवर्तन ज्ञात किये जाते हैं। जैसे—आवश्यक वस्तुओं के वर्तमान मूल्यों और पिछले किसी अन्य वर्ष के मूल्यों के अनुपात को सूचकांक के रूप में ज्ञात करते हैं या दिल्ली व बम्बई के, समान वस्तुओं के, मूल्यों में अनुपात को सूचकांक के रूप में ज्ञात करते हैं जिससे कि यह पता चलता है कि दिल्ली की अपेक्षा बम्बई में रहन-सहन के व्यय में कितना अन्तर पड़ता है। इन माप का प्रयोग सरकार द्वारा मूल्य एवं वेतन निर्धारण सम्बन्धी नियम बनाने के हेतु भी किया जाता है। मित्रों के मासिक नौ वसंचागिया के वेतन रहन-सहन के मन्त्रों के आशय पर निर्धारित करते हैं और जो समय-समय पर मूल्यों में परिवर्तन होते हैं उनके अनुसार वेतनों में भी परिवर्तन कर दिये जाते हैं। इसके अतिरिक्त सूचकांक द्वारा स्फीति (Inflation) या अपस्फीति (deflation) की स्थिति का भी ज्ञान होता है। सर्वप्रथम सूचकांक का प्रयोग ड्यूलट (Dulot) ने सन् 1938 में दो निम्न समयों पर मूल्यों के योग की तुलना करके किया था।

बीसवी शताब्दी में मूल्य सूचकांक के अतिरिक्त वस्तुओं के उत्पादन या उपभोग मात्राओं में समय या स्थान के अनुसार परिवर्तन जानना भी अत्यधिक प्रचलित है। अतः सूचकांक द्वारा सर्वे दो स्थितियों की तुलना की जानी है चाहे वह दो विभिन्न समय हों या दो विभिन्न स्थान।

तुलना के हेतु किसी एक निश्चित समय पर किन्हीं वस्तुओं के मूल्यों व मात्राओं के प्रति भाँडे सर्वेक्षण द्वारा या अन्य किसी स्रोत में मट्टहीत करने होते हैं। इस समय को आधार काल (Base period) कहते हैं। अन्य समय पर, किस समय पर सूचकांक जालना हो, उन्हीं वस्तुओं के मूल्य व मात्राओं सम्बन्धी भाँडे एकत्रित किये जाते हैं। आधार समय व अन्य समय की तदनुसार वस्तुओं के मूल्य व मात्राओं के गुणनफल के योग का अलग अलग परिवर्तन कर लिया जाता है। निदिष्ट समय की सख्या को आधार समय की सख्या से भाग देने पर सूचकांक ज्ञात हो जाता है। यहाँ यह विधि केवल मूल सिद्धान्त के रूप में दी गई है अन्यथा सूचकांक ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का वर्णन प्रागे पाठ्यक्रम में दिया गया है, इस अनुपात के हेतु एक सर्व साधारण सूत्र निम्न सूत्र के रूप में दिया जा सकता है क्योंकि किसी भी अध्ययन में अधिकतर मूल्य और मात्रा दो घटकों का प्रयोग होता है। अतः कुल मूल्य प्रभाव (Total price influence) और कुल मात्रा प्रभाव का सूत्रीकरण सम्भव है और इसके द्वारा हम मान अनुपात (Value ratio) ज्ञात कर सकते हैं।

$$V = P \times Q$$

जबकि $P - V$ में कुल मूल्य प्रभाव का माप है।

$Q - V$ में कुल मात्रा प्रभाव का माप है।

सूत्र (151) का प्रयोग आधार के रूप में ही किया जायेगा।

सूचकांक ज्ञात करने की विधियाँ एक सूत्र को जानने में पहले अलग-अलग चरों की समझना लाभप्रद होगा जो कि निम्न प्रकार है —

I_{01} यह समय 1 (निर्दिष्ट काल) के लिए समय 0 (आधार काल) की अपेक्षा सूचकांक है।

P_{01} केवल मूल्य के लिए 0 काल की अपेक्षा काल 1 का सूचकांक है।

Q_{01} केवल मात्रा के लिए 0 काल की अपेक्षा काल 1 का सूचकांक है।

N_0 समय 0 (आधार काल) पर पदार्थों की संख्या है।

N_1 समय 1 (निर्दिष्ट काल) पर पदार्थों की संख्या है।

N_{01} उन पदार्थों की संख्या है जो दोनों समयों में सार्व (Common) हैं। इन पदार्थों को द्विधर्मी पदार्थ (binary commodities) कहते हैं।

अतः वे पदार्थ जो केवल एक काल में पाये जाते हैं द्विधर्मी पदार्थ कहलाते हैं क्योंकि कुछ नये पदार्थों की उत्पत्ति हो जाती है और कुछ पदार्थों का उत्पादन समाप्त हो जाता है। इनके प्रतिरक्त वस्तुओं का प्रयोग सामाजिक परिवर्तनों, वैज्ञानिक आविष्कारों आदि के कारण बदलता रहता है पर्याप्त कुछ वस्तुओं को चरन में हैं कुछ वर्षों बाद उत्पादित नहीं की जाती हैं क्योंकि उनका स्थान नई वस्तुएँ ग्रहण कर लेती हैं। संज्ञान के अनुसार भी आवश्यकताएँ बदलती रहती हैं अतः द्विधर्मी पदार्थों की संख्या

$$= (N_0 - N_{01}) + (N_1 - N_{01})$$

$$= (N_0 + N_1 - 2 N_{01}) \quad \dots (152)$$

है।

दूसरी प्रकार प्रतिदर्श के लिए सभी संकेतनों को छोटे अक्षरों द्वारा निरूपित करते हैं। जैसे द्विधर्मी पदार्थों की संख्या को काल 0 व 1 में n_0 व n_1 तथा द्विधर्मी पदार्थों की संख्या को n_{01} द्वारा निरूपित करते हैं। 0, 1, 2 आदि समयों में मूल्यों को P_0, P_1, P_2 आदि द्वारा और मात्राओं को Q_0, Q_1, Q_2 द्वारा निरूपित करते हैं। इन समयों पर प्रतिदर्श के लिए कुल मूल्य प्रमाण निम्न होते हैं —

$$\sum P_0 Q_0, \quad \sum P_1 Q_1, \quad \sum P_2 Q_2$$

दूसरी प्रकार द्विधर्मी पदार्थों के कुल मूल्य हैं,

$$\sum P_0 Q_0, \quad \sum P_1 Q_1, \quad \sum P_2 Q_2$$

सूचकांक रचना की विधियाँ

सूचकांक ज्ञात करने की दोस्तो विधियाँ हैं। सबसे ही सूचकांक ज्ञात करने समय नई प्रकार की कठिनाईयों सामने आती हैं। फिर भी कुछ विधियाँ अधिकतर उपयुक्त पाई जाती हैं। ऐसी ही कुछ विधियों का वर्णन यहाँ दिया गया है।

किसी भी विधि द्वारा सूचकांक ज्ञान करने में आधार वर्ष के मान को 100 के तुल्य मान लिया जाता है और अन्य वर्ष के मान को 100 की तुलना में दिया जाता है अर्थात् किसी विधि द्वारा जो मान प्राप्त होता है उसे 100 में गुणा कर दिया जाता है। इसी प्रकार प्राप्त संख्या को सूचकांक कहते हैं।

मूल्यों के योग के अनुपात द्वारा

माना कि प्रतिदर्श में n पदार्थों के मूल्यों का वर्षों 1 व 0 के लिए ज्ञात किया गया है। वर्ष 1 में वर्ष 0 की अपेक्षा मूल्य सूचकांक है।

$$P_{01} = \frac{\sum P_{1i}}{\sum P_{0i}} \quad \dots (15.3)$$

यह विधि सबसे सुगम है। किन्तु इसमें यह दाप है कि विभिन्न पदार्थों को समान महत्त्व दिया गया है जो कि व्यावहारिक दृष्टि से उचित नहीं है।

उदाहरण 15.1 दुग्ध वितरण योजना, कृषि महाविद्यालय, उदयपुर से 'दूध और दूध के पदार्थों के भाव सन् 1965 व 1972 में निम्न थे—

दूध और दूध के पदार्थ	1965 मूल्य ₹० प्रति किलो	1972 मूल्य ₹० प्रति किलो
दूध	0.80	1.20
घी	8.25	11.00
मक्खन	8.00	12.00
ग्राईसन्नीम	8.00	9.60
नीम (40% चर्बी)	9.00	13.00
कुल	34.05	46.80

वर्ष 1965 की अपेक्षा 1972 के लिए मूल्य सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

सूत्र (15.3) की सहायता से मूल्य सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{46.80}{34.05} \times 100 \\ = 137.4$$

अतः वर्ष 1972 के लिए मूल्य सूचकांक 137.4 है।

सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा

यदि n पदार्थों के लिए समय 0 तथा 1 पर क्रमशः मूल्य P_{0i} व P_{1i} हों तो,

$$P_{01} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{1i}}{P_{0i}} \quad \dots (15.4)$$

इस सूचक का प्रयोग सर्वप्रथम कार्लो (Carli) ने सन् 1764 में किया। किन्तु सन् 1863 में जेवॉन्ग (Jevons) ने बताया कि समानर माध्य की प्रयोगा गुणोत्तर माध्य द्वारा अधिक उचित सूचकांक ज्ञात किये जा सकते हैं।

$$P_{01} = n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{P_{01}}{P_{00}}} \quad \dots (15.5)$$

इसी प्रकार के सूचक प्रयोग माया-सूचकांक ज्ञात करने के हेतु दिये जा सकते हैं। इस स्थिति में सूचको में p के स्थान पर q का प्रयोग करना होता है। इस विधि का एक लाभ यह है कि घृष्ट-घृष्ट पदार्थों के सूचकांक भी ज्ञात हो जाते हैं।

उदाहरण 15.2 दूध व दूध के पदार्थों सम्बन्धी उदाहरण 15.1 में दिये ग्यात के लिए वर्ष 1965 की घोषणा वर्ष 1972 के मूल्य सूचकांक मापक सूचका के माध्य द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

सूच (15.4) द्वारा सूचकांक,

$$\begin{aligned} P_{01} &= \frac{1}{5} \left(\frac{1.20}{0.80} + \frac{11.0}{8.25} + \frac{12.00}{8.00} + \frac{4.80}{4.00} + \frac{13.00}{9.00} \right) \times 100 \\ &= \frac{1}{5} (1.50 + 1.33 + 1.50 + 1.20 + 1.44) \times 100 \\ &= 139.4 \end{aligned}$$

सूच (15.5) द्वारा सूचकांक,

$$\begin{aligned} P_{01} &= \left(\frac{1.20}{0.80} \times \frac{11.00}{8.25} \times \frac{12.00}{8.00} \times \frac{4.80}{4.00} \times \frac{13.00}{9.00} \right)^{1/5} \\ &= (1.50 \times 1.33 \times 1.50 \times 1.20 \times 1.44)^{1/5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{10} P_{01} &= \frac{1}{5} \{ \log_{10} 1.50 + \log_{10} 1.33 + \log_{10} 1.50 + \log_{10} 1.20 \\ &\quad + \log_{10} 1.44 \} \\ &= \frac{1}{5} (0.1761 + 0.1239 + 0.1761 + 0.0792 + 0.1584) \\ &= \frac{1}{5} (0.7137) \\ &= 0.1427 \end{aligned}$$

$$P_{01} = 1.389$$

100 में गुणा करके पर सूचकांक $P_{01} = 138.9$

भारत सापेक्ष द्वारा मूल्य सूचकांक

उपर्युक्त विधियों में एक महत्व बड़ा दोष यह है कि प्रत्येक पदार्थ की समान महत्व दिया गया है। किन्तु यह उचित नहीं है क्योंकि उन्मोला गर दस्तियों का प्रयोग समान मात्रा में नहीं करता है और न ही उन्मोला मापकद्वारा समान नहीं है। जैसे उदाहरण (15.1) में दूध व मक्खन को समान महत्व का माना गया है, जबकि मापकद्वारा यह

है कि दूध एक आवश्यक पदार्थ है और इसका प्रयोग लगभग सभी परिवारों में होता है और इसके विपरीत मक्खन का प्रयोग केवल कुछ ही परिवार करते हैं। सर्वविदित है कि दूध का उपभोग मक्खन की अपेक्षा बही अधिक होता है। अतः उपभोग की मात्रा में पदार्थों के मूल्यों को भारित करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है।

मूल्यों को, उपभोग की मात्रा द्वारा भारित न करने के दुष्परिणामों का हम स्पष्ट में समझा जा सकता है। यदि सूचकांक को स्थिर रखने के हेतु यदि दूध के मूल्यों को बढ़ाते जाय और मक्खन के मूल्य को घटाते जाय तो अधिकांश व्यक्तियों पर दूध के मूल्य का प्रभाव पड़ेगा और उनका व्यय बढ़ जायगा जबकि मक्खन के खर्च घटने का कुछ परिवारों को ही लाभ होगा। किन्तु मूल्यों की मात्रा में भारित करने पर इस प्रकार का विचित्र सम्भव नहीं है।

मूल्यों की मात्रा द्वारा भारित करके काल 0 (आधार) की अपेक्षा अन्य काल 1 का मूल्य सूचकांक निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं—

$$P_{01} = \frac{\sum P_{11} Q_{11}}{\sum P_{01} Q_{01}} \quad \dots (15.6)$$

जबकि $i=1, 2, 3, \dots, n$

(15.6) द्वारा प्राप्त सूचकांक का कोई अर्थ नहीं है क्योंकि इसके द्वारा यह जानना लगभग असम्भव है कि यह सूचकांक मूल्यों में परिवर्तन के कारण है या उपभोग वस्तुओं की मात्रा में परिवर्तन के कारण है। अतः अब यह प्रश्न उठता है कि भार सख्या क्या होनी चाहिए? इस भार सख्या को इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यदि दिये हुए वर्ष में आधार वर्ष 1 के सापेक्ष परिवर्तन $\sum P_{11} / P_0$ है और इसे सख्या $P_{01} Q_{01}$ अर्थात् आधार

वर्ष के कुल मान से भारित कर दें तो दिये हुए वर्ष में भारित मान निम्न होगा—

$$\sum \frac{P_{11}}{P_{01}} \times P_0 Q_{01} = \sum P_{11} Q_0$$

इस सख्या का आधार वर्ष के भारित मान $\sum P_{01} Q_0$ से अनुपात लेने पर सूचकांक P_{01}

ज्ञात हो जाता है।

$$P_{01} = \frac{\sum P_{11} Q_{01}}{\sum P_{01} Q_{01}} \quad \dots (15.7)$$

मात्रा सूचकांक के लिए इसी प्रकार का सूत्र निम्न रूप में दिया जा सकता है।

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_{11} P_{11}}{\sum Q_{01} P_{01}} \quad \dots (15.8)$$

(15.7) द्वारा दिया गया सूचकांक सुदृढ़ एवं विश्वसनीय है क्योंकि इसके द्वारा काल के अन्तर के कारण मूल्य परिवर्तन उत्पन्न पदार्थों की समान मात्रा के लिए ज्ञात किया गया है। इसी बात को इस प्रकार समझ सकते हैं। इस सूचकांक द्वारा यह पता चलता है कि

वर्ष 1 में आधार वर्ष (0) की अपेक्षा उन्हीं वस्तुओं की उतनी मात्रा प्राप्त करने के लिए कितना अधिक या कम धन लगाना पड़ेगा।

सूत्र (157) को लेगपीरिज (Laspeyres) सूत्र भी कहते हैं और इसे L द्वारा निर्दिष्ट करते हैं। इस सूत्र द्वारा उपभोक्ता के लिए आधार वर्ष की अपेक्षा मूल्य वृद्धि का अधिक आकलन होता है।

उपयुक्त दाय को दूर करने यदि दिये हुए वर्ष (1) की मात्राओं द्वारा भास्ति कर लिया जाता है और इस प्रकार मूल्य सूचकांक के लिए सूत्र,

$$P_{01} = \frac{\sum P_{11} Q_{11}}{\sum P_{01} Q_{11}} \quad \dots (15.9)$$

सूत्र (159) द्वारा पता चलता है कि दिये हुए वर्ष में वस्तुओं की मात्रा के लिए आधार वर्ष की अपेक्षा उन्हीं वस्तुओं की उतनी ही मात्रा के लिए कितना अधिक या कम धन खर्च करना होगा है। सूत्र (159) का नाम (Paasche) का सूत्र करते हैं। इस सूत्र द्वारा उपभोक्ता के लिए मूल्य में परिवर्तन का सूत्र आकलन होता है।

इसी प्रकार भास्ति मात्रा मापन सूचकांक की निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं—

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_{11} P_{11}}{\sum Q_{01} P_{11}} \quad \dots (15.10)$$

मूल्य सूचकांक के लिए दिये गये सूत्र (159) को P द्वारा निर्दिष्ट करते हैं।

सूत्रों L व P के द्वारा प्राप्त सूचकांक का प्रयोग अधिक व सूत्र आकलन होने के कारण को निम्न प्रकार समझ सकते हैं—कल्पना L सूत्रों में परिवर्तन के कारण प्रनिश्चित परिवर्तन का मान प्रदर्शित करता है। यह प्रनिश्चित मान अधिक है क्योंकि स्वतन्त्र बाजार की स्थिति में कोई भी व्यक्ति जिनके पास धन $\sum P_{11} Q_{01}$ है अपनी खरीद को इस प्रकार करेगा कि जिनमें उसकी स्थिति सुधर जाये। दूसरा यह है कि किसी चीज के भाव बढ़ जाने पर उपभोक्ता उस चीज को आधारवर्षवा कम प्रयोग करता है और इसके स्थान पर अन्य वस्तुओं का प्रयोग करना प्रारम्भ कर देता है। किन्तु L में उतनी ही मात्रा Q_0 का प्रयोग करने से P_{01} का मान कार्यात्मक मान से अधिक हो जाता है। इसी प्रकार का स्पष्टीकरण P द्वारा सूत्र आकलन के लिए दे सकते हैं।

L व P द्वारा अधिक व सूत्र आकलन होता आवश्यक नहीं है। ऐसी भी स्थिति हो सकती है कि जिनमें L का मान P से कम हो इसके प्रतिरूप इस सूत्रों द्वारा कुछ सूचकांक ज्ञात न होने का कारण यह भी है कि इनमें से कोई भी सूत्र पूर्ण म्याग का प्रयोग नहीं करता है। या इन दोनों सूत्रों का समन्वय कर देना से एक प्रकार के सूचकांक ज्ञात होने की मांग की जाती है।

L व P का समन्वय करने की एक तरल व अन्ती विधि L व P का समन्वय माध्य संकर सूचकांक ज्ञात करता है। यत्र,

$$\frac{1}{2}(L+P) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum P_{11} Q_{01}}{\sum P_{01} Q_{01}} + \frac{\sum P_{11} Q_{11}}{\sum P_{01} Q_{11}} \right\} \quad \dots (15.11)$$

समान्तर माध्य द्वारा सूचकांक का परिवर्तन सरल है। किन्तु गुणोत्तर माध्य भी प्रायः उचित सूचकांक बताता है। इसका नाम गुणोत्तर क्रॉस (Geometric cross) फिशर ने सन् 1920 में दिया।

$$\sqrt{L.P} = \sqrt{\frac{\sum_i P_{1i} Q_{0i}}{\sum_i P_{0i} Q_{0i}} \times \frac{\sum_i P_{1i} Q_{1i}}{\sum_i P_{0i} Q_{1i}}} \quad \dots (15.12)$$

गुणोत्तर क्रॉस को फिशर का आदर्श सूत्र (Fisher's ideal formula) भी कहते हैं। इसका कारण यह है कि उनका विचार था कि यह सम्भव है कि किसी काल में मूल्यों में परिवर्तन का पूर्ण यथार्थता से माप किया जा सकता है। इस बात को सिद्ध करने हेतु उन्होंने बताया कि उनका सूत्र, सूत्र-त्रुटि से मुक्त है। अतः फिशर ने दो सूत्र त्रुटियों की परीक्षाओं का वर्णन किया और यह सिद्ध किया कि सूत्र (15.12) इन त्रुटियों से मुक्त है। ये दो परीक्षाएँ निम्न प्रकार हैं—

(1) कालोत्क्रमण परीक्षा

फिशर ने विचार व्यक्त किया कि मूल्य सूचकांक के लिए दिया गया कोई सूत्र तब परिशुद्ध कहा जायेगा जबकि यह काल सामंजस्य को बनाय रखने अर्थात् निम्न सम्बन्ध का सन्तुष्ट करे—

$$P_{01} P_{10} = 1 \quad \dots (15.13)$$

यदि यह सूत्र सन्तुष्ट नहीं हो तो फिशर ने इसे सम्मिलित त्रुटि बताया क्योंकि इस सूत्र त्रुटि को P_{01} या P_{10} में से किसी एक के माध्य सम्बद्ध नहीं किया जा सकता है। अतः सम्मिलित त्रुटि

$$E_1 = P_{01} P_{10} - 1 \quad \dots (15.13.1)$$

यदि $P_{01} = 80, P_{10} = 125$

तो
$$P_{01} \times P_{10} = \frac{80}{100} \times \frac{125}{100}$$

$$= 1$$

और $E_1 = 0$

सम्बन्ध (15.13) को निम्न प्रकार से भी सिद्ध कर सकते हैं—

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum_i P_{1i} Q_{0i}}{\sum_i P_{0i} Q_{0i}} \times \frac{\sum_i P_{1i} Q_{1i}}{\sum_i P_{0i} Q_{1i}}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum_i P_{0i} Q_{1i}}{\sum_i P_{1i} Q_{1i}} \times \frac{\sum_i P_{0i} Q_{0i}}{\sum_i P_{1i} Q_{0i}}}$$

निम्न सूत्रों में धारक 1 को अनुत्पन्न के रूप में स्वयं समझ लिया गया है।

$$\begin{aligned} \therefore P_{01} \times P_{10} &= \sqrt{\frac{\frac{\sum P_0 Q_1}{\sum P_1 Q_1} \times \frac{\sum P_0 Q_0}{\sum P_1 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}}{1}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) उपादान-उत्क्रमण परीक्षा

इस परीक्षा की उत्पत्ति किन्तु न इस विचार को ध्यान में रखते हुए की कि एक सूत्र या पदार्थों के मूल्यों के लिए सत्य है उन्ने पदार्थों की मात्रा के लिए भी सत्य होना चाहिये। यतः,

$$P_{01} Q_{01} = V_{01} \quad \dots (15.14)$$

$$\text{या} \quad \frac{P_{01} Q_{01}}{V_{01}} = 1 \quad \dots (15.14.1)$$

जबकि V_{01} निश्चित पदार्थों के मूल्य घनप्राप्त को निरूपित करता है अर्थात्,

$$V_{01} = \frac{\sum P_{11} Q_{11}}{\sum P_{01} Q_{01}} \quad (15.14.2)$$

यदि कोई सूत्र सम्बन्ध (15.14) को सन्तुष्ट नहीं करता है तो उस सूत्र के सम्मिलित त्रुटि विद्यमान समझी जाती है। यहाँ इस त्रुटि का सम्मिलित त्रुटि इस कारण कहा गया है कि यह कहना सम्भव नहीं है कि त्रुटि मूल्य घटन से सम्बद्ध है या मात्रा घटन से सम्बद्ध है, अतः सम्मिलित त्रुटि, जो कि धनात्मक या ऋणात्मक प्रतिशत त्रुटि के रूप में दी गई है, निम्न प्रकार है--

$$E_2 = \frac{P_{01} Q_{01}}{V_{01}} - 1 \quad \dots (15.15)$$

किन्तु न कहा कि वह सूत्र जो इस त्रुटिया से मुक्त है या य त्रुटिया घटयत्त सूक्ष्म हों तो सूचकांक के लिए सूत्र का अर्थ को विशेषा उल्लेख समझा जाता है। किन्तु का सूत्र उपादान-उत्क्रमण परीक्षा में सत्य होता है। इसे निम्न प्रकार निम्न विचार जा सकता है --

$$\begin{aligned} P_{01} &= \sqrt{\frac{\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1}}{1}} \\ Q_{01} &= \sqrt{\frac{\frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1}}{1}} \end{aligned}$$

इन सूत्रों में अनुत्पन्न 1 को प्रत्येक अक्षर के साथ स्वयं समझ लिया गया है।

$$\begin{aligned}
 P_{01} \cdot Q_{01} &= \sqrt{\frac{\sum_i P_1 Q_0}{\sum_i P_0 Q_0} \times \frac{\sum_i P_1 Q_1}{\sum_i P_0 Q_1} \times \frac{\sum_i Q_1 P_0}{\sum_i P_0 Q_0} \times \frac{\sum_i Q_1 P_1}{\sum_i Q_0 P_1}} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\sum_i P_1 Q_1}{\sum_i P_0 Q_0} \right)^2} \\
 &= \frac{\sum_i P_1 Q_1}{\sum_i P_0 Q_0} \\
 &= V_{01}
 \end{aligned}$$

इन गुणों के अनिश्चित फिगर न गुणोत्तर-त्रास सूत्र को इस आधार पर भी प्रवर (Superior) बताया कि यह मूल्य तथा मात्रा में परिवर्तन का माप करने में दो कालों (आधार व अन्य काल) के सम्पूर्ण ग्यास को प्रयोग में लाता है।

कुछ अनुसंधानकर्त्ताओं ने इस सूत्र व आदर्श होने का अनुमोदन किया। इनमें मुख्यतया पीगू (Pigou) और बाउले (Bowley) हैं। किन्तु कुछ अन्य व्यक्तियों ने गुणोत्तर-त्रास को आदर्श सूत्र मानने से असहमति व्यक्त की, क्योंकि फिगर का सूत्र वृत्तीय परीक्षा (नीचे दी गई है) में पूरा नहीं उतरता है। फिर भी आजकल गुणोत्तर-त्रास का आदर्श सूत्र के रूप में प्रयोग किया जाता है।

वृत्तीय परीक्षा

इस परीक्षा के अन्तर्गत सूचकांक एक काल को आधार मानकर उसमें अगले काल के लिए ज्ञात करते हैं। यह तब तब चलना रहता है जब तब कि अन्तिम सूचकांक प्रारम्भिक वर्ष के लिए, अन्तिम काल को आधार मानकर ज्ञात न हो जाय। अतः K वर्षों के लिए वृत्तीय परीक्षा निम्न प्रकार है—

$$P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \dots P_{(k-1)k} \cdot P_{k0} = 1 \quad \dots (15.16)$$

सूत्र (15.16) इस प्रकार भी लिख सकते हैं—

$$P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{23} \dots P_{(k-1)k} = P_{0k} \quad \dots (15.16.1)$$

सूत्र (15.16.1) में स्पष्ट है कि काल 0 से K तक के श्रृंखलिक सूचकांकों का गुणनफल, सूचकांक P_{0k} के समान होता है। इस सूत्र को अगले पृष्ठ में श्रृंखला सूचकांक के अन्तर्गत सिद्ध भी किया गया है।

वृत्तीय परीक्षा में केवल एक या दो सूत्र ही पूरे उतरते हैं और ये वे सूत्र हैं जो बहुत कम प्रयोग में आते हैं क्योंकि ये सैद्धान्तिक रूप से अच्छे नहीं हैं। यही कारण है कि फिगर ने वृत्तीय परीक्षा को दोषपूर्ण कहा है और साथ ही यह भी सिद्ध किया कि कोई भी उच्च श्रेणी का सूत्र वृत्तीय परीक्षा के हेतु दिये गये प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता है।

L व P में सामंजस्य

L व P में सामंजस्य संख्या D इस प्रकार है,

$$D = L - P \quad \dots (15.17)$$

यदि $D < 2$ हो तो L व P दोनों सतोपजनक मान जाते हैं और यदि $D > 2$ हो तो यह समझा जाता है कि दोनों सूचकांक-मापों में से कोई भी सतोपजनक नहीं है।

समान्तर भार संकरित सूत्र

समान्तर भार संकरित सूत्र य सूत्रा P_{11} व P_{01} का भार 0 व 1 की मात्राओं के योग से भारित करते हैं। इस सूत्र द्वारा एक अच्छा सूचकांक प्राप्त हो जाता है।

$$P_{01} = \frac{\sum_i (q_{11} + q_{01}) P_{11}}{\sum_i (q_{11} + q_{01}) P_{01}} \quad \dots (15.18)$$

गुणोत्तर भार संकरित सूत्र (Geometric-crossed weight formula)

यह सूत्र निम्न होता है —

$$P_{01} = \frac{\sum_i \sqrt{P_{11} q_{11} q_{01}}}{\sum_i \sqrt{P_{01} q_{11} q_{01}}} \quad \dots (15.19)$$

गुणांतर भार संकरित सूचकांक परिवर्तन में कठिन है। इस तब तब इसकी गणना करनी की आवश्यकता स्पष्ट न हो, तब तब इसका प्रयोग नहीं करना चाहिये।

(टिप्पणी) मात्रा सम्बन्धी सूचकांक सूत्र P क स्थान पर Q और Q व स्थान पर P का प्रयोग करने प्राप्त हो जाते हैं।)

मिचल (Mitchell) ने घोर सूत्रों के सूचकांक के लिए सूत्रों को आधार वर्ष में दिए हुए वर्ष के बीच गरीबी हुई या बेची हुई वस्तुओं की मात्रा के माध्य q_1 द्वारा भारित करने का सुझाव देता और इसके लिए निम्न सूत्र दिया —

$$P_{01} = \frac{\sum_i P_{11} q_1}{\sum_i P_{01} q_1} \quad \dots (15.20)$$

इस सूत्र को विभिन्न लोगों ने स्वीकार किया किन्तु चूंकि वनों की गरीबी व बिनी सम्बन्धी घांटे एकत्र करना पर्याप्त पणुविधाजनक है। के कारण यह सूत्र प्रचलन में नहीं है।

द्विती भी स्थिति में सूचकांक प्राप्त करने में भार एक प्रमुख महत्व रखता है। वर्तमान अनुसंधान करने के बाद भी एक निश्चित भार की सर्वोत्तम भार कहना कठिन है क्योंकि यह भार, का व उम्र का भी परिस्थितिवा एवं घांटे जा उपरभ्य हो उप पर बटुन निर्भर करते हैं। इस भारों का चयन बांधवर्तों के अनुभव एवं कुशलता पर निर्भर रहता है।

उदाहरण 15.3 : निम्न सारणी में 10 पदार्थों के लिए यूरोपियन आर्थिक समुदाय (European economic community) द्वारा किये गये आयात सम्बन्धी धाँकड़े वर्ष 1961 व 1967 के लिए निम्न सारणी में दिये गये हैं —

पदार्थ	पदार्थ का भाव (p_0) (लाख डॉलर प्रति हजार मीटरी टन)	वर्ष 1961	पदार्थ की मात्रा (q_0) (हजार मीटरी टन)
1	2		3
दूध व घी	1.875		152.5
मक्खन	0.902		65.4
गहूँ	0.788		5026.9
चावल	1.406		356.4
मक्का	0.562		6683.4
मेवा	3.000		173.5
शक्कर	1.605		468.6
तम्बाकू	11.625		273.2
पोनट (हरा)	1.964		787.5
बन्धी कपास	6.551		320.5

वर्ष 1967	
पदार्थ का भाव (p_1) (लाख डॉलर प्रति हजार मीटरी टन)	पदार्थ की मात्रा (q_1) (हजार मीटरी टन)
4	5
2.551	532.7
1.013	70.5
0.822	4483.6
1.763	335.7
0.659	9797.1
3.633	148.1
1.323	535.9
12.605	301.0
1.973	842.4
6.136	961.2

(i) यूरोपियन आर्थिक समुदाय द्वारा किये गये आयात सम्बन्धी 1967 वा 1961 के आधार पर मूल्य सूचकांक (क) लेसविरेज सूत्र द्वारा (ख) पॉसे सूत्र द्वारा, निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

(ii) फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक ज्ञात करके दिखाया गया है।

(iii) फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक की वानोन्वयन परीक्षा निम्न प्रकार की जाती है।

(iv) समान्तर क्रम पारित सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

(1) सूत्र (15.7) द्वारा सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ पदांश की संख्या 10 है। अतः पहले निम्न सत्या का परिकलन किया।

10

$$\sum_{i=1}^{10} P_{11} Q_{01} = (2.551 \times 152.5 + 1.013 \times 65.4 + \dots + 1.973 \times 787.5 + 6.136 \times 920.5)$$

$$= 21515.9781$$

10

$$\sum_{i=1}^{10} P_{01} Q_{01} = (1.875 \times 152.5 + 0.902 \times 65.4 + \dots + 1.964 \times 787.5 + 6.551 \times 920.5)$$

$$= 20588.6932$$

अतः लेसविरेज सूत्र द्वारा सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{21515.9781}{20588.6932} \times 100$$

$$= 104.50$$

पॉसे—सूत्र (15.9) द्वारा सूचकांक ज्ञात करने के लिए निम्न सत्या का परिकलन किया।

10

$$\sum_{i=1}^{10} P_{11} Q_{11} = (2.551 \times 532.7 + 1.031 \times 70.5 + \dots + 1.973 \times 842.4 + 6.136 \times 961.2)$$

$$= 24765.1078$$

और

10

$$\sum_{i=1}^{10} P_{01} Q_{11} = (1.875 \times 532.7 + 0.902 \times 70.5 + \dots + 1.964 \times 842.4 + 6.551 \times 961.2)$$

$$= 23328.2840$$

$$P_{01} = \frac{24765.1078}{23328.2840}$$

$$= 106.15$$

सूत्र (15.12) द्वारा, सूचकांक

$$\begin{aligned} P_{01} &= \sqrt{LP} \\ &= \sqrt{104.50 \times 106.15} \\ &= \sqrt{11092.6750} \\ &= 105.32 \end{aligned}$$

(iii) कालोत्क्रमण परीक्षा के लिए सूचकांक P_{10} को और ज्ञान करना होगा।

$$\begin{aligned} P_{10} &= \sqrt{\frac{\sum_i P_{0i} q_{1i}}{\sum_i P_{1i} q_{0i}}} \times \frac{\sum_i P_{0i} q_0}{\sum_i P_{1i} q_{0i}} \\ &= \sqrt{\frac{23328.2840}{24765.1878} \times \frac{20588.6932}{21515.9781}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{106.15} \times \frac{1}{104.50}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{10} \times P_{01} &= \sqrt{\frac{106.15 \times 104.50}{106.15 \times 104.50}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

टिप्पणी उपर्युक्त परिणामों में एक विशेष बात सामने आती है कि $L < P$ इसका कारण यह दिया जा सकता है कि आयात में निर्यात की मात्रा में वृद्धि अधिक हुई और वस्तुओं के मूल्यों में कम वृद्धि हुई है। $L > P$ का नियम मुख्यतया उपभोक्ता द्वारा की गई मात्राओं के लिए लगभग सदैव सत्य रहता है।

(iv) सूत्र (15.18) के द्वारा समान्तर भार संकरित मूल्य सूचकांक ज्ञात कर सकते हैं। इस सूचकांक का निम्न सारणी बनाकर सुगमता से, परिवर्तन कर सकते हैं:—

$(q_{1i} + q_{0i})$	$P_{1i} (q_{1i} + q_{0i})$	$P_{0i} (q_{1i} + q_{0i})$
685.2	1747.9452	1284.7500
135.9	137.6667	122.5818
9510.5	7817.6310	7494.2740
692.1	1220.1723	973.0926
16480.5	10860.6495	9262.0410
321.6	1168.3728	964.8000
1004.5	1328.9535	1612.2225
574.2	7237.7910	6675.0750
1629.9	3215.7927	3201.1236
1881.7	11546.1112	12327.0167
योग	46281.0859	43916.9772

घत मूल्य सूचकांक,

$$P_{01} = \frac{46281\ 0859}{43916\ 9772} \times 100$$

$$= 105\ 38$$

यह बात ध्यान देने योग्य है कि फिशर के घादशं सूत्र तथा समान्तर त्रास भारित सूत्र द्वारा मूल्य सूचकांक लगभग समान हैं।

उदाहरण 15.4 उत्तर प्रदेश में धातल व गेहूँ के उत्पादन तथा धोक भाव सम्बन्धी घाकडे सन् 1953 और 1960 के लिए इम प्रकार हैं —

वर्ष	धोक भाव ($2.5 \times 10^8 \times p^*$)			
	प्रति दश लाख टन		उत्पादन (दश लाख टन)	
	धातल	गेहूँ	धातल	गेहूँ
1953	22 14	18 60	1 9	2 9
1960	20 47	16 12	2 5	3 3

p^* → सारणी में दिये हुए भाव को निरूपित करता है।

सेसपिरीज के सूत्र (15.8) द्वारा 1960 के लिए 1953 की घणेत, मात्रा सूचकांक,

$$Q_{01} = \frac{2.5 \times 22\ 14 + 3.3 \times 18\ 60}{1.9 \times 22\ 14 + 2.9 \times 18\ 60} \times 100$$

$$= \frac{116\ 730}{96\ 006} \times 100 = 121\ 58$$

सूचकांक की रचना में त्रुटियाँ

मूल्यों के या मात्राघो के प्रति सूचकांक, जो कि द्विवर्षी पदाघो पर घाधारित है, की रचना करने समय प्रायः तीन प्रकार की त्रुटि होने की सम्भावना रहती है।

(1) सूत्र त्रुटि

किसी भी एक सूत्र को कन्ही पदाघो के लिए मूल्य या मात्रा सूचकांक जान करने के लिए सर्वोत्तम चयन कठिन है क्योंकि प्रत्येक सूत्र के दाप एक गुण होता ही विद्यमान है। घत एक उपयुक्त सूत्र का चयन, ग्याम के स्वरूप, काल एक सूचकांक के उद्देश्य को ध्यान में रल कर किया जाता है।

(2) प्रतिघयन-त्रुटि :

यदि सम्पूर्ण पदाघो 'N' को सम्मिलित न करने, इनमें से केवल n पदाघो का गारुण्डित प्रतिदघो लेकर, द्विवर्षी पदाघो के द्वारा $P_{01}(n)$ या $Q_{01}(n)$ की रचना की जाती है तो इनके मान सम्पूर्ण पदाघो (N) के लिए रचित सूचकांक $P_{01}(N)$ या $Q_{01}(N)$ के मित्र हाम। घत $P_{01}(n)$ व $P_{01}(N)$ व घानर को प्रतिघयन त्रुटि कहते हैं। इस त्रुटि का निरधारित विधिये द्वारा घाकलन कर सकते हैं।

(3) सजातीयता त्रुटि :

यह त्रुटि सूचकांक की रचना में $P_{01}(1)$ व $P_{01}(N)$ का अन्तर के समान होती है। जबकि $P_{01}(T)$ दिये हुए वर्ष (1) व आधार वर्ष (0) में विद्यमान सब पदार्थों के मूल्य तथा भारों द्वारा रचित सूचकांक है और $P_{01}(N)$ इस त्रुटि के मापन के लिए कोई द्विवर्णीय N पदार्थों द्वारा रचित सूचकांक है। निश्चित मूल्य तो उपलब्ध नहीं है किन्तु फिर भी R परीक्षा द्वारा सजातीयता का परिमाण ज्ञान कर सकते हैं। सजातीयता-गुणांक 'R' के लिए निम्न सूत्र है —

$$R = \frac{\text{अद्वितीय पदार्थों की सख्या}}{\text{साल 1 व 0 में कुल पदार्थों की सख्या}}$$

$$= \frac{N_0 + N_1 - 2N_{01}}{N_0 + N_1} \quad \dots (15.21)$$

जबकि N_1 साल 1 (दिये हुए वर्ष) में और N_0 , साल 0 (आधार वर्ष) में कुल पदार्थों की संख्या है।

यदि $R=0$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण सजातीयता है अर्थात् दोनों सालों में एक समान पदार्थ हैं। यदि $R=1$ हो तो इसका अर्थ है कि पूर्ण विजातीयता है अर्थात् जो पदार्थ साल 1 में है उनमें से कोई भी पदार्थ साल 0 में नहीं था या $N_{01}=0$ इस प्रकार R का परास 0 से 1 है या $0 \leq R \leq 1$ किसी सूचकांक की रचना के साथ-साथ R के मान का भी परिकल्पन करके सजातीयता का पता लगाया जा सकता है। R का मान जितना शून्य के निकट होता है उतनी ही सजातीयता अधिक मानी जाती है। सजातीयता अधिक होने की स्थिति में सूचकांक अधिक विश्वसनीय होता है। यह ध्यान रहे कि R केवल सूचक मात्र है।

उदाहरण 15.5 एक शहर में वर्ष 1960 में एक सर्वेक्षण द्वारा 40 प्रावश्यक वस्तुओं की दर तथा उपभोग की मात्रा सम्बन्धी आँकड़े एकत्र किये गये। 1970 में फिर एक सर्वेक्षण, 50 वस्तुओं की दर एक उपभोग की मात्रा ज्ञात करने के हेतु, किया गया। इन दो वर्षों में केवल 30 वस्तुएँ बची थीं तो न्याय की सजातीयता की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं —

सूत्र (15.21) द्वारा R का मान ज्ञान किया,

यहाँ $N_0 = 40$, $N_1 = 50$, $N_{01} = 30$

$$R = \frac{40 + 50 - 60}{40 + 50}$$

$$= \frac{30}{90} = 1/3$$

R का मान लगभग 33 है अतः न्याय में उच्च क्रम की विजातीयता नहीं है।

श्रुतला सूचकांक और इसका विवर आधार सूचकांक से सम्बन्ध :

इसमें पूर्व दी हुई विधियों द्वारा विवर आधार वाला ही संवेदा जमी अन्य वर्ष में पटित मूल्यों के स्तर में प्रतिगत परिवर्तन ज्ञात किया गया । इस प्रकार का सूचकांक अमेरिका में प्राथम प्रचलित है । किन्तु श्रुतला सूचकांक में, जिस जाल में अन्य जाल तक का सूचकांक ज्ञात करना हो तो जमी भी वर्ष के विद्ये वर्ष के आधार मानने हैं और इस सूचकांक को विद्ये वर्ष के सूचकांक में गुणा करने, दिने हुए वर्ष के लिए श्रुतला सूचकांक ज्ञात हो जाता है । इस विधा में आधार वर्ष के समस्त वर्ष में प्रारम्भ करने दिने हुए वर्ष तक प्रत्येक सूचकांक का परिकल्पन करना होता है ।

माना कि आधार वर्ष को 0 और इसके बाद में आने वाले वर्षों को 1, 2, 3, ..., k द्वारा निरूपित किया गया है तो वर्षों 1, 2, 3,, k के लिए विवर आधार मूल्य सूचकांक $P_{01}, P_{02}, P_{03}, \dots, P_{0k}$ हैं । j वें वर्ष का मूल्य सूचकांक आधार 0 की संवेदा निम्न सूत्रों द्वारा दिया जा सकता है ।

सैमपीरिज सूत्र,

$$P_{0i} = \frac{\sum P_{ij} Q_{0i}}{\sum P_{0i} Q_{0i}} \quad \dots (15.22)$$

जहाँ $i = 1, 2, \dots, n$
 और $j = 1, 2, 3, \dots, k$

पासे सूत्र,

$$P_{0i} = \frac{\sum P_{ij} Q_{0i}}{\sum P_{0i} Q_{0i}} \quad \dots (15.23)$$

जहाँ $i = 1, 2, \dots, n$
 और $j = 1, 2, 3, \dots, k$

किन्तु ऊपर दी हुई विधि के अनुसार सैमपीरिज सूत्र द्वारा श्रुतला सूचकांक निम्न प्रकार मान कर सकते हैं —

$$P_{01} = \frac{\sum P_{11} Q_{01}}{\sum P_{01} Q_{01}} \quad \text{यह श्रुतला सूचकांक ही प्रदान करती है ।}$$

$$P_{02} = \frac{\sum P_{21} Q_{11}}{\sum P_{11} Q_{11}} \times \frac{\sum P_{11} Q_{01}}{\sum P_{01} Q_{01}}$$

$$= P_{12} \cdot P_{01}$$

इसी प्रकार,

$$P_{03} = \frac{\sum P_{31} Q_{21}}{\sum P_{21} Q_{21}} \times \frac{\sum P_{21} Q_{11}}{\sum P_{11} Q_{11}} \times \frac{\sum P_{11} Q_{01}}{\sum P_{01} Q_{01}}$$

$$= P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01}$$

$$= P_{23} \cdot P_{02}$$

और

$$P_{04} = P_{34} \cdot P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01}$$

$$= P_{34} \cdot P_{03}$$

....

$$P_{0k} = P_{(k-1)k} \cdots P_{23} \cdot P_{12} \cdot P_{01} \quad \dots (15.24)$$

$$= P_{(k-1)k} \cdot P_{0(k-1)}$$

शृंखला सूचकांक का एक लाभ यह है कि यदि किसी बीच के वर्ष का पिछले वर्ष की अपेक्षा सूचकांक ज्ञात करना हो तो अगले वर्ष के सूचकांक को पिछले वर्ष के सूचकांक से भाग करके ज्ञात कर सकते हैं, जैसे—

$$P_{34} = \frac{P_{04}}{P_{03}}$$

यदि शृंखला मूल्य सूचकांक में प्रत्येक वर्ष के लिए पिछले वर्ष की अपेक्षा सूचकांक ज्ञात करने में निश्चित q का प्रयोग करें तो शृंखला आधार और स्थिर आधार मूल्य सूचकांक में कोई अन्तर नहीं रहता है।

उदाहरणार्थ,

मूल्य सूचकांक	स्थिर आधार सूचकांक	निश्चित मात्रा शृंखला सूचकांक
P_{01}	$\frac{\sum P_{1i} q_{0i}}{\sum P_{0i} q_{0i}}$	$\frac{\sum P_{1i} q_{0i}}{\sum P_{0i} q_{0i}} = P_{01}$
P_{02}	$\frac{\sum P_{2i} q_i}{\sum P_{0i} q_i}$	$\frac{\sum P_{2i} q_i}{\sum P_{1i} q_i} \times \frac{\sum P_{1i} q_i}{\sum P_{0i} q_i} = \frac{\sum P_{2i} q_i}{\sum P_{0i} q_i} = P_{02}$
P_{03}	$\frac{\sum P_{3i} q_i}{\sum P_{0i} q_i}$	$\frac{\sum P_{3i} q_i}{\sum P_{2i} q_i} \times \frac{\sum P_{2i} q_i}{\sum P_{1i} q_i}$ $\times \frac{\sum P_{1i} q_i}{\sum P_{0i} q_i} = \frac{\sum P_{3i} q_i}{\sum P_{0i} q_i} = P_{03}$

इसी प्रकार अन्य किसी भी वर्ष के लिए समान भाव प्रयोग करने की स्थिति में स्थिर आधार व शृंखला मूल्य सूचकांक की समानता को सिद्ध कर सकते हैं।

शृंखला आधार सूचकांक, पाये सूत्र के लिए भी ऊपर की भाँति व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

टिप्पणी मारा श्रृंखला सूचकांक के लिए सभी सूत्र, उपर्युक्त सूत्रों में p को q से और q को p से बदल कर ज्ञात किये जा सकते हैं।

स्थिर आधार व श्रृंखला मूल्य सूचकांक के गुण एवं दोष

स्थिर आधार सूचकांक का परिवर्तन सरल है तथा इसका निर्वचन भी स्पष्ट किया जा सकता है किन्तु श्रृंखला सूचकांक की रचना में ऐसा करना सम्भव नहीं है। उपर्युक्त सूत्रों द्वारा स्पष्ट है कि श्रृंखला सूचकांक की रचना में आधार वर्ष में केवल घन्ते के वर्ष तक, केवल घन्ते के वर्ष में वदियों की मात्राओं की छोड़कर सभी म्याम का प्रयोग हो जाता है जबकि स्थिर आधार सूचकांक में दिये हुए वर्ष व आधार वर्ष के बीच के बाल में घान वाले परिवर्तनों में कोई सम्बन्ध नहीं रहता है। मध्य काल में पठित परिवर्तनों को व्यावहारिक दृष्टि से सम्मिलित करना प्रायः आवश्यक प्रतीत होता है।

यदि आधार वर्ष तथा दिये हुए वर्ष में घन्तर अघिन हो तो इन दो वर्षों में द्विवर्षीय वदियों की संख्या बहुत कम हो जाती है अर्थात् R लगभग 1 के समान हो जाता है। इस स्थिति में स्थिर आधार सूचकांक विश्वसनीय नहीं होता है। माराग में यह कह सकते हैं कि P_{02} या इसके बाद के वर्षों के लिए सूचकांक की अपेक्षा P_{01} अधिक परिशुद्ध है। इसी प्रकार P_{03} या P_{0K} ($K > 3$) की अपेक्षा P_{02} अधिक परिशुद्ध सूचकांक है।

श्रृंखला सूचकांक का एक मुख्य दोष यह बताया जाता है कि इसमें सचयी भुटि होती है। इस बात को महत्व नहीं दिया जा सकता है जब तक यह सिद्ध न हो जाये कि स्थिर आधार सूचकांक शुद्ध है। इसका अनुमान, D व R के मान ज्ञात करके, लगाया जा सकता है। यदि D व R के मान स्थिर आधार सूचकांक की अनुद्धता को सूचित करते हों तो ऐसी स्थिति में श्रृंखला सूचकांक, स्थिर आधार सूचकांक से उत्तम है।

उदाहरण 15.5 : सीलोन में 1950 से 1955 तक रेशम के पावन व गेहूँ के घाटे का बटन, भाव एवं मात्रा के अनुसार, निम्न मारणों में दिया गया है :—

वर्ष	पावन		गेहूँ का घाटा	
	प्रति व्यक्ति वार्षिक मात्रा (किग्रा/वर्ष में)	बिरी की दर (१० प्रति किग्रा०)	प्रति व्यक्ति वार्षिक मात्रा (किग्रा/वर्ष में)	बिरी की दर (१० प्रति किग्रा०)
1	2	3	4	5
1950	57.9	0.34	21.8	0.54
1951	50.9	0.25	25.4	0.46
1952	54.2	0.25	28.9	0.46
1953	57.7	0.42	32.5	0.46
1954	66.9	0.55	26.6	0.46
1955	94.1	0.44	23.1	0.46

वर्ष 1950 को आधार मानकर, 1955 के लिए श्रृंखला मूल्य सूचकांक, लसपिरिज सूत्र (157) का प्रयोग करके, निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

$$P_{01} = \frac{57.9 \times 25 + 21.8 \times 46}{57.9 \times 34 + 21.8 \times 54} = \frac{24503}{31458} \\ = .779$$

$$P_{12} = \frac{50.5 \times 25 + 25.4 \times 46}{50.5 \times 25 + 25.4 \times 46} = 1.000$$

इसी प्रकार,

$$P_{23} = \frac{36058}{26844} = 1.343$$

$$P_{34} = \frac{46685}{39184} = 1.19$$

$$P_{45} = \frac{41672}{49031} = 0.850$$

श्रृंखला आधार विधि द्वारा मूल्य सूचकांक सूत्र (1524) का प्रयोग करने पर निम्न है —

$$P_{05} = P_{45} \times P_{34} \times P_{23} \times P_{12} \times P_{01} \times 100 \\ = 105.91$$

टिप्पणी उपर्युक्त उदाहरण में केवल दो पदार्थों को ही लिया गया है। यदि अनेक पदार्थों को लिया गया हो तो उनके लिए भी इसी प्रकार सूचकांक का परिवर्तन किया जा सकता है अथवा हर में सम्मिलित दो पदार्थों पर आधारित न होकर, जो भी पदार्थ हों उन सब के लिए परिवर्तित कर ली जाती है।

सूचकांक रचना में सावधानियाँ

(1) मूल्य या मात्रा सूचकांक की रचना के उद्देश्य का स्पष्ट वर्णन दिया जाना चाहिये क्योंकि इनके आधार पर कई अर्थ निर्णय लिए जाते हैं। यदि राष्ट्रीय नीति (policy), मूल्य या उत्पादन के प्रति सूचकांक पर, निर्भर है तो इनकी रचना में सतर्कता एवं शुद्धि अत्यन्त आवश्यक है।

(2) पदार्थों की सम्मिलित विषय में निर्णय, सूचकांक ज्ञात करने के उद्देश्य के अनुसार सावधानी में करना चाहिये। जैसे यदि निर्वाह-व्यय (cost of living) के हेतु सूचकांक ज्ञात करना है तो केवल उन वस्तुओं को सम्मिलित करना चाहिये जिनका प्रयोग या उपभोग अधिकांश जन समुदाय करता है। इन वस्तुओं के मूल्य सम्बन्धी आँकड़े केवल फुटकर भाव (retail price) पर आधारित होना चाहिये क्योंकि फुटकर भावों में परिवर्तन,

योग भावों की प्रवेशा प्रथिक् घोर जीघ्न होता है। बन्धु के भावों को सने समय विशेष ध्यान देना चाहिये क्योंकि ये बपड़े के गुण (प्रकार) पर आधारित होते हैं। यदि बपड़े के भाव व गुण समानता में बड़ें तो एक प्रकार से भावों में परिवर्तन नहीं कहा जा सकता है। अतः सूचकांक में सम्मिलित किये जाने वाले पदार्थों की सूची बहुत विचार कर बनानी चाहिये।

(3) पदार्थों के मूल्यों को भागित करना अत्यन्त आवश्यक है जिसमें प्रत्येक पदार्थ का सूचकांक पर प्रभाव उनके महत्त्व के अनुसार हो पड़े। यही कारण है कि लगभग सर्वत्र भारों का प्रयोग किया जाता है। अतः व्यवहार में मूल्य सूचकांक ज्ञान करने के लिए बेची गई वस्तुओं की मात्रा को भार के रूप में प्रयोग करते हैं और मात्रा सम्बन्धी सूचकांक की रचना में पदार्थों के मूल्यों को भार के रूप में प्रयोग करते हैं। इनका वर्णन सूत्रों में भार के प्रयोग के साथ स्पष्ट दिया गया है।

(4) निर्धारित पदार्थों के मूल्य तथा उपभोग सम्बन्धी ग्याम का सचय करना एक कठिन कार्य है। फिर भी एक उचित प्रतिदर्श का चयन करते दस व्यक्तियों द्वारा आँकड़े पर्याप्त विश्वसनीय प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार के आँकड़े स्पष्टतया विवेका या उपभोक्ता के द्वारा ज्ञात करना कठिन होने के कारण सरकार प्रायः सूचकांक बोर्ड भाव या उत्पादक द्वारा प्राप्त भावों के आधार पर ज्ञात करती है। ये सूचकांक प्रथिक् शुद्ध होते हैं।

(5) आधार काल का निर्णय करना भी एक कठिन समस्या है। परिभाषा के अनुसार, आधार वर्ष वही होना चाहिये जिसकी तुलना में सूचकांक ज्ञात करना है फिर भी यह ध्यान रखना चाहिये कि आधार वर्ष कोई असाधारण वर्ष न हो जैसे युद्ध के वर्ष या देश में भूकम्प या बाढ़ आदि प्रथिक् आई हो तो ऐसे वर्ष को आधार नहीं मानना चाहिये।

(6) उपर्युक्त बातों को ध्यान में रखते हुए दस अध्याय में दिये गये सूत्रों में से उचित सूत्र का चयन करना होना है। इसके लिए कोई नियम बनाना तो सम्भव प्रतीत होता है। उचित सूत्र का चयन सूचकांक ज्ञान करने के उद्देश्य एवं सर्वथा व्यक्ति के अनुभव और ज्ञान पर निर्भर है।

मुख्य टिप्पणी

यह आवश्यक नहीं है कि काल का अन्तर केवल वर्षों में ही हो। सूचकांक प्रति मास या प्रति सप्ताह मूल्यों या मात्राओं में परिवर्तन के हेतु भी ज्ञात किये जाते हैं। ऐसी स्थिति में काल का मास या सप्ताह व रूप में प्रयोग करना होता है।

अन्त में यह भी कह सकते हैं कि किसी भी परिपूर्ण (perfect) सूचकांक का ज्ञान नहीं किया जा सक्ता है। अतः दिन प्रति दिन अनुसंधान द्वारा नये-नये सूत्रों की उत्पत्ति होनी रहती है और विषय का क्षेत्र विस्तृत होना रहता है।

प्रश्नावली

1. सूचकांक से भाप क्या समझते हैं, स्पष्ट शब्दों में लिखिए। यह भी बताइए कि इसकी उपयोगिता क्या है ?
 2. एक सूचकांक, एक प्रकार का औसत है, इन विचार की तथ्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।
 3. एक सूचकांक के लिए दी गई तीन परीक्षाओं का वर्णन कीजिये और इनकी तुलना भी कीजिये।
 4. किसी सूचकांक के लिए आधार बाल का चयन करते समय किन किन बातों का ध्यान रखना चाहिए।
 5. 'लेसपेरिज सूत्र द्वारा अधिक आकलन और पाने सूत्र द्वारा न्यून आकलन होता है।' इस बयान की पुष्टि कीजिये।
 6. गुणोत्तर त्रास सूचकांक को फिगर का भादशं सूत्र क्यों कहते हैं ? इसके कारण बताइए।
 7. निम्न के लिए सूचकांक का उपयोग बताइए —
(1) व्यापारिक स्थिति के विश्लेषण में, (2) आर्थिक क्रिया के सूचक में, (3) वास्तविक वेतन मान का परिवर्तन करने में।
- (मार्च० ए० एस्० 1964)
8. निम्न भावकों के आधार पर लेसपेरिज, पासे और फिगर के भादशं सूत्र द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिये —

		१९५९	१९६४	१९६५
मात्रा	1959	15	5	10
	1964	12	4	5
मूल्य (६०)	1959	15	20	4
	1964	22	27	7

(बी० काम० मैसूर 1967)

[उत्तर : तीनों सूत्रों द्वारा एक ही उत्तर है]
P₀₁ = 146.6

9. निर्वाह व्यय सम्बन्धी सूचकांक की रचना में निम्न समूह सूचकांक प्राप्त हुए। निर्वाह व्यय सूचकांक द्वारा ज्ञात कीजिये, जब कि
(1) भारत समान्तर माध्य, (2) गुणोत्तर भारत माध्य, का प्रयोग किया गया हो।

	समूह	सूचकांक	वार
1	हाथ	350	5
2	इंधन और बिजली	200	1
3.	कपड़े	240	1
4.	मकान सिरापा	160	1
5.	अन्य	250	2

(बी० काम०, बम्बई, 1968)

[उत्तर . भारत समान्तर माध्य सूचकांक
= 285
भारत गुणोत्तर माध्य सूचकांक
= 275.4]

- 10 निम्न सारणी द्वारा 1960 को आधार मानकर, वर्षों 1961, 1962, 1963, के लिए श्रृंखला आधार विधि द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिये :—

वर्ष	1960	1961	1962	1963
श्रृंखला सूचकांक	100	110	95.5	109.5

(आई० सी० इन्सू० ए० 1969)

[उत्तर : श्रृंखला सूचकांक
1961 = 110, 1962 = 105.05, 1963 = 115.03]

□ □ □

काल अन्तर के साथ विभिन्न परिवर्तन होना स्वाभाविक या प्राकृतिक है। किसी न्यास के विश्लेषण माप अध्याय 4 में दिया जा चुका है। किन्तु इस अध्याय में यह अध्ययन करेंगे कि काल अन्तर के साथ न्यास में किस प्रकार का परिवर्तन हो रहा है। इस प्रकार के अध्ययन अधिकांश अर्थशास्त्र में उत्पादन, उपभोग, व्यापार में बिक्री की स्थिति या मूल्यों में उतार-चढ़ाव आदि के लिए काल अन्तर के अनुमान उपनति (trend) जानने के हेतु किये जाते हैं। इस प्रकार की जानकारी अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि इससे भूत में हुए या वर्तमान में विद्यमान परिवर्तन के साथ साथ भविष्य में होने वाले परिवर्तन का भी अनुमान लगाया जाता है। इस जानकारी का व्यापारी या उत्पादक पूरा-पूरा लाभ उठा सकते हैं। जैसे यदि उत्पादित वस्तुओं की मांग लगातार बढ़ रही है तो उत्पादक अपनी फैक्ट्री की उत्पादन क्षमता बढ़ाने के हेतु साधन जुटा सकते हैं। ये साधन हैं, अधिक धन का इकट्ठा करना, इनके लिए प्रशिक्षित व्यक्तियों का तैयार करना या कच्चे माल का प्रबंध करना इत्यादि। यदि उत्पादित वस्तु की मांग घट रही है तो धन वाली स्थिति के लिए उपाय किये जा सकते हैं अतः काल श्रेणी विश्लेषण अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण विषय है।

काल-श्रेणी की परिभाषा

घटित समय के अनुसार क्रम में व्यवस्थित परिमाणात्मक न्यास का काल श्रेणी कहते हैं।

यह न्यास प्रति दिन, मासिक, मासिक, या वार्षिक आदि अभिलेख पर आधारित होता है। काल श्रेणी पर अनेक कारकों (Factors) का प्रभाव पड़ता है। कुछ प्रभाव नियमित प्रकार के और कुछ प्रभाव अनियमित प्रकार के या अकस्मिक होते हैं। किसी भी न्यास का विभाजित करके प्रभावी कारकों के पृथक्-पृथक् अध्ययन के इन सबके सम्मिलित प्रभाव के विश्लेषण को काल श्रेणी विश्लेषण कहते हैं।

काल-श्रेणी में विद्यमान परिवर्तन का चार प्रमुख वर्गों में विभाजित कर सकते हैं कि इस प्रकार है —

- (1) दीर्घ कालिक उपनति (Secular Trend),
- (2) ऋतुनिष्ठ विचरण (Seasonal variations),
- (3) चक्रीय विचरण (Cyclical variations),
- (4) अनियमित विचरण (Irregular variations)

इन्हीं चार परिवर्तन-वर्गों का वर्णन इस अध्याय में दिया गया है।

(1) दीर्घकालिक उपनति

निरन्तर परिवर्तन जो कि एक लम्बे समय तक होता रहे, दीर्घकालिक परिवर्तन कहा जाता है। यह एक काल-श्रेणी में लम्बे समय तक होने वाली सतत वृद्धि, अपवृद्धि या

निश्चेष्ट स्थिति का सूचक है। काल-श्रेणी विश्लेषण द्वारा या तो दीर्घकालीन उपनति की मात्रा का माप करते हैं या ग्यास से इस प्रभाव का निरसन करते हैं। दीर्घकालीन उपनति एक घात (रेखीय) या नैकघाती (Non-Linear) हो सकती है। रेखीय उपनति का सम्भन्ध सरल है अतः रेखीय उपनति मापने की विधियों का वर्णन पहले दिया गया है। यह ज्ञात है कि किसी भी सरल रेखा का समीकरण

$$Y = a + bX$$

के रूप में दिया जा सकता है। इसी समीकरण का प्रयोग निम्न विधियों में आवश्यकता पड़ने पर किया गया है।

रेखनी या घागे से

यदि ग्राफ पेपर पर आलेखित बिन्दु स्पष्ट उपनति को बताते हों तो हाथ से ही उपनति रेखा को खींच सकते हैं बिन्दु ऐसी स्थिति कम ही होती है। इस कार्य के लिए व्यक्ति अनुभवी होना चाहिये। व्यवहार में पारदर्शक रेखनी की सहायता से उपनति रेखा खींची जाती है जिसकी विधि इस प्रकार है।

एक ग्राफ-पेपर पर बिन्दुओं का आलेख करने इन बिन्दुओं को काल के क्रम में मिला दो। फिर पारदर्शक रेखनी को धीरे-धीरे पेपर पर इतना सरकाओ कि उसके ऊपर का किनारा आलेखित ग्यास को लगभग दो समान भागों में विभाजित कर दे। इस किनारे पर रेखा खींच दो। यही रेखा उपनति रेखा होती है। इस रेखा द्वारा प्रारम्भ, मध्य या अन्त या अन्य काल के लिए मान ज्ञात कर सकते हैं।

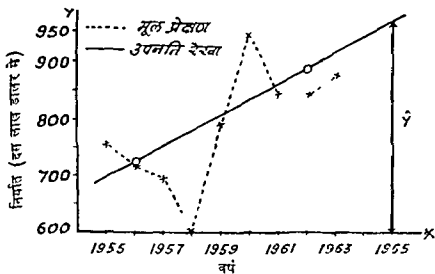
रेखनी के स्थान पर घागा भी प्रयोग कर सकते हैं। क्योंकि इसके दोनों छोर का कोन भी स्पष्ट दिखाई देता रहता है। बिन्दु घागा गुणात्मक ह्रास के कारण ठीक स्थिति में रोकना कठिन है। घन घागे की अपेक्षा रेखनी का प्रयोग करना अधिक उपयुक्त है। इस विधि का मुख्य दोष यह है कि प्रत्येक व्यक्ति अपनी दृष्टि के अनुसार रेखा खींच सकता है और उनसे द्वारा प्राप्त उसी वर्ष के लिए घाबलक का मान भी भिन्न हो सकता है।

उदाहरण 16.1 : मलाया (Malaya) द्वारा दिये गये निर्यात सम्बन्धी घाबलके 1955 से 1963 तक निम्न सारणी में दिये गये हैं :—

वर्ष	1955	1956	1957	1958	
कुल निर्यात (दम ताक, डासरो में)	755	722	697	704	
वर्ष	1959	1960	1961	1962	1963
कुल निर्यात (दम ताक, डासरो में)	792	947	842	840	877

मलाया द्वारा दिये निर्यात के लिए उपनति रेखा, पारदर्शक रेखनी की सहायता से निम्न प्रकार खींच सकते हैं। उपनति रेखा द्वारा वर्ष 1965 के लिए निर्यात की प्रादुर्भाव

भी की गई है। इन बिन्दुओं को ग्राफ पर आलेखित कर, रेखनी द्वारा उपनति रेखा खींच दी जैसा कि चित्र 16-1 में दिखाया गया है। 1965 में आकलित निर्यात $\hat{Y} = 962$ इस तरह ज्ञात



चित्र 16-1 रेखनी द्वारा समजित उपनति रेखा

अर्ध-माध्य विधि

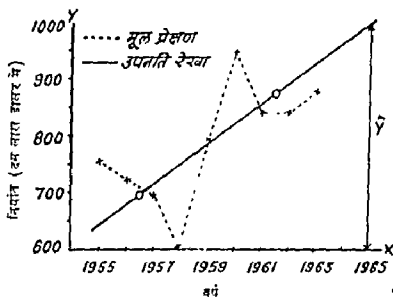
इस विधि के अन्तर्गत न्यास के प्रारम्भ के आधे प्रेरण व अन्त के आधे प्रेरणों के माध्य ज्ञात कर लिए जाते हैं और इन माध्य मानों को प्रारम्भ के आधे वर्षों के मध्य में व अन्त के आधे वर्षों के मध्य में क्रमशः रख दिया जाता है। इन दो बिन्दुओं को ग्राफ पर आलेखित करके मिला देने पर उपनति रेखा ज्ञात हो जाती है। यदि न्यास में उतार व चढ़ाव अधिक न हो तो इस विधि द्वारा पर्याप्त सतीषजनक परिणाम प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 16.2 . अर्ध-माध्य विधि द्वारा उदाहरण 16.1 में दिये गये न्यास के लिए उपनति रेखा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं और इस रेखा द्वारा 1965 के लिए प्रागुक्ति की गई है।

वर्ष	दुग निर्यात (दस लाख डॉलर में)	माध्य मान
1955	755	
1956	722	
1957	697	694.5
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961	842	
1962	840	876.5
1963	877	

इस उदाहरण में वर्षों की संख्या 9 है। अतः बीच के वर्ष 1959 को न प्रारम्भिक प्राथम वर्षों में और न अन्तिम प्राथम वर्षों में सम्मिलित किया गया है। माध्य ही माध्य मानों को 1956 व 1957 और 1961 व 1962 के मध्य में रखता गया है। इन बिन्दुओं को प्राक्षेपित करके मिलाने पर उपनिर्दिष्ट रेखा को चित्र 16.2 में प्रदर्शित किया गया है।

वर्ष 1965 के लिए प्राक्षेपित मान $\hat{Y} = 1000$ हम लागू करते हैं।



चित्र 16-2 प्राथम-माध्य विधि द्वारा समझित उपनिर्दिष्ट रेखा

माध्य विधि

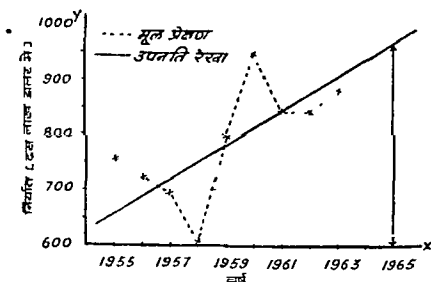
इस विधि में प्रारम्भ तथा अन्त के प्राथम वर्षों के माध्य मान न लें, प्रथम तीन व अन्तिम तीन वर्षों (बालों) के माध्य गृह्य-गृह्य मान कर लिए जाते हैं और इन माध्य मानों के बीच के वर्षों के मध्य में समुदाय क्रमशः रखा दिया जाता है। इस प्रकार दो बिन्दु प्राप्त हो जाते हैं। यदि चाहें तो प्रारम्भ व अन्त के तीन-तीन वर्ष न लेकर, वर्षों की कोई अन्य संख्या भी ले सकते हैं। किन्तु प्रारम्भ व अन्त के वर्षों की संख्या संख्या सेना अधिक सुविधाजनक है क्योंकि इन वर्षों के मध्य का वर्ष सेना गुणम है। इन दो बिन्दुओं को प्राक्षेपित करके मिलाने पर उपनिर्दिष्ट रेखा प्राप्त हो जाती है।

उदाहरण 16.3 . माध्य विधि द्वारा उदाहरण 16.1 में दिये गये के लिए उपनिर्दिष्ट रेखा तथा 1965 के लिए प्राक्षेपित निम्न प्रकार कर सकते हैं :-

वर्ष	कुल निर्यात (दम लाख डालर में)	माध्य मान
1955	755	724.7
1956	722	
1957	697	
1958	604	
1959	792	
1960	947	
1961	942	886.3
1962	840	
1963	877	

वर्ष 1956 व 1962 के तदनुसार मानों को घालेसित करके मिला देने पर प्राप्त उपनति रेखा चित्र (16-3) में दिखाई गई है।

1965 के लिए आकलित मान $\hat{Y} = 933$ दम लाख डालर



चित्र 16-3 माध्य विधि द्वारा समजिन उपनति रेखा

गतिमान माध्य विधि

गतिमान माध्य विधि को जानने से पूर्व गतिमान माध्य की परिभाषा जानना आवश्यक है जो कि इस प्रकार है। किसी चर का गतिमान माध्य, कालो (units of time) की एक निर्धारित संख्या के समान्तर माध्यों की श्रेणी है।

जैसे-जैसे समय बीतता जाता है, निर्धारित कालों की सख्या में से प्रारम्भ के एक काल के मान को छोड़ दिया जाता है और अनुवर्ती (succeeding) काल के मान को इसमें सम्मिलित करके समान्तर माध्य परिकलित कर लिया जाता है। इस प्रकार प्राण क्रमिक समान्तर माध्यों की श्रेणी ही गतिमान माध्य (moving average) कहलाती है।

एक मुख्य समस्या यह है कि कितने कालों को गतिमान माध्य ज्ञात करने के लिये लिया जाये जिससे कि उपनति रेखा लगभग सरल हो। मॅडान्तिक दृष्टि से यह कहा जा सकता है कि कालों की कम से कम संख्या जिस एक साथ लेकर गतिमान माध्य विधि द्वारा सरल रेखा प्राप्त हो, सर्वोत्तम है। इस सख्या की जानने के लिये अल्पकालिक उतार-चढ़ाव (short time fluctuations) का विस्तारपूर्वक अध्ययन करना चाहिये। इन उतार-चढ़ाव का पता प्रायः ग्राफ बनाकर कर लिया जाता है। यह कालों की सख्या प्रायः एक या एक से अधिक अक्षयताय चक्रों के समान होती है। इस प्रकार कालों की सख्या का निर्वाचन करने के पश्चात् गतिमान माध्य विधि निम्न प्रकार है —

इस विधि का प्रयोग करने का उद्देश्य अल्पकालीन उतार-चढ़ाव का निरसन करना है। इस विधि का प्रयोग रेखीय तथा वक्र रेखीय उपनति के समझने के हेतु किया जाता है। इस विधि द्वारा उपनति रेखा ज्ञात करने के लिये निश्चित वर्षों (कालों) की सख्या का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है और इस माध्य मान का इन लिए गये वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख रक्त दिया जाता है। इसके पश्चात् प्रारम्भ के एक वर्ष के मान को छोड़ दिया जाता है और इन वर्षों के अगले वर्ष को सम्मिलित करके फिर इन वर्षों के लिए दिये मानों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है और इन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख इस मान को रक्त दिया जाता है। यही क्रम चलना रहता है जब तक कि श्रेणी का अन्तिम वर्ष (काल) सम्मिलित न हो जाये। वर्षों को मुझ अक्ष पर और इन वर्षों के तदनुसार माध्य मानों को कोटि अक्ष पर लेकर सब बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर आलेखित करने पिला देन पर, समजित उपनति रेखा या वक्र प्राप्त हो जाता है।

टिप्पणी : (वर्षों के अतिरिक्त काल की इकाई कोई अन्य भी हा सकती है)। प्रायः वर्षों की विशद सख्या लेना सुविधाजनक है क्योंकि माध्य का वर्ष स्पष्ट ज्ञात हो जाना है।

गतिमान माध्य विधि के गुण तथा दोष

इस विधि का मुख्य गुण यह है कि इसमें वर्षों के चरम मानों का प्रभाव पर्याप्त कम हो जाता है।

किन्तु इस विधि में अनेक दोष भी हैं जो निम्न प्रकार हैं —

(1) एक मुख्य दोष यह है कि प्रारम्भ व अन्त के कुछ वर्षों के लिए माध्य आलेखित क्षेत्र में सम्मिलित नहीं होते हैं, अतः यह विधि वर्तमान समय के हेतु विश्लेषण या उपनति मानों के बहिर्वेशन (Projections) के लिए उपयुक्त नहीं है।

(2) इसमें अरुण यह है कि अक्षयताय वक्र निश्चित नहीं होता है। अतः एक वक्र में वर्षों की अनेक समान संख्या मानना भी तर्क संगत नहीं है।

(3) यदि एक चक्र में अधिक वर्ष सम्मिलित हों तो प्रारम्भ व अन्त के अनेक वर्षों के लिए बिन्दु सम्मिलित नहीं होते हैं।

(4) यदि श्रेणी में उतार-चढ़ाव अनियमित हों तो इस विधि द्वारा चत्रीय विचरण का भी निरसन नहीं होता है।

यदि न्यास को देखने व अन्य सूचना के आधार पर उपर्युक्त दोष प्रतीत नहीं होते हों तो गतिमान माध्य विधि द्वारा एक उत्तम उपनति रेखा या वक्र प्राप्त होता है।

यदि गतिमान माध्य विधि सम वर्षों के माध्य पर आधारित हो तो इस माध्य को किस वर्ष के सम्मुख रखा जाये यह समस्या उत्पन्न होती है क्योंकि यह गतिमान माध्य एक मध्य वर्ष के सम्मुख न आकर दो वर्षों के मध्य में आता है। अतः इन माध्यों को दो वर्षों के बीच के स्थान पर रख दिया जाता है। फिर इन माध्यों के जोड़े बनाकर, उनका माध्य परिकल्पित करते हैं। यह माध्य दिये गये वर्षों में से एक के सम्मुख आ जाता है। इस प्रकार प्राप्त वर्ष तथा गतिमान माध्य के अनुसार बिन्दुओं को अलेखित करके उपनति रेखा ज्ञात हो जाती है। यहाँ इस विधि के प्रयोग के लिए दो उदाहरणों, एक में वर्षों की सख्या विषम लेकर और दूसरे में वर्षों की सख्या सम लेकर, को दिया गया है।—

उदाहरण 16.4 1951 से 1961 तक उत्तर प्रदेश में हुई चावल की माध्य उपज (क्वीटल प्रति हेक्टर) निम्न सारणी में दी गई है। 3 वर्ष के गतिमान माध्य विधि द्वारा उपनति निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

वर्ष	चावल की माध्य उपज (क्वीटल प्रति हेक्टर)	तीन वर्षीय गतिमान माध्य
1951	5.43	—
1952	4.51	5.14
1953	5.47	5.54
1954	6.65	6.05
1955	6.04	6.70
1956	7.40	6.61
1957	6.40	6.73
1958	6.38	6.91
1959	7.96	6.90
1960	6.33	7.49
1961	8.18	—

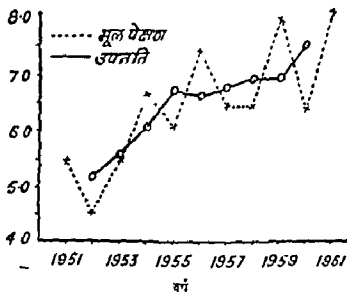
तीन वर्षों के गतिमान माध्यों को निम्न प्रकार परिवर्तित करके तीन वर्षों के मध्य वर्ष के सम्मुख रख दिया गया है।

$$\text{पहला गतिमान माध्य} = \frac{1}{3} (543 + 451 + 547) = 514$$

माध्य 514 को वर्ष 1952 के सम्मुख रखा गया है।

$$\begin{aligned} \text{दूसरा गतिमान माध्य} &= \frac{1}{3} (451 + 547 + 665) \\ &= 554 \end{aligned}$$

माध्य 554 को वर्ष 1953 के सम्मुख रख दिया। इसी प्रकार अन्य गतिमान माध्यों को परिवर्तित करके तदनुसार मध्य वर्षों के सम्मुख रख दिया गया है। वर्षों को मूलाक्षर पर और गतिमान माध्यों को कोष्ठिक अक्षर पर लेकर, बिन्दुओं को घातेमिल करके बिलग देने पर उपरलि ज्ञात हो जाती है जैसा कि चित्र (16-4) में दिखाया गया है।



चित्र 16-4 गतिमान माध्य विधि द्वारा प्राप्त उपलब्धि रेखा का निर्माण

उदाहरण 16.5 रहमानपुरा जिला सखनऊ द्वारा प्रस्तुत अभिलेख के अनुसार 1951 में 1960 तक प्रायेण वर्ष में वर्षों होने वाले दिना की गणना निम्न प्रकार है —

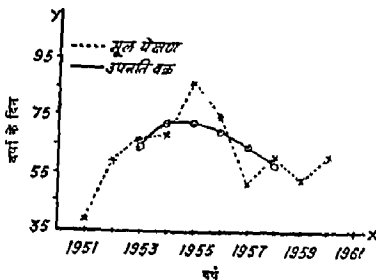
वर्ष	1951	1952	1953	1954	1955
कुल वर्षों के दिन	39	59	67	68	87
वर्ष	1956	1957	1958	1959	1960
कुल वर्षों के दिन	75	51	61	53	61

इस न्यास के लिए उपरति रेखा या वक्र का गतिमान माध्य विधि द्वारा समजन इस प्रकार कर सकते हैं।

1955 में वर्षों के दिनों की संख्या अत्यधिक बड़ जाती है। अतः प्रथम चार वर्षों को लेकर गतिमान माध्य ज्ञात किये गये हैं और इनको दूसरे व तीसरे वर्ष के मध्य के सम्मुख रखा गया है।

वर्ष	वर्षों के दिन	चार वर्षों के गतिमान माध्य	युगल माध्यों के माध्य (रेखित माध्य)
1951	39		
1952	59	58.25	
1953	67	70.25	64.25
1954	68	74.25	72.25
1955	87	70.25	72.25
1956	75	68.50	69.38
1957	51	60.00	64.25
1958	61	56.50	58.25
1959	53		
1960	61		

अन्तिम स्तम्भ में दिये माध्यों व तदनुसार वर्षों को आनेवित करके उपरति आरेख ज्ञात हो जाता है जैसा कि चित्र (16-5) में दिया गया है।



चित्र 16-5 पतिमान माध्य द्वारा समजित वक्र का प्रदर्शन

बीध कासिक उपनति का न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा समंजन

उपर्युक्त की हुई सभी विधियों द्वारा पूर्णतया परिशुद्ध उपनति रेखा या वक्र का समंजन नहीं होता है। इसका कारण यह है कि प्रत्येक विधि में कुछ दोष विद्यमान हैं। अतः गणितीय सिद्धान्त पर आधारित न्यूनतम वर्ग-विधि सर्वोत्तम है। इस विधि का प्रयोग करने से पूर्व रेखा या वक्र के रूप का निर्णय तो अनुसंधानकर्ता को ही करना होता है। वक्र या रेखा का रूप निश्चिन करने के पश्चात् रेखा या वक्र समीकरण का समंजन न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा अति उत्तम है। इस विधि का सैद्धान्तिक वर्णन समाख्यण नामक अध्याय 11 में दिया गया है। यहाँ केवल समंजन करने की निया विधि का विवरण दिया गया है जो कि समाख्यण में कुछ भिन्न है। उपनति रेखा के समंजन को इस प्रकार समझ सकते हैं।

प्राप्त म्याम का आलेखन करने के पश्चात् प्रत्येक रेखाओं का समंजन निया या सकता है। इन सब में सर्वोत्तम रेखा बही मानी जाती है जिसकी समस्त आन्वेषित बिन्दुओं से दूरी निया अल्प रेखा की अपेक्षा कम हो। जो बिन्दु इस रेखा पर स्थित नहीं हैं उनमें से कुछ रेखा के ऊपर और कुछ नीचे की ओर स्थित होते हैं। इन सांख्यिक दूरियों को अन्त-त्मक या अन्तःस्थ दूरियाँ भी माला जाता है। अतः न्यूनतम वर्ग विधि से वह रेखा समीकरण जान करने हैं जिसमें इन सांख्यिक दूरियों के वर्गों का योग न्यूनतम हो जाये।

माना कि आर्जित उपनति रेखा,

$$\hat{Y} = a + bX \quad \dots (161)$$

है। उपनति रेखा समंजन में सर्वेव नाम (समय) को मुका असा पर धोर जान के तदनुसार मानो जैसे किसी उदाहरित पदार्थ की मात्रा, उपयोग पदार्थ की मात्रा, प्रतिबन्ध

प्रायात या निर्यात या प्रतिवर्ष बेरोजगारों की संख्या आदि, को कोटि घट्ट पर लिया जाता है और इन्हें क्रमशः चर X व Y द्वारा निरूपित करते हैं। \hat{Y} चर Y का प्राकृतिक मान है। प्राकृतिक स्तर a व b के मान, सूत्र (13.8) और (13.9) के अनुसार निम्न हैं—

$$a = (\bar{Y} - b \bar{X})$$

माना कि n वालों के लिए न्याय को सृष्टीत किया गया है अर्थात् $i = 1, 2, 3, \dots, n$ और,

$$b = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}$$

काल श्रेणी में उपरान्त रेखा के समतल की विधि इन प्रकार है। काल श्रेणी में दिये वर्षों के मध्य वर्ष को शून्य और इसके पूर्व के वर्षों को ऋणात्मक मान और बाद के वर्षों को धनात्मक मान, कालान्तर के अनुसार दे दिये जाते हैं। इस प्रकार X के मानों का योग शून्य रहता है। अर्थात्,

$$\sum_i X_i = 0$$

इस स्थिति में,

$$a = \bar{Y}; \quad b = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \quad \dots (16.2)$$

यदि वर्षों की संख्या n विषम हो तो मध्य वर्ष स्पष्टतः उपलब्ध हो जाता है और उसे शून्य मानकर अन्य वर्षों के लिए X के मान दिया जाना सुगम है, किन्तु n सम होने पर कोई एक काल (वर्ष) मध्य काल नहीं होता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए काल के आधे काल को चर X के 0.5 में मान लिया जाता है जैसे काल-अन्तर एक वर्ष है तो छह महीने के समय का X मान लिया जाता है और मध्य के दो कालों (वर्षों) में म पहले वाले काल को -1 और अगले काल को $+1$ मान लिया जाता है। इन प्रकार प्रारम्भ की ओर X के मान $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ और अन्त की ओर $3, 2, 1, 0, 1, 2, 3$ दे दिये जाते हैं।

n का मान सम होने की स्थिति में यदि चाहें तो बीच के काल (वर्षों) में से पहले काल को X का मान -0.5 और अगले काल को $+0.5$ दे सकते हैं अतः प्रारम्भ काल की ओर X के मान $-1.5, -2.5, -3.5$ और अन्त की ओर $1.5, 2.5, 3.5$ मान दिये जाते हैं। इन मानों का प्रयोग करके सूत्र (16.2) की सहायता से a व b के परिष्कृत मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। a व b के मान का समीकरण $\hat{Y} = a + bX$ में

प्रतिस्थापन करने समझित उपनति रेखा ज्ञान हो जाती है। इस रेखा द्वारा X के किसी मान के लिए Y का प्राक्कित मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 16.6 मनेनिया घरेलू बचत द्वारा प्राप्त धन राशि 1964 में 1970 तक के वर्षों के लिए निम्न प्रकार है—

वर्ष	घरेलू बचत (रुप लाख हजार में)
1964	428
1965	527
1966	554
1967	577
1968	598
1969	625
1970	654

घरेलू बचत के लिए उपनति रेखा $\hat{Y} = a + bX$ का न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा समझन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

यहाँ वर्षों की संख्या $n=7$ है जो कि विषय है। प्रथम मध्य का वर्ष 1967 है। दो द्वि-विधि के अनुसार X व Y के मान निम्न हैं जिनका प्रयोग करते a व b के मानों का परिवर्तन किया गया है।

वर्ष	X	Y	X ²	XY	\hat{Y}
1964	-3	428	9	-1284	467.785
1965	-2	527	4	-1054	500.570
1966	-1	554	1	-554	533.355
1967	0	577	0	000	566.140
1968	1	598	1	598	598.925
1969	2	625	4	1250	631.710
1970	3	654	9	1962	664.495
योग	0	3963	28	918	

$$a = \bar{Y} = \frac{3963}{7} = 566.14$$

$$b = \frac{918}{28} = 32.785$$

घत. उपनति रेखा समीकरण है,

$$\hat{Y} = 566.14 + 32.785 X$$

X के विभिन्न मान रखने पर Y के आकलित मान ज्ञात हो जाते हैं जिनको कि ऊपर सारणी के अन्तिम स्तम्भ में ही प्रदर्शित कर दिया गया है। जैसे,

जब $X = -3, \hat{Y} = 467.785$

यदि चाहें तो वर्ष 1973 के लिए आकलित बचत राशि इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

इस स्थिति में $X = 6$ और $\hat{Y} = 762.850$

अर्थात् वर्ष 1973 में 762.850 मिलियन डॉलर बचत की आशा है।

उदाहरण 16.7 पंजाब की फैक्ट्रियों के प्रतिदिन औसत श्रमिकों की संख्या सन् 1962 से 1969 तक निम्न थी—

वर्ष	1962	1963	1964	1965
प्रति दिन औसत श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति)	145	152	168	177
वर्ष	1966	1967	1968	1969
प्रति दिन औसत श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति)	104	107	105	107

फैक्ट्रियों में श्रमिकों की रोजगार के प्रति उपनति रेखा का न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा समजन निम्न प्रकार कर सकते हैं—

विधि 1 : यहाँ वर्षों की संख्या घाट है जोकि हम है सन वर्ष 1965 के लिए X का मान -1 और 1966 के लिए X का मान +1 मान लिया जैसाकि विधि के वर्णन में दिया गया है। अन्य वर्षों के लिए X के मान तथा परिवर्तन के लिए अन्य संख्याएँ निम्न सारणी में दी गई हैं—

वर्ष	वर्ष X	श्रमिकों की संख्या (हजार व्यक्ति) (Y)	X ²	XY	\hat{Y}
1962	-7	145	49	-1015	164.667
1963	-5	152	25	-760	155.655
1964	-3	168	9	-504	146.643
1965	-1	177	1	-177	137.631
1966	1	104	1	104	128.619
1967	3	107	9	321	119.607
1968	5	105	25	525	110.595
1969	7	107	49	749	101.583
योग	0	1065	168	-757	

$$a = \bar{Y} = \frac{1065}{8} = 133.125$$

$$b = -\frac{757}{168} = -4.506$$

घन उपरति रेखा,

$$\hat{Y} = 133.125 - 4.506 X$$

है। X को विभिन्न मान देने पर Y के घातवित्त मान प्राप्त हो जाते हैं। X के दिय गये मानों के तदनुसार Y के घातवित्त मान ऊपर मासपी व घन्तिम स्तम्भ में दिय गये हैं।

बिधि 2 : वर्ष 1965 के लिए X का मान -0.5 और 1966 को +0.5 रूप में और अन्य वर्षों को भी इसी प्रकार मान दे दें तो उपरति रेखा का समतल निम्न मासपी बनावट सुगमता से कर सकते हैं—

वर्ष	वर्ष X	घन्तिम की संख्या (द्वारा घन्तिम) (Y)	X ²	XY
1962	-3.5	145	12.25	-507.5
1963	-2.5	152	6.25	-380.0
1964	-1.5	168	2.25	-252.0
1965	-0.5	177	0.25	-88.5
1966	0.5	104	0.25	52.0
1967	1.5	107	2.25	160.5
1968	2.5	105	6.25	262.5
1969	3.5	107	12.25	374.5
योग		1065	42.00	-378.5

$$a = \frac{1065}{8} = 133.125$$

$$b = \frac{-378.5}{42.00}$$

$$= -9.012$$

अतः उपनति रेखा,

$$\hat{Y} = 133.125 - 9.012 X$$

है। यह रेखा विधि 1 द्वारा ज्ञात की गई रेखा के तुल्य है क्योंकि यह X के मान पिछले मानों के भाघे और X का गुणांक 'b' पिछले गुणांक का दुगुना है।

ऋतुनिष्ठ विचरण

दीर्घकालिक उपनति द्वारा केवल एक काल में परिवर्तन के विषय में ज्ञान होता है। बहुधा एक काल एक वर्ष ही लिया जाता है। अतः अधिकतर वर्षों एक काल को एक वर्ष मानकर ही दिया गया है। व्यवहार में यह देखा गया है कि काल खेती के माप जैसे वस्तुओं की बित्री, उनके मूल्य, उपभोग की मात्रा उत्पादन आदि के लिए मान वर्ष के किन्हीं महीनों में, तिमाही या वर्ष के अन्य किसी भाग में अधिक या कम होते हैं। अतः यह जानकारी व्यापारी को लाभप्रद है कि प्रति मान या तिमाही उनका उत्पादन या बित्री, वर्ष के औसत मामूय बित्री या उत्पादन से कितनी अधिक या कम है, अतः ऋतुनिष्ठ विचरण एक वह लक्षण माप है जो कि न्यान का, वर्ष के बारह महीनों में संचलन प्रदर्शित करता है। ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने का माध्यम सिद्धान्त यह है कि काल खेती से दीर्घकालिक प्रभावों का निरसन कर दें और जो शेष विचरण होता है वह ऋतुनिष्ठ विचरण है अर्थात् प्रति मास मानों में जब दीर्घउपनति तथा चक्रीय विचरण के प्रभावों का निरसन कर दें तो ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात हो जाता है। ऋतुनिष्ठ विचरण जानने का लाभ यह है कि ऋतुनिष्ठ परिवर्तनों को व्यापार में मूल या महत्वपूर्ण घाटिक परिवर्तन न समझ लिया जाये। माप ही इनके ज्ञान के अनुसार वस्तुओं का भण्डार करना, पूंजी की व्यवस्था तथा वस्तुओं की मरम्मत के अनुसार उचित मूल्य पर बेचने आदि का प्रबन्ध सुचारू रूप से किया जा सकता है।

परिभाषा

ऋतुनिष्ठ सूचकांक, वह कैमिक प्रतिमास माप है जिनका माध्य 100 है और जो वर्ष के प्रतिमास (माप्ताहिन, तिमाही या छमाही) के मापेक्ष स्तर को निरूपित करता है।

न्यास का समायोजन

ऊपर वर्षों में यह कहा गया है कि ऋतुनिष्ठ विचरण अधिकतर प्रति मास के आधार पर ज्ञात किये जाते हैं। किन्तु हम यह जानते हैं कि वर्ष के प्रत्येक मास में दिनों की संख्या समान नहीं होती है, कुछ मास 30 दिनों के, कुछ 31 दिनों के और फरवरी 28 दिन का होता है। अतः यह ध्यान रखना आवश्यक हो जाता है कि प्रति मास प्राप्त प्रेक्षणों पर मास के दिनों की संख्या का प्रभाव पड़ता है या नहीं। जैसे बैंक में जमा मासिक धन पर मास में दिनों की संख्या या अन्य छुट्टियों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। अतः ऐसे न्यास के समायोजन की आवश्यकता नहीं है। किन्तु यदि घांसे किसी वस्तु के उत्पादन, उपभोग आदि के हेतु, लिये गये हैं अर्थात् मामूय मान, दिनों के मानों का

योग है तो ऐसी स्थिति में यह उचित है कि प्रत्येक मानिक मान को 30 दिन के लिए परिवर्तित कर दिया जाये। किसी सम्बन्धी न्यास में शुद्धि की जाय या नही, यह कहना कठिन है। क्योंकि यह वस्तु जिसके लिए घौकटे लिये गये हैं उस वस्तु के प्रकार, महत्व या प्रावण्यवना पर निर्भर है।

ऋस्तुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने की विधियाँ

(1) समान्तर माध्य विधि

इस विधि का प्रयोग उम न्यास की स्थिति में करते हैं जिसमें कि उपनति या चत्रीय विचरण न हो। इसमें प्रत्येक वर्षों के लिए श्रेणी के घौकटों को महीनों के अनुसार सारणीबद्ध करके, प्रत्येक मास का माध्य मान ज्ञात कर लेते हैं, इन सब माध्यों का माध्य अर्थात् समस्त माध्य (over all mean) ज्ञात कर लिया जाता है। प्रत्येक माह के माध्य का समस्त माध्य में प्रतिशत अनुपात ज्ञात करते हैं। यही प्रतिशत ऋस्तुनिष्ठ सूचकांक होना है, व्यवहार में अनुपात का पूर्णांकन करके दशमसहस्र हटा देने हैं किन्तु यह ध्यान रखते हैं कि इनका माध्य 100 रहे।

इस विधि का प्रयोग मगधम नहीं किया जाता है क्योंकि ऐसी घादरुं परिस्थितिमाँ जो कि न्यास उपनति या चत्रीय विचरण में मुक्त हो, वास्तव में मिलना कठिन है। इन स्थितियों में न्यास से उपनति या चत्रीय, प्रभाव को दूर करने ही ऋस्तुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करते हैं।

(2) उपनति-निरसन विधि

यदि न्यास में दीर्घकालिक उपनति विद्यमान हो तो माध्य विधि द्वारा परिणाम शुद्ध नहीं होते हैं अतः न्यास में उपनति का निरसन करना आवश्यक है। उपनति का निरसन करने के पश्चात् उपलब्ध घौकटा से ऋस्तुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करते हैं।

यदि न्यास को देखकर स्पष्ट हो कि जनवरी से दिसम्बर तक मूल्य या उत्पादन आदि के प्रति मास निरन्तर घट या बढ़ रहे हैं तो उपनति के लिए समययोजन निम्न प्रकार करते हैं—

उपनति के लिए दी हुई विधियों में से किसी एक के द्वारा दीर्घकालिक उपनति देखा जाभीकरण ज्ञात कर लेते हैं। सर X का गुणांक प्रति वर्ष होने वाले परिवर्तन का सूचक है। इस सूचकांक को प्रतिवर्ष होने पर 12 से (या ऋस्तुबाल के अनुसार सख्या से) भाग करके प्रति मास (प्रति ऋस्तुबाल) गुणांक ज्ञात कर लेते हैं।

यदि ऋस्तुनिष्ठ विचरण अर्धमास काल के आधार पर ज्ञात करना हो तो एक मास के लिए प्राप्त गुणांक का आधा करके अर्धमास के लिए X का गुणांक ज्ञात हो जाता है। वर्ष में महीनों की संख्या 12 है जो कि सम है अतः जून मास के प्रारम्भ से अर्धमास अन्तराल -1 है और मई के प्रारम्भ तक -3, अर्धमास -5, मार्च -7, फरवरी -9, जनवरी -11, अर्धमास अन्तराल दूरी पर है। इसी प्रकार 15 जुलाई से दिसम्बर के अन्त तक अर्धमास अन्तराल दूरियाँ, 1, 3, 5, 7, 9, 11 है। माना कि जनवरी से दिसम्बर

तक के माध्य परिमाण आरोही क्रम में है तो अर्धमास गुणांक को जनवरी को और अर्धमास अन्तरास दूरी में गुणा करके जोड़ लेने है और दिसम्बर को और अर्धमास मानो में से नदनुसार मायाएँ क्रमशः घटा देने है। यदि माध्यों का क्रम घटतेही जानी जोड़ने व घटाने की क्रिया उलट जाती है। इन प्रकार प्राप्त सशोधित माध्य मानों के लिए नमान्तर माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त कर सकते हैं।

टिप्पणी - इन विधि का उपयोग बहुत कम हो पाता है क्योंकि जनवरी में दिसम्बर तक निरन्तर वृद्धि या कमी व्यवहार में न के नमान पाएँ जाती है। यदि किसी न्यास के लिए दिया हुआ प्रतिबन्ध मध्य प्रतीत हो ना तो इन विधि का प्रयोग अक्षय करना चाहिए।

(3) उपनति से अनुपात विधि

इन विधि के अन्तर्गत वर्ष श्रेणी के प्रत्येक माह के मान का उपनति रेखा द्वारा प्राप्त उस ही वर्ष के माह के लिए कोटि मान से प्रतिमान अनुपात प्राप्त करत है। इन अनुपातों को प्रति माह व वर्ष के अनुसार मारणीबद्ध करके प्रत्येक माह का वर्ष श्रेणी के मानों का माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। इन माध्यों के माध्य मान ऋतुनिष्ठ सूचकांक अर्धशोधित करते हैं।

इस विधि द्वारा केवल उपनति प्रभाव ही दूर होत है और माध्य लेन पर अनिश्चित प्रभाव दूर हो जाते हैं। किन्तु चर्रीय प्रभाव पूर्णतया दूर नहीं होते हैं। इन विधि का प्रयोग केवल उन श्रेणी के लिए अधिक उपयुक्त है कि जिनमें चर्रीय व अनिश्चित प्रभाव न हो और उपनति का परिशुद्ध के साथ परिकल्पित किया जाना सम्भव हो। यदि काल श्रेणी में यह गुण विद्यमान न हो तो किसी अन्य विधि को अपनाना चाहिए।

(4) गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक

यह विधि अन्य विधियों की अपेक्षा उत्तम है और इसका सबसे अधिक प्रयोग होता है। ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करने की नई विधि निम्न प्रकार है—

यदि विभिन्न क्रमिक वर्षों के लिए मानिक न्यास दिया गया है तो श्रेणी के पहले वर्ष के बारह महीनों का माध्य ज्ञात करते हैं। इन माध्यों को जन व जुलाई के बीच के न्यास के सम्मुख रख देते हैं। फिर इन वर्ष के प्रथम मान जनवरी के मान को छोड़ देते हैं और अगले वर्ष के प्रथम मास के मान को जोड़कर 12 महीनों का माध्य ज्ञात करके जुलाई व अगस्त के मध्य न्यास के सम्मुख रख देते हैं। यही क्रम चलता रहता है जब तक कि वर्ष श्रेणी के सब मान सम्मिलित न हो जायँ फिर इन माध्यों से दो माध्य लेकर, गतिमान माध्य ज्ञात कर लिए जाते हैं। सबसे पहले माध्य को जुलाई के सम्मुख रख दिया जाता है और इसके पश्चात् के माध्य अगस्त, सितम्बर, दिसम्बर आदि के सम्मुख रख दिये जाते हैं।

फिर प्रत्येक मास के मान का उनके सम्मुख गतिमान माध्य से प्रतिशत अनुपात ज्ञात करके इस मान के सम्मुख रख दिया जाता है। प्रत्येक मान के लिए प्रतिशत अनुपात की

माध्यिका ज्ञान करली जाती है। इन माध्यिकाओं का माध्य ज्ञात करने, प्रत्येक मास की माध्यिका का दृग माध्य में भाग देकर समायोजित माध्यिका का परिचयन कर दिया जाता है। यह ध्यान रखना होता है कि इनका माध्य 100 है।

उपयुक्त विधि साधारणतः प्रयोग में लाई जाती है किन्तु प्रत्येक मास के प्रतिगत अनुपातों की माध्यिका ज्ञात करना अधिक बर्बर नहीं है। कुछ व्यक्ति माध्यिका के स्थान पर माध्य का भी प्रयोग करते हैं। इसके अतिरिक्त यह भी आवश्यक नहीं है कि मई के 12 महीने का गतिमान माध्य ज्ञात किया जाये। यदि व्यापक द्वारा एका प्रतीत होता है कि यह मात्र 6 महीने 3 महीने या अधिक विद्यालय में पूरा हो जाता है तो इन्हीं महीनों को तार गतिमान माध्य ज्ञात करना चाहिये। इस गतिमान माध्य का इस नाम का माध्य के मास का सम्मुख रखना होता है।

इस विधि का लाभ यह है कि 12 प्रतिगत महीनों का गतिमान माध्य मन में स्वीकृत तथा उपाय प्रभाव दूर हो जाता है या यह यह कि देशीय तथा अन्तराष्ट्रीय उपनिधि का निरसन हो जाता है। इसके अन्तर्गत प्रतिगत अनुपातों का गतिमान वर्षों के प्रत्येक मास के लिए माध्य या माध्यिका ज्ञान करने पर अनियमित प्रभाव भी दूर हो जाते हैं। इस प्रकार का सूचकांक प्राप्त होता है वह बच्चों अनुनिष्ठ सूचकांक ही प्रदर्शित करता है।

इन विधि में अथवा विधियों की उपयोग अधिक परिकल्पना करना होता है। किन्तु ऊपर दिये गुणों के कारण इसका प्रयोग करना उपयुक्त है।

उदाहरण 16.8 जयपुर में 1958-1961 तक के सूचकांक कुम्हार भाव प्रति माह गणना किया गया अथवा दृग माध्य के लिए गतिमान माध्य विधि द्वारा अनुनिष्ठ सूचकांक निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। इस उदाहरण में दिये गये भाव तथा परिचयित गतिमान माध्य एवं अनुपात एक ही सारणी में दिये गये हैं।

जयपुर में सूचकांक के कुम्हार भाव (दृग प्रति मन)

वर्ष/मास	भाव	12 महीने का गतिमान माध्य	वर्ष का माध्य	गतिमान माध्य के प्रतिगत अनुपात
1	2	3	4	5
1958				
जनवरी	16 00			
फरवरी	15 00			
मार्च	15 00			
अप्रैल	15 00			
मई	15 25			
जून	16 50			

1	2	3	4	5
		18 04		
जुलाई	17 00		18.11	93 87
		18.18		
अगस्त	19 25		18 42	104.50
		18 65		
सितम्बर	21.46		18 80	114.15
		18.95		
अक्टूबर	21.25		19 08	111.37
		19.21		
नवम्बर	24 75		19.24	128.63
		19.37		
दिसम्बर	20 00		19 50	102.56
1959				
		19.62		
जनवरी	17.60		19.66	89.52
		19 69		
फरवरी	20.80		19.58	106.23
		19.48		
मार्च	18 50		19 38	95.46
		19.29		
अप्रैल	17 50		19.56	89 47
		18.82		
मई	18.37		18.78	97 82
		18 73		
जून	18 50		18 83	98.25
		18 93		
जुलाई	20 00		18 89	105 88
		18.86		
अगस्त	20 00		18 94	105 60

1	2	3	4	5
		19 03		
दिसम्बर	19 00		19 05	99 74
		19 07		
अक्टूबर	19 00		18 98	100 10
		18 88		
नवम्बर	19 00		18 84	100 85
		18 79		
दिसम्बर	19 00		18 70	101 60
1960				
		18 62		
जानवरी	20 00		18 54	107 87
		18 46		
फरवरी	20 00		18 38	108 81
		18 29		
मार्च	20 50		18 24	112 39
		18 18		
अप्रैल	18 00		18 12	99 34
		18 05		
मई	18 00		17 97	89 04
		17 89		
जून	17 50		17 89	97 82
		17 89		
जुलाई	18 00		17 89	100 61
		17 89		
अगस्त	18 00		17 82	101 01
		17 75		
दिसम्बर	17 00		17 66	96 26
		17 58		

1	2	3	4	5
मनरूबर	17 60		17 68	99 55
		17 78		
गवम्बर	17 50		17 84	98 09
		17 90		
दिसम्बर	17 06		17 90	95 31
1961				
		17 89		
जनवरी	20 00		17 86	111-98
		17 83		
फरवरी	20 00		17 79	112 42
		17 75		
मार्च	18 81		17 68	106 39
		17 61		
अप्रैल	16 00		17 55	91 17
		17 49		
मई	18 37		17 53	104 79
		17 57		
जून	19 00			
जुलाई	17 88			
अगस्त	17 25			
सितम्बर	16 00			
अक्टूबर	16 00			
नवम्बर	16 00			
दिसम्बर	18 00			

उपर्युक्त सारणी में 12 महीनों का माध्य जून व जुलाई माह के बीच स्थित किया गया है। फिर पिछले वर्ष व प्रारम्भ से एक मान घटाकर और अगले वर्ष के प्रारम्भ का एक मान जोड़कर गणिमान माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। यही क्रम अन्त तक चलता रहता है।

गतिमान माध्य ज्ञान करने तथा वदित माध्य ज्ञान करने का विधि वही है जो उदाहरण (165) में दा गई है। भावों के गतिमान माध्य व प्रतिष्ठत अनुपात प्रगने स्तम्भ में स्थित गये हैं। इन गतिमान माध्य व अनुपात की सहायता से अनुनिष्ठ सूचकांक ज्ञान कर सकते हैं। यहाँ इन वर्षों का ज्ञान किया जा सकता जिनके लिए सब मराना व अनुपात उपलब्ध नहीं है।

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
1959	89.52	106.23	95.40	89.47	97.82	98.25
1960	107.87	108.81	112.39	99.34	89.04	97.82
योग	197.39	215.04	207.85	188.81	186.86	196.07
माध्य	98.70	107.52	103.92	94.45	93.43	98.03
अनुनिष्ठ सूचकांक	98.84	107.67	104.06	94.58	93.56	98.16

वर्ष	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
1959	105.84	105.00	92.74	100.10	100.85	101.60
1960	100.61	101.01	96.26	99.55	98.09	95.31
योग	206.49	206.61	196.00	199.65	198.94	196.91
माध्य	103.24	103.30	98.00	99.82	99.47	98.46
अनुनिष्ठ सूचकांक	103.18	103.44	98.15	99.97	99.61	98.56

माध्य का योग = 1198.34

इन माध्यों का योग 1200 मान कर लिए प्रत्येक माध्य का $\frac{1200.00}{1198.34} = 1.00138$

का गुणा कर लिया जाता है। इस प्रकार का समायाजित माध्य प्राप्त होता है अनुनिष्ठ सूचकांक के मान है।

टिप्पणी यहाँ उदाहरण में केवल बार वर्ष का ग्यास लिया गया है वास्तव में अधिक वर्षों को सम्मिलित करके अनुनिष्ठ सूचकांक ज्ञान करना चाहिये। यहाँ यह उदाहरण केवल परिवर्तन विधि को स्पष्ट करने के उद्देश्य में लिया गया है।

श्रुत्वलिक सापेक्ष विधि

इस विधि के अनुपात काल अणु प्रम व प्रत्येक माह के मान का विद्यत माह के प्रतिगत के रूप में लिया है। इस प्रकार एक माह के मान का विद्यत माह के प्रतिगत के रूप में परिवर्तित करने से उत्पत्ति का निरासन करने के लिए प्रत्येक में परिवर्तन नहीं करना होता है। अतः इसका निरासन स्वयं ही हो जाता है और अन्त में अनुपात

हो जाते हैं। फिर प्रत्येक मास के लिए श्रेणी में माध्य लिया जाता है जिससे कि अनियमित प्रभाव भी लगभग दूर हो जाते हैं। इस विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक का परिकल्पन निम्न प्रकार कर सकते हैं। इस विधि के चरणों परिकल्पन को उदाहरण (16.9) की सहायता से स्पष्ट किया गया है और पूर्ण हल इस विधि के अन्त में दिया गया है।

उदाहरण 16.9 राजस्थान प्रांत में घरेलू बिजली का उपभोग 1962 से 1964 तक प्रति माह दिया गया है। बिजली के उपभोग के लिए श्रृंखलिक सापेक्ष विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं।

बिजली का उपभोग (हजार KWH)

वर्ष/माह	उपभोग	प्रतिशत श्रृंखलिक सापेक्ष
1962		
जनवरी	1640	
फरवरी	1605	98
मार्च	1681	105
अप्रैल	1741	104
मई	1764	101
जून	1777	101
जुलाई	1781	100
अगस्त	1766	99
सितम्बर	1504	85
अक्टूबर	1523	101
नवम्बर	1574	103
दिसम्बर	1543	98
1963		
जनवरी	1875	122
फरवरी	1357	72
मार्च	1377	101
अप्रैल	2086	151
मई	1699	81
जून	1675	98

वर्ष/माह	उत्पत्ति	शुद्धित्व कोefficient
जुलाई	1699	101
अगस्त	1699	100
सितम्बर	1699	100
अक्टूबर	1699	100
नवम्बर	1889	111
दिसम्बर	2058	109
1964		
जनवरी	1897	92
फरवरी	1911	101
मार्च	1879	98
अप्रैल	1704	91
मई	2024	119
जून	1700	84
जुलाई	1478	87
अगस्त	1417	96
सितम्बर	1912	135
अक्टूबर	1809	95
नवम्बर	1409	78
दिसम्बर	1515	108

शुद्धित्व कोefficient को पूर्णांकन करने के लिए कहा गया है क्योंकि इससे सुविधा हो जाती है। अधिक परिशुद्ध परिणाम चाहते हैं तो पूर्णांकन न करें।

(1) शुद्धित्व कोefficient का परिकल्पना — प्रत्येक माह के प्रेषित मान को हमके पिछले माह के मान से भाग करने, 100 से गुणा कर देते पर प्रति मास शुद्धित्व कोefficient प्राप्त हो जाते हैं। जैसे यदि जनवरी से दिसम्बर तक प्रेषित मान क्रमशः

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{12}$$

है तो फरवरी माह का प्रतिगत शुद्धित्व कोefficient (शु० घा०)

$$\frac{X_2}{X_1} \times 100 = \frac{1605}{1640} \times 100 = 98$$

के समान है, मार्च का शु० घा०

$$\frac{X_3}{X_2} \times 100 = \frac{1681}{1605} \times 100 = 105$$

दिसम्बर का श्र० घा०

$$\frac{X_{12}}{X_{11}} \times 100$$

आदि । अगले वर्ष के जनवरी के मान को पिछले वर्ष के दिसम्बर के मान से भाग करके, 100 में गुणा कर देते हैं । इस प्रकार जनवरी का श्रृंखलित मापेक्षित ज्ञात हो जाता है । जनवरी का श्र० घा०

$$= \frac{1875}{1543} \times 100 = 122$$

यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि अन्त के माह के लिए श्रृंखलित मापेक्षित ज्ञान न हो जाये ।

(2) माध्यिका ज्ञात करना — इन श्रृंखलित मापेक्षिकों को वर्षों श्रेणी के प्रत्येक माह के अनुसार सारणीबद्ध कर लिया जाता है और प्रत्येक माह की भलग-भलग माध्यिका ज्ञात कर लेते हैं । जैसे जनवरी के माध्यिका

$$= \frac{98 + 122}{2} = 107$$

व फरवरी की 98 है । यह माध्यिकाएँ सूचकांक को निरूपित नहीं करती हैं तथापि केवल श्रृंखलित मापेक्षिकों की माध्यिकाएँ ही हैं । यह ध्यान रहे कि इस विधि में श्रृंखलित मापेक्षिकों के प्रत्येक माह के लिए माध्य नहीं ज्ञात किये जाते हैं बर्यात् केवल माध्यिकाएँ ही ज्ञात की जाती हैं । इन माध्यिकाओं के द्वारा श्रृंखलित सूचकांक की रचना की जाती है ।

(3) श्रृंखलित मापेक्षिक मान ज्ञात करना — जनवरी माह की माध्यिका को 100 मान लेते हैं । उसके अगले माह अर्थात् फरवरी माह की माध्यिका को पिछले माह की माध्यिका के परिवर्तित मान से गुणा करके 100 में भाग देने पर इस माह (फरवरी) का श्रृंखलित मापेक्षिक ज्ञात हो जाता है । जैसे यहाँ श्रृंखलित मापेक्षिक माध्यिका

$$= \frac{(100 \times 98)}{180} = 98$$

इसी प्रकार मार्च माह की माध्यिका को फरवरी माह की श्रृंखलित माध्यिका से गुणा करके, 100 से भाग देने पर मार्च की श्रृंखलित मापेक्षिक ज्ञात कर लेते हैं । जैसे श्र० मापेक्षिक माध्यिका

$$= \frac{101 \times 98}{100} = 99$$

है। इसी प्रकार अन्य सभी महीनों के लिए श्रृंखलिक माध्यिकाएँ ज्ञात कर ली जाती हैं। अन्त में जनवरी माह के लिए श्रृंखलिक प्रापेक्षिक, दिसम्बर माह की श्रृंखलिक माध्यिका व जनवरी माह की माध्यिका के गुणनफल को 100 में भाग करने पर प्राप्त होता है। जैसे श्रृं० प्रापेक्षिक माध्यिका

$$= \frac{112 \times 107}{100} = 120$$

यह श्रृंखलिक माध्यिकाएँ समिकट ऋतुनिष्ठ विवरण को निरूपित करती हैं जिसका श्रृंखलिक प्रापेक्षिक ज्ञात करते समय भाग देने के कारण क्षति हो गई थी। श्रृंखलिक माध्यिकाओं (जिसे परिवर्तित मान भी कहते हैं) या समायोजन करना होता है जिसमें कि जनवरी मास की श्रृंखलिक माध्यिका (परिवर्तित मान) 100 हो जाये।

समायोजन गुणन क्षण्ड के परिवर्तन के लिए सूत्र निम्न प्रकार है —

$$\text{समायोजन गुणन क्षण्ड} = \frac{(\text{जनवरी का स्वेच्छ मान}) - (\text{जनवरी का श्रृं० घा०})}{12}$$

$$C = \frac{100 - (\text{जनवरी का श्रृंखलिक प्रापेक्षिक})}{12} \dots (16.3)$$

जैसे यह

$$C = \frac{100 - 120}{12} = -\frac{5}{3}$$

घन जनवरी में दिसम्बर तक समायोजित मान क्रमशः $0 \times C$, $1 \times C$, $2 \times C$, $11 \times C$ के समान होते हैं। इन समायोजन मानों को क्रमशः श्रृंखलिक महीनों की माध्यिका में जोड़कर समायोजित श्रृंखलिक माध्यिकाएँ ज्ञात कर ली जाती हैं। जैसे जनवरी के लिए समायोजन संख्या $= 0 \times (-\frac{5}{3}) = 0$, फरवरी के लिए $= 1 \times (-\frac{5}{3}) = -1.7$, मार्च के लिए $2 \times (-\frac{5}{3}) = -3.3$ आदि।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञान करना

इन समायोजित माध्यिकाएँ का माध्य ज्ञात करने, शक्यता समायोजित माध्यिका का माध्य से भाग करके सूचकांक ज्ञात कर लिया जाता है जिसमें कि इनका माध्य 100 हो जाये।

टिप्पणी : (1) सूचकांक में अधिकतर समस्याओं का पूर्णांकन करके तिराते हैं क्योंकि दशमसव को पूर्णांकन करने हटा देने हैं।

(2) यह विधि अन्य विधियों की अपेक्षा सबसे बड़ित है। किन्तु श्रृंखलिक प्रापेक्षिक ज्ञात करने से वार्षिक या वार्षिकी उपनिधि के प्रभावों का निरसन हो जाता है और समायोजन करने से उपनिधि का निरसन हो जाता है। इन्हीं दुगुणों के कारण, यह विधि बड़ित होने हुए भी अधिक प्रचलित है।

महीनों के अनुसार बाल-श्रेणी के श्रमिक अपेक्षकों को अवरोही क्रम में निम्न मारणी में व्यवस्थित करके रखा गया और इन अपेक्षकों की माध्यिका ज्ञात कर ली गई है।

	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल
	122	101	105	151
	92	98	101	104
		72	98	91
माध्यिका	107	98	101	104
श्रु खलिक	100	98	99	103
अपेक्षित माध्यिका				
समायोजित अपेक्षित	100 0	96 3	95 7	98 0
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	107	103	103	105
	मई	जून	जुलाई	अगस्त
	119	101	101	100
	101	98	100	99
	81	84	87	96
माध्यिका	101	98	100	99
श्रु खलिक	104	102	102	101
माध्यिका अपेक्षित				
समायोजित अपेक्षित	97 3	93 7	92 0	89 3
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	105	100	99	96
	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
	135	101	111	109
	100	100	103	108
	85	95	78	98
माध्यिका	100	100	103	108
श्रु खलिक	101	101	104	112
माध्यिका अपेक्षित				
समायोजित अपेक्षित	87 7	86 0	87 1	93 7
ऋतुनिष्ठ सूचकांक	94	92	94	101

$$\begin{aligned} \text{समायोजन गुणक} &= \frac{100-120}{12} \\ &= \frac{-20}{12} = \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

अतः जनवरी से दिसम्बर तक समायोजन सख्याएँ हैं —

$$\begin{aligned} 0 \times \frac{5}{3} &= 0, \quad -1 \times \frac{5}{3} = \frac{-5}{3}, \quad -2 \times \frac{5}{3} = \frac{-10}{3}, \\ -3 \times \frac{5}{3} &= -5, \quad -4 \times \frac{5}{3} = \frac{-20}{3}, \quad -5 \times \frac{5}{3} = \frac{-25}{3}, \\ -6 \times \frac{5}{3} &= -10, \quad -7 \times \frac{5}{3} = \frac{-35}{3}; \quad -8 \times \frac{5}{3} = \frac{-40}{3}, \\ -9 \times \frac{5}{3} &= -15; \quad -10 \times \frac{5}{3} = \frac{-50}{3}; \quad -11 \times \frac{5}{3} = \frac{-55}{3} \end{aligned}$$

समायोजित घापेक्षिक माध्यों का योग = 1117.0

अतः इनका योग 1200 माने के लिए, समायोजन गुणक

$$= \frac{1200}{1117} = 1.074$$

समायोजन गुणक का प्रयोग करके ऋतुनिष्ठ सूचकांक उपर्युक्त तारणी की घनिष्ठ पंक्ति में दिखाये गये हैं।

ऋतुनिष्ठ सूचकांक का योग 1200 न होकर 1199 है। एक का अन्तर पूर्णकित के कारण है।

टिप्पणी उपर्युक्त विधि केवल तीन वर्षों के आँकड़ों को लेकर दी गई है। इस विधि का प्रयोग ही हुई रीति के अनुसार किसी भी क्रम श्रेणी के लिए कर सकते हैं। अथवा एक ही हुई विधियों के प्रतिरिक्त ऋतुनिष्ठ सूचकांक प्राप्त करने की अन्य अनेक विधियाँ प्रयोग में लाई जाती हैं जैसा ज्ञात गतिमान माध्य अन्तर विधि (Bauman Moving Average Difference Method), कार्मिचल अन्तर विधि (Carmichael's first Difference Method), फाल्कनर की उपतन्त्र-प्रतिगत विधि (Falkner Percent of Trend Method) आदि। यह विधियाँ यदा यदा ही प्रयोग में लाई जाती हैं। इनका अन्तः इस अध्याय में नहीं किया गया है। किसी भी विधि का प्रयोग ग्यान के प्रकार, ऋतुनिष्ठ सूचकांक का मध्य पर निर्भर करता है। साधारणतः गतिमान माध्य विधि का अर्थानिक आर्थिक विधि द्वारा अच्छे परिणाम प्राप्त होते हैं।

ऋतुनिष्ठ प्रभावों का निरसन :

ऋतुनिष्ठ प्रभावों को दूर करने की एक साधारण विधि यह है कि प्रति मास प्रेरित मानों के तदनुसार ऋतुनिष्ठ सूचकांक में भाग करके 100 में गुणा कर दें। इस प्रकार जो समायोजित मान प्राप्त होते हैं वह ऋतुनिष्ठ विचरण से मुक्त होते हैं। कुछ व्यक्ति अन्य विधियों का भी प्रयोग करते हैं किन्तु वह विधियाँ कुछ विशेष परिस्थितियों में ही उपयुक्त होती हैं :

ऋतुनिष्ठ परिवर्तन समस्या :

जिन विधियों का वर्णन ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञान करने के हेतु दिया जाता है वह सब ही इस कल्पना पर आधारित हैं कि कुछ काल श्रेणी के वर्षों में ऋतुनिष्ठ परिवर्तन या प्रतिरूप लगभग एक सा ही रहता है। किन्तु यह स्थिति हर पदार्थ के लिए सत्य नहीं पाई जाती है। समय के साथ परिस्थितियाँ और परिस्थितियों के साथ ऋतुनिष्ठ प्रभाव भी बदलते रहते हैं। जैसे कुछ समय पूर्व कोयला ईंधन का एक मात्र साधन होने के कारण शब्द ऋतु में अधिक मात्रा में उपयोग होता था और मूल्य भी अधिक होते थे जब कि गर्मियों में (मई व जून) मानसून के विपरीत स्थिति पाई जाती थी। किन्तु आधुनिक काल में विद्युत् व गैस का कोयले के स्थान पर प्रयोग होने के कारण ऋतुनिष्ठ प्रभाव में परिवर्तन हो गया है। अतः यदि काल श्रेणी में अधिक वर्ष सम्मिलित हैं तो ऋतुनिष्ठ परिवर्तन विद्यमान होना स्वाभाविक ही है।

ऋतुनिष्ठ परिवर्तन समस्या कुछ ही पदार्थों की स्थिति में होती है। इन समस्या को दूर करने का एक सुगम उपाय यह है कि केवल उन ही वर्षों को एक श्रेणी में लेकर ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात करना चाहिये जिनमें परिस्थितियाँ लगभग एक सी हों। यहाँ इस समस्या को बताने का उद्देश्य अध्ययनकर्ता को इन परिवर्तन के प्रति सजग करना है।

क्षेत्रीय विचरण-मापन :

क्षेत्रीय विचरण से अभिप्राय एक दीर्घावधि में होने वाले विचरण में है। यह अवधि एक वर्ष से अधिक होती है क्योंकि वार्षिक विचरण को पहले ही उपनति के अन्तर्गत दिया जा चुका है। दीर्घावधि विचरण का व्यापार में तथा राष्ट्रीय आर्थिक नीति की दृष्टि से बड़ा महत्त्व है। इन प्रकार के विचरण, काल श्रेणी में न तो काल के अनुसार और न ही परिमाण के अनुसार नियमित होते हैं। व्यापार में प्रायः ऐसा देखा गया है कि कुछ काल तक प्रकार व उन्नति के पश्चात् फिर एक काल में सुन्ती तथा गिरावट आती है। इस प्रकार के परिवर्तन अनेक कारणों से हो सकते हैं जैसे सरकार की नीतियों का प्रभाव, लोगों की रुचि, विभिन्न वस्तुओं के उत्पादन में परिवर्तन आदि।

क्षेत्रीय विचरण के अध्ययन करने का एक मूल सिद्धान्त यह है कि श्रेणी में से उपनति और ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन कर दिया जाये। इस प्रकार श्रेणी में केवल क्षेत्रीय तथा अनियमित विचरण ही शेष रह जाते हैं। वास्तव में अनियमित विचरण को क्षेत्रीय विचरण से पृथक् करना एक कठिन समस्या है क्योंकि क्षेत्रीय विचरण स्वयं ही काल तथा

परिमाण की दृष्टि से अनियमित होते हैं। यही कारण है कि अब तक कोई मनोपञ्जन विधि हमके लिए नहीं दी गई है। इन दोनों को श्रेणी में से उपनति या ऋतुनिष्ठ विचरण के आधार पर पृथक् करना लगभग असम्भव है। केवल किसी वर्ष या काल में यदि कोई ऐसी घटनाएँ घटित हुई हों जा कि अनियमित विचरण या अक्समात् परिवर्तन के लिए उत्तरदायी हो, तो इस सम्मिलित काल की काल श्रेणी में होने वाले विचरण को अनियमितता से मान्य कर सकते हैं जैसे इस काल में सूखा पड़ जाये, बाढ़ आ जाये, भूकम्प आ जाये, युद्ध के वर्ष हों या अन्य कोई विपत्ति उत्पन्न हो गई हो। इसी प्रकार किसी पदार्थ के लिए गुप्त भण्डारा का पता लग जाये, एन साय कई पंक्तियों छुटने में उत्पादन बढ़ जाये या किसी बीमारी के फैलने से एक प्रकार की ही वस्तु की मांग बढ़ जाये आदि काल श्रेणी में अनियमित विचरण के प्रतीक माने जाते हैं। सारांश यह है कि कोई भी ऐसी घटित विचरण जो कि व्यापार पद्धति के अनुसार न होते हों और जो कि असाधारण रूप में अभी भी घटित हो जाय अनियमित विचरण ही समझे जाते हैं।

(1) **क्षत्रीय विचरण का पृथक्करण** क्षत्रीय विचरण के लिए अत्यधिक अनियमित होने के कारण उपनति या ऋतुनिष्ठ विचरण की भाँति सूचकांक ज्ञान करना तो असम्भव है, किन्तु श्रेणी से उपनति तथा ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन करने के परचाद, क्षत्रीय विचरण के विषय में पर्याप्त ज्ञान प्राप्त हो जाता है। यदि श्रेणी वार्षिक आँकड़ों पर आधारित है तो इसमें ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान होने का तो प्रबल ही नहीं उठता। अतः प्रेषित मानों को तदनुसार उपनति कोटियों द्वारा भाग देने पर प्राप्त समायोजित मान उपनति युक्त श्रेणी प्रदान करते हैं। यदि मासिक आँकड़े सङ्गृहीत किये गये हों तो उपनति कोटि और ऋतुनिष्ठ सूचकांक के गुणनफल से प्रत्येक मान को भाग करके प्रतिगत समायोजित मान प्राप्त कर लेते हैं। अब इस श्रेणी में केवल क्षत्रीय व अनियमित विचरण ही अवशिष्ट रह जाते हैं।

उपयुक्त विधि इस कल्पना पर आधारित है कि उपनति कोटियाँ और ऋतुनिष्ठ सूचकांक पूर्णतया उपनति तथा ऋतुनिष्ठ प्रभावों के प्रतीक हैं। किन्तु वास्तव में ऐसी स्थिति प्राप्त होना कठिन है। अतः इस विधि द्वारा परिशुद्ध क्षत्रीय विचरण प्राप्त होने की सम्भावना बहुत कम है। फिर भी यदि इस कल्पना के सत्य होने का प्रत्यक्ष प्रमाण हो तो इस विधि का प्रयोग करना उचित है।

किसी विधि द्वारा उपनति व ऋतुनिष्ठ विचरण का निरसन करने के बाद प्राप्त श्रेणी को आलेखित करके गतों (Troughs) एवं शीर्षों (Crests) को देखकर क्षत्रीय विचरण ज्ञात कर लिए जाते हैं।

उपनति—निरसन द्वारा क्षत्रीय विचरण ज्ञात करने की कुछ विधियाँ निम्न हैं —

विधि 1 : प्रथम अन्तर विधि . यह विद्यते सख्त में दिया जा चुका है कि वार्षिक काल श्रेणी में ऋतुनिष्ठ विचरण विद्यमान नहीं होते हैं, अतः केवल उपनति का निम्नन करने के हेतु यह विधि अत्यधिक सरल एवं उपयुक्त है। इस विधि के आरम्भ में एक वर्ष के लिए मान का इसमें विद्यते वर्ष के मान से अन्तर ज्ञात करते हैं। यदि विद्यते वर्ष का मान इस

वर्ष के लिए मान से अधिक हो तो इसका चिह्न ऋणात्मक (-) अन्यथा धनात्मक (+) होता है। इन अन्तरो को प्रतिवर्ष के अनुसार ग्राफ पर आलेखित करके चत्रीय विचरण के विषय में पता चल जाता है। बिना ग्राफ के भी इसका अनुमान लगाया जा सकता है किन्तु ग्राफ द्वारा चत्रीय विचरण का स्पष्ट पता चल जाता है जो कि गर्तों एवं शीर्षों के रूप में होता है।

विधि 2 : पूर्वगत वर्ष के प्रतिशत द्वारा : इस विधि में प्रत्येक वर्ष के मान को पिछले वर्ष के मान से भाग करके 100 से गुणा कर देने पर प्रतिशत ज्ञात हो जाते हैं। यह विधि (1) के तुल्य है क्योंकि इसमें वास्तविक अन्तर के स्थान पर सापेक्ष परिवर्तन अर्थात् उपनति या गिरावट के विषय में पता चल जाता है। इन प्रतिशत मानों को आलेखित करके चत्रीय विचरण स्पष्ट ज्ञात हो जाता है। विधि (1) व (2) द्वारा एक से परिणाम प्राप्त होते हैं।

विधि 3 : उपनति के निरसन द्वारा : उपनति का निरसन करने के हेतु प्रत्येक मान को तदनुसार उपनति कोटि से भाग करके उपनति का निरसन कर सकते हैं। अतः उपनति के हेतु दी गई विधियों में से किसी भी उपयुक्त विधि का प्रयोग करके उपनति ज्ञात कर लेते हैं। इन मानों से भाग करने पर उपनति मुक्त काल श्रेणी ज्ञात हो जाती है। इस काल श्रेणी विन्दुओं का आलेखन करके चत्रीय विचरण ज्ञात हो जाते हैं।

विधि 4 : ऋतुनिष्ठ विचरण के निरसन द्वारा : यदि मासिक श्रेणी दी गई हो तो इसमें ऋतुनिष्ठ विचरण का होना स्वाभाविक है अतः ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञात करने के हेतु दी गई विधियों में से किसी भी उपयुक्त विधि का प्रयोग करके ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कर लेते हैं। श्रेणी के प्रत्येक मान को ऋतुनिष्ठ सूचकांक द्वारा भाग करके 100 से गुणा कर देने पर ऋतुनिष्ठ विचरण मुक्त श्रेणी प्राप्त हो जाती है। इस श्रेणी के आलेखन द्वारा या श्रेणी को देखने मात्र से चत्रीय विचरण का पता चल जाना है, यह विधि श्रृंखलिक सापेक्ष विधि के अनुरूप है।

विवेचन चत्रीय विचरण का पृथक्करण उपनति व ऋतुनिष्ठ विचरण के निरसन पर आधारित है जिसके लिए विधियाँ पहले ही दी जा चुकी हैं। निरसन के पश्चात् श्रेणी का आलेखन करके, विन्दुओं को मिला देने पर शीर्षों (Crests) और गर्तों (Troughs) की सहायता से चत्रीय विचरण का स्पष्ट पता चल जाता है।

चत्रीय विचरण के हेतु पर्याप्त बड़ी श्रेणी को लेना चाहिये जिससे व्यापारिक या अन्य चक्रों के विषय में स्पष्ट पता चल सके।

काल श्रेणी में अनियमित विचरण :

चत्रीय विचरण के वर्णन में यह पहलू ही बताया जा चुका है कि चत्रीय विचरण और अनियमित विचरण को पृथक् करना सम्भव नहीं है क्योंकि चत्रीय विचरण स्वयं ही काल एवं कोणांक (Amplitude) की दृष्टि से अनियमित होते हैं अतः किसी काल श्रेणी में गवस्मात् परिवर्तन जो कि किन्हीं घटनाओं के अधीन हुए ही अनियमित विचरण में सम्बद्ध किये जा सकते हैं।

सारास्य : इस अध्याय में दिये गये विवरण में स्पष्ट है कि काल श्रेणी के प्रेषित मान (प्रे०), चार प्रकार के प्रभावों पर आधारित है। यह प्रभाव हैं उपनति (उ०), ऋतुनिष्ठ विचरण (ऋ०), चक्रीय विचरण (च०) और अनियमित विचरण (अ०)। इन सब में निम्न सम्बन्ध निर्धारित किया जा सकता है।

$$\text{प्रे०} = \text{उ०} \times \text{ऋ०} \times \text{च०} \times \text{अ०} \quad \dots (16.4)$$

उपनति रेखा या वक्र का समायोजन करने की विभिन्न विधियाँ पहले ही दी जा चुकी हैं। ऋतुनिष्ठ विचरण ज्ञान करने के हेतु उपनति (उ०) का निरसन करना होता है अर्थात्

$$\frac{\text{प्रे०}}{\text{उ०}} = \text{ऋ०} \times \text{च०} \times \text{अ०} \quad \dots (16.4.1)$$

चक्रीय तथा अनियमित विचरणज्ञान करने के हेतु उपनति और ऋतुनिष्ठ विचरण दोनों का ही निरसन करना होता है अतः

$$\frac{\text{प्रे०}}{\text{उ०} \times \text{ऋ०}} = \text{च०} \times \text{अ०} \quad \dots (16.4.2)$$

ऊपर दिये तीनों सम्बन्धों से काल श्रेणी विश्लेषण के मूल सिद्धान्त का ज्ञान हो जाता है। इसी सिद्धान्त के आधार पर विभिन्न विधियों का अन्वेषण हुआ है।

सब विधियों में गुण एक दोष दोनों विद्यमान हैं। अतः किसी काल श्रेणी के अनुसार जो भी विधि उपयुक्त प्रतीत हो उसका प्रयोग करना चाहिये। इस अध्याय में दी गई विधिमा के अतिरिक्त अन्य विधियों का प्रयोग किया जाता है। सब विधियों का एक अध्याय में समावेश करना सम्भव नहीं है अतः कुछ मुख्य विधियों का ही इस अध्याय में वर्णन किया गया है।

प्रश्नावली

1. काल श्रेणी विश्लेषण द्वारा किन स्थितियों के विषय में हमें पता चलता है? इनमें से कुछ मुख्य-मुख्य स्थितियों का विवेचन कीजिये।
2. गतिमान माध्य विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञान करने के गुण एक दोष बताइए।
3. उपनति रेखा या वक्र ज्ञान करने की सर्वोत्तम विधि बताइए और अपने उत्तर की लक्ष्यो के आधार पर पुष्टि कीजिये।
4. भारत वर्ष में विद्युत् शक्ति का उपभोग, 1962 से 1967 तक, निम्न प्रकार था :—

वर्ष	विद्युत का उपभोग (दस लाख kwh $\times 10^3$)
1962	14.4
1963	18.7
1964	21.4
1965	24.2
1966	26.7
1967	29.1

न्यूनतम वर्ग-विधि द्वारा उपरति रेखा का समझन कीजिये ।

- यह बताइये कि एक काल श्रेणी के संघटक क्या-क्या हैं ? इन श्रेणी के विघटन करने की एक विधि का वर्णन कीजिये । यह भी बताइये कि कालिक और प्रकालिक संघटक क्या हैं ?
(बी० एस० मद्रास, 1970)
- भारत में नाईलोन का उत्पादन 1962 में प्रारम्भ हुआ । उस वर्ष से सन् 1969 तक के नाईलोन के धागे का उत्पादन निम्न सारणी में दिया गया है :—

वर्ष	उत्पादन (दस लाख किलोग्राम में)
1962	0.18
1963	0.74
1964	1.18
1965	1.48
1966	1.92
1967	2.45
1968	5.30
1969	7.89

- उपर्युक्त ग्यास के लिए उपरति रेखा या वक्र जो, उपयुक्त हो, समझन कीजिये ।
- आलेखन चित्र बनाकर सन् 1975 के लिए नाइलोन के धागे के उत्पादन की प्रागुक्ति कीजिये ।

- निम्न सारणी के लिए माध्य ऋतुनिष्ठ विचरण का परिकलन कीजिये :—

वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)	वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)
1901	351	1907	410
1902	366	1908	420
1903	361	1909	450
1904	362	1910	५००
1905	400	1911	518
1906	419	1912	455

वर्ष	उत्पादन (दस लाख टन)
1913	502
1914	540
1915	५57
1916	571
1917	586
1918	612

(दिल्ली, बी० ए० मानसं, 1968)

- 10 एक निश्चित क्षेत्र में प्रति दिन डाढ़े गये पत्रों की संख्या चार सप्ताह के लिये निम्न सारणी में दी गई है। यह कल्पना की गई है कि एक काल में उपनिधि वही रहती है तो ऋतुनिष्ठ सूचकांक (प्रति दिन सूचकांक) तुल्य माध्य के प्रतिगमन के रूप में ज्ञात कीजिये।

सप्ताह	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	योग
1	18	161	170	164	153	181	76	923
2	18	165	169	147	158	190	80	927
3	21	162	169	153	145	190	82	922
4	20	165	170	155	150	180	85	925

- 11 निम्न सारणी के लिये ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कीजिये।

वयु	1960	1961	1962	1963	1964
त्रैमासिक 1	40	42	41	45	44
„ 2	35	37	35	36	38
„ 3	38	39	38	36	38
„ 4	40	38	42	41	42

(बी० कॉम० छागरा, 1968)

इस मूलकांक को श्रुमलिक प्रापेक्षिक विधि द्वारा ज्ञान कीजिये ।

टिप्पणी प्रश्नावली में दिये परीक्षार्थ के सब प्रश्न मूल रूप में प्राग्ज भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है ।)

□ □ □

सामान्य वर्षों के करते समय प्रायः ऐसी स्थिति सामने आती है कि सख्यात्मक सूचना, प्रेषित श्रेणी या एक सारणी में आवश्यकता के अनुसार कुछ मान विद्यमान नहीं होते हैं। ये मान दिये हुए मानों के अन्तर्वर्ती (Intermediate) मान होते हैं या श्रेणी के परास के बाहर के मान होते हैं या भविष्य के लिये किसी X मान के तदनुसार मान की प्रागुक्ति करने के लिये ज्ञात करने होते हैं। इन अन्तर्वर्ती और आगामी मानों के आकलन करने की विधि को क्रमशः अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन कहते हैं। जैसे भारत में जनगणना प्रत्येक दस वर्षों के पश्चात् होती है। यदि इन दस वर्षों के किसी बीच के वर्ष में जनसंख्या जानना हो तो अन्तर्वेशन एक उपाय है। जैसे जनसंख्या 1931, 1941, 1951, 1961, 1971 के लिये ज्ञात है। परन्तु 1965 (या अन्य अन्तर्वर्ती वर्ष) की जनसंख्या जानना हो तो अन्तर्वेशन का प्रयोग करके जान सकते हैं। योजनाओं की तैयारी करते समय प्रायः यह भी जानना होता है कि अगले पाँच (या अन्य आगामी कुछ वर्षों में) वर्ष बाद जनसंख्या कितनी हो जायेगी अर्थात् 1976 की जनसंख्या का आकलन बहिर्वेशन द्वारा कर सकते हैं। इसी प्रकार अन्तर्वेशन की आवश्यकता बहुधा सांख्यिकीय सारणी द्वारा किसी निश्चित स्वतन्त्रता कोटि या सार्यता स्तर पर वह मान ज्ञात करने के लिये होती है जो कि सारणी में नहीं दिये हैं। अन्तर्वेशन का प्रयोग अप्राप्त मानों का आकलन करने के लिये भी किया जाता है। न्यास में यदि कुछ मान छूट गये हों तो उनका आकलन करने न्यास को पूरा करने में भी यह विधि सहायक होती है।

यह ध्यान रखना चाहिये कि अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन द्वारा प्राप्त मान किसी प्रकार भी वास्तविक मान नहीं है। यह तो केवल आकलित मान है जिनका कि वास्तविक मानों से भिन्न होना स्वाभाविक है। उत्तम विधि का प्रयोग करके इन आकलनों के यथा सम्भव परिशुद्ध मान ज्ञात करना ही सांख्यिकी-विद् के ज्ञान का सूचक है।

अन्तर्वेशन की शुद्धता दिये हुए न्यास में समय या अन्य किसी स्वतन्त्र चर के अनुसार, विद्यमान उतार-चढ़ाव (fluctuations) पर आधारित होती है। इन उतार-चढ़ाव को न्यास का निरीक्षण करके जान सकते हैं। इसके अतिरिक्त उन घटनाओं को भी विचार में रखना चाहिये जो कि उस समय पर संख्या को प्रभावित कर सकती हों। यदि उतार-चढ़ाव या सम्बद्ध घटनाएँ हों तो उनके अनुसार न्यास में समायोजन करके अधिक विश्वामनीय तथा शुद्ध आकलन प्राप्त किये जाते हैं।

अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन की समस्या को सांख्यिकीय भाषा में पाठक इस प्रकार समझ सकते हैं। किसी भी अध्ययन में दो चर X व Y हैं। माना चर X स्वतन्त्र चर है और Y एक आश्रित चर है। X पर ज्ञात प्रेक्षण $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$ हैं और तदनुसार Y पर प्रेक्षण $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_n$ हैं तो अन्तर्वेशन से अभिप्राय

किसी मान X_k (जबकि $k < n$ और $1 < k < i+1, i=1, 2, 3, \dots, n-1$) के तदनुसार प्राश्रित चर Y_k के मान का प्राकलन करना है। बहिर्वैशेष्य की स्थिति में $k > n$ होता है अर्थात् यह दिये हुए X मानों के अनन्त मान के बाद या प्रारम्भिक मान से पूर्व के किसी मान को निर्दिष्ट करता है।

घनत्ववैशेष्य और बहिर्वैशेष्य के लिए कल्पनाएँ

(क) यह कल्पना की गई है कि सममानुसार चर X के अनुसार प्रेक्षण में अकस्मात् परिवर्तन नहीं हुए हैं अर्थात् मान Y लगभग समान दर में ही बढ़ या घट रहे हैं। जैसे किसी घनत्ववैशेष्य के लिए घनत्ववैशेष्य द्वारा जनसंख्या का प्राकलन करने में यह कल्पना की गई है कि सम्पूर्ण काल में जनसंख्या-वृद्धि दर समान रहती है और बहिर्वैशेष्य करने में यह कल्पना करनी होती है कि घनत्व वयों में भी वृद्धि दर यही रहेगी। किन्तु यह कल्पना कम स्थिति में सत्य पाई जाती है जिसके परिणाम स्वरूप प्राकलन सुदृढ़ नहीं होते हैं।

(ख) अन्य कल्पना यह है कि स्वाम में किसी प्रकार की छुट्टि (jump) नहीं है अर्थात् स्वाम में एक प्रकार के सातत्य है। जैसे जनसंख्या सम्बन्धी घाँवों में यह माना गया है कि दिये हुए काल के मध्य में किसी सुदृढ़ या प्राकृतिक विपत्ति (घबराहट, बीमारी फैलने या भूकम्प आदि) के कारण देग की जनसंख्या अकस्मात् कम नहीं हुई थी। साथ ही किसी परिस्थिति में घटेगा से लागा क देग में घनत्व के कारण जनसंख्या में अकस्मात् वृद्धि नहीं हुई थी।

उपरोक्त सम्बन्धी घाँवों में किसी वयों में मूल, बाढ़ या सुदृढ़ आदि के कारण कुछ वंशवार पर्याधिक कम नहीं हुई थी।

घनत्ववैशेष्य और बहिर्वैशेष्य के लिए विधियाँ

घनत्ववैशेष्य विधियों का दो खण्डों में विभाजित किया जा सकता है जो कि निम्न हैं —

- (1) लेखाचित्रोप विधि (Graphic method)
- (2) बीजोप विधियाँ (Algebraic methods)

लेखाचित्रोप विधि इस विधि के अन्तर्गत स्वतन्त्र चर X का मुझा पक्ष और प्राश्रित चर Y की कोटि पक्ष पर लेकर युक्त प्रेक्षण बिन्दुओं (X_i, Y_i) (जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, n$) को एक वेपर पर प्रालेखित कर दिया जाता है और इन प्रालेखित बिन्दुओं को मिला देने है। यह बिन्दु एक सरल रेखा पर या वक्र पर स्थित होते हैं। यदि यह लेखाचित्र एक सरल रेखा है तो X के किसी भी घनत्ववैशेष्य मान के लिए घनत्ववैशेष्य इस प्रकार करते हैं। मुझा पक्ष के इस बिन्दु X पर Y पक्ष के समान्तर एक रेखा खींचो और इस रेखा ऊपर तक से जाते हैं कि यह प्रालेखित रेखा को काट दे। इस कटान बिन्दु का Y निर्देशांक दिये हुए X मान के छिद्र घनत्ववैशेष्य मान होता है। इसी प्रकार प्रालेखित बिन्दु यदि वक्र हों तो वक्र सरलन (Smoothing of curve) कर देना चाहिये जिसमें कि दो हुई कल्पनाएँ सत्य रहे। एक मुझा पक्ष में X बिन्दु पर Y -पक्ष के समान्तर रेखा खींचने है

जो कि वक्र को किसी बिन्दु पर काटती है। इस कटान बिन्दु के Y निर्देशांक को पढ़कर X के तदनुसार अन्तर्वेशित मान ज्ञात कर लिए जाते हैं।

बहिर्वेशन : उपर्युक्त विधि द्वारा बहिर्वेशन के लिए रेखा या वक्र को उपनति (trend) की दिशा में बढ़ा दिया जाता है जिससे कि भुजा अक्ष के X बिन्दु पर लम्ब, रेखा या वक्र को काट सके। इस कटान बिन्दु का Y निर्देशांक ही बहिर्वेशित मान होता है।

लेखाचित्रीय विधि के गुण एवं दोष .— यह विधि क्रियात्मक दृष्टि से सरलतम है। लेखाचित्रीय विधि द्वारा अन्तर्वेशन के लिए परिणाम बहिर्वेशन की अपेक्षा अधिक परिशुद्ध होते हैं। इस विधि का दोष यह है कि कम बिन्दु होने की स्थिति में वक्र के सही रूप का पता नहीं चलता है अतः प्राकलित मान अशुद्ध हो जाते हैं। यदि Y के मान बड़े हों तो Y -अक्ष पर मापक्रम लघु लेना पड़ता है। इसके कारण सन्निकट-त्रुटि बढ़ जाती है। जैसे यदि जनसंख्या लाखों या करोड़ों में दी गई है जो किंचित मात्र भी सन्निकटन के कारण Y -मान में अर्धक अन्तर पड़ जाता है।

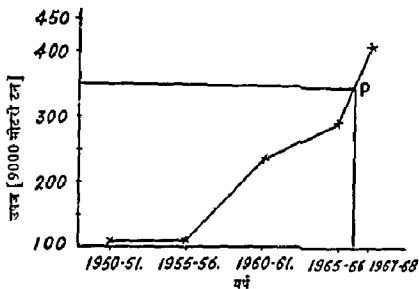
उदाहरण 17.1 :—भारत में 1950 से 1968 तक धान की उपज कुछ वर्षों के लिए निम्न प्रकार हुई थी :—

वर्ष (X)	धान की उपज (Y) (,000 मीटरी टन)
1950-51	107
1955-56	107
1960-61	236
1965-66	293
1967-68	415

वर्ष 1966-67 में धान की उपज लेखाचित्रीय विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं :—

वर्षों को X -अक्ष पर तथा उपज को Y -अक्ष की ओर लिया। X -अक्ष व Y -अक्ष की ओर उचित रेखनी मानकर बिन्दुओं को आलेखित कर दिया। इन बिन्दुओं को क्रम में मिला दिया। इस प्रकार एक रेखीय चित्र प्राप्त हो गया। अब वर्ष 1966-67 के बिन्दु पर Y -अक्ष के समान्तर रेखा खींची जो कि रेखीय चित्र को P पर काटती है। P का Y निर्देशांक ही 1966-67 के लिए अन्तर्वेशित मान है।

अतः 1966-67 के लिए अन्तर्वेशित मान $\hat{Y} = 350$ (000, मीटरी टन)



चित्र 17-1 सेवाचित्रीय विधि द्वारा अन्तर्वेशन

बीजीय विधियाँ

(1) रेखा या वक्र समंजन विधि इस विधि के अन्तर्गत पहले स्वतंत्र चर X और प्राश्रित चर Y में रेखीय या वक्ररेखी सम्बन्ध स्थापित करना होता है। यहाँ वक्र के स्वरूप को निर्दिष्ट करने के लिए सरल मा नियम है कि त्रिकोणी श्रेणियों की सख्या होनी है उममे एक कम घात के समीकरण को लिया जाता है। घत वक्र के समंजन के हेतु K घातीय समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_kX^k \quad \dots (17.1)$$

यदि $k = 1$ हो तो उपर्युक्त समीकरण एक रेखा को निरूपित करती है यदि $k \geq 2$ तो यह समीकरण वक्र को निरूपित करती है।

यहाँ रेखा या वक्र को समंजित करने की विधि दस प्रकार है। बाव श्रेणी विस्तारण में उपनिबि जान करने की भांति, यहाँ भी मध्य के बाव (स्वतंत्र चर को 0 मान लिया जाता है। यदि बावों की सख्या विषम हो तो इनमे पूर्व के बावों को क्रमशः $-1, -2, -3, \dots$ और मध्य बाव के बाद के बावों को $1, 2, 3, \dots$ मान लिया जाता है। यदि बावों की सख्या सम हो तो इनमे लिए मान $-.5, -1.5, -2.5, \dots$ व $.5, 1.5, 2.5, \dots$ मान लिये जाते हैं। X के मान व तदनुसार Y के मान को समीकरण में रखने पर एक समीकरण प्राप्त हो जाता है। इसी प्रकार X व Y के विभिन्न मानों को इनमे पर अन्य समीकरण प्राप्त हो जाते हैं। इन समीकरणों को हल करने पर मन्बरे a_0, a_1, a_2, \dots पादि के मान प्राप्त हो जाते हैं। इस समीकरण को निर्धारित करने के बाद X के किसी भी मान के लिए Y का प्राकृतिक मान प्राप्त किया जा सकता है।

अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन के लिए इस विधि का प्रयोग केवल उत स्थिति में किया जा सकता है जबकि X के मान समान अन्तराल में बढ़ रहे हों।

उदाहरण 17.2 : राजस्थान में चालू बीमा पत्रों की सख्या (हजारों में) तीन वर्षों में निम्न प्रकार थी :—

वर्ष (X)	1965	1967	1969
बीमा पत्रों की सख्या (Y) (हजारों में)	180	210	230

उपर्युक्त तीन प्रेक्षणों के लिए द्विघात समीकरण को लेना होगा। इस समीकरण का समंजन करके 1966 व 1970 के लिए घातलिन मान निम्न प्रकार ज्ञान कर सकते हैं — माना कि द्विघात समीकरण,

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2.$$

है। यहाँ X व Y के मान दी गई विधि के अनुसार निम्न होंगे :—

वर्ष	X	Y
1965	-2	180
1967	0	210
1969	2	230

X व Y के मान रखने पर

$$180 = a_0 - 2a_1 + 4a_2 \quad \dots (1)$$

$$210 = a_0 \quad \dots (2)$$

$$230 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \quad \dots (3)$$

समीकरण (3) में से (1) घटाने पर,

$$4a_1 = 50$$

$$a_1 = 12.5$$

a_0 व a_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$180 = 210 + 12.5 \times (-2) + 4a_2$$

$$180 = 210 - 25 + 4a_2$$

$$4a_2 = -5$$

$$\text{या } a_2 = -5/4$$

अतः परवलय का समीकरण,

$$Y = 210 + 12.5X - 1.25X^2$$

है। 1966 के लिए बीमा पत्रों की सख्या का घातलिन करने के लिए, $X = -1$ अतः

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 210 - 12.5 \times 1 - 1.25 \times 1 \\ &= 196.25 \end{aligned}$$

सन् 1966 के लिए चासू बीमा पत्रों की संख्या = 196.25 हजार

(नोट पाठक को विदिता है कि 1966 में बीमा पत्रों की वास्तविक संख्या 198 हजार थी)

वर्ष 1970 के लिए $X=3$,

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 210 + 12.5 \times 3 - 1.25 \times 9 \\ &= 236.25 \text{ हजार} \end{aligned}$$

सन् 1970 में चासू बीमा पत्रों की प्राक्कित संख्या = 236.25 हजार है।

(2) अन्तर्वेशन की द्विपद-वित्तर विधि इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में सम्भव है जबकि प्रेशण समान अन्तराल से बढ़े रहते हैं। यदि प्रेशण बढ़ते-ही प्रम से दिव्य हो तो उन्हें पुनः व्यवस्थित करने आगेही प्रम म कर देता पाहिये। इस विधि में अन्तर $(y-1)^n$ का द्विपद विस्तार करने हैं और इसे शून्य के समान रख देते हैं। यहाँ n पर Y पर प्राप्त प्रेशण मानों की संख्या है और Y^i , ($i=0, 1, 2, 3, \dots, n$) आगेही श्रेणी में X के तदनुसार Y मानों को निर्णय करता है।

$$\text{माना } (Y-1)^n = \Delta^n Y_0$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } \Delta^n Y_0 &= (Y-1)^n = Y^n - \binom{n}{1} Y^{n-1} + \binom{n}{2} Y^{n-2} + (-1)^1 \binom{n}{3} Y^{n-3} \\ &\quad + (-1)^n Y^0 = 0 \end{aligned} \quad \dots (17.2)$$

$$\begin{aligned} = Y_n - nY_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} Y_{n-2} + \dots + (-1)^1 \frac{n!}{(n-1)! 1!} Y_{n-1} + \dots \\ + (-1)^n Y_0 = 0 \end{aligned} \quad \dots (17.2.1)$$

यदि

$$n=3, \Delta^3 Y_0 = Y_3 - 3Y_2 + 3Y_1 - Y_0 = 0 \quad \dots (17.3)$$

$$n=4, \Delta^4 Y_0 = Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_0 = 0 \quad \dots (17.4)$$

$$n=5, \Delta^5 Y_0 = Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_1 - Y_0 = 0 \quad \dots (17.5)$$

$$n=6, \Delta^6 Y_0 = Y_6 - 6Y_5 + 15Y_4 - 20Y_3 + 15Y_2 - 6Y_1 + Y_0 = 0 \quad \dots (17.6)$$

इस विधि का मुख्य दोष यह है कि Y का आकलन, X के उस मान के तदनुसार कर सकते हैं जोकि श्रेणी के बीच में हो। इस कारण है कि द्विपद विस्तार विधि द्वारा अन्तर्वेशन करना सम्भव नहीं है।

उदाहरण 17.3 X व Y के दिये हुए न्याम में Y_3 का प्राकृतिक निम्न प्रकार करते हैं—

X	Y	Y_i
3	14	Y_0
6	11	Y_1
9	18	Y_2
12	?	Y_3
15	20	Y_4
18	20	Y_5

ऊपर दिये हुए उदाहरण में $n=5$ है और Y_3 का प्राकृतिक मान निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

$$\begin{aligned}\Delta^5_0 &= Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_1 - Y_0 = 0 \\ &= 20 - 5 \times 20 + 10Y_3 - 10 \times 18 + 5 \times 11 - 14 = 0\end{aligned}$$

$$\therefore 10Y_3 = 219$$

$$Y_3 = 21.9$$

अतः $X=12$ के लिए Y का प्राकृतिक मान 21.9 है।

दो या दो से अधिक अज्ञात मानों 'Y' का प्राकृतिक

यदि दो या दो से अधिक Y के मान अज्ञात हों तो इनका प्राकृतिक मान करने के लिए अज्ञात मानों की संख्या के समान समीकरणों की आवश्यकता होती है। अतः समीकरणों Δ^0_0 , Δ^1_0 , Δ^2_0 , को शून्य के समान रखकर हल करने से अज्ञात मान प्राप्त हो जाते हैं। यदि दो मान अज्ञात हों तो केवल $\Delta^0_0 = 0$ और $\Delta^1_0 = 0$ रखकर दो समीकरण प्राप्त हो जाते हैं जिनको हल करके अज्ञात Y मानों के प्राकृतिक मान द्विपद विस्तार विधि द्वारा ज्ञात हो जाते हैं।

उदाहरण 17.4 निम्न मारणी में बच्चों की आयु तथा उनकी ऊँचाई दो गई है—

आयु वर्षों में	X	ऊँचाई (से.मी. में)	Y
2	X_0	48	Y_0
4	X_1	55	Y_1
6	X_2	?	Y_2
8	X_3	95	Y_3
10	X_4	?	Y_4
12	X_5	112	Y_5

6 वर्ष तथा 10 वर्ष आयु के बच्चों की ऊँचाई का आकलन द्विपद विस्तार विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं—

यहाँ Y के दो मान बताते हैं अतः दो समीकरणों का सेना होगा। यहाँ हमने विधि Δ^4_0 व Δ^5_0 सेना उपयुक्त है। समीकरण (17.3) व (17.4) द्वारा,

$$Y_4 - 4Y_3 + 6Y_2 - 4Y_1 + Y_0 = 0 \quad \dots (1)$$

$$Y_5 - 5Y_4 + 10Y_3 - 10Y_2 + 5Y_1 - Y_0 = 0 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) व (2) में Y के मान रखने पर,

$$Y_4 - 4 \times 95 + 6 \times Y_2 - 4 \times 55 + 48 = 0$$

$$Y_4 + 6Y_2 = 552 \quad \dots (3)$$

$$112 - 5Y_4 + 10 \times 95 - 10Y_2 + 5 \times 55 - 48 = 0$$

$$5Y_4 + 10Y_2 = 1289 \quad \dots (4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर,

$$5Y_4 + 30Y_2 = 2760$$

$$5Y_4 + 10Y_2 = 1289$$

$$\begin{array}{r} \underline{\quad \quad \quad} \\ \underline{\quad \quad \quad} \\ 20Y_2 = 1471 \end{array}$$

$$\therefore \hat{Y}_2 = 73.6$$

\hat{Y}_2 का मान समीकरण (4) में रखने पर,

$$5\hat{Y}_4 = 1289 - 736$$

$$\hat{Y}_4 = \frac{386}{5} = 60.6$$

(3) ग्लूटन की विधियाँ

(क) ग्लूटन की घणनामी घनत्व विधि—इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में ही सकता है जबकि स्वतन्त्र चर के मान समान्तर ध्रेणी में धारणी क्रम में हो। हमने द्वारा घनत्वेशन और बहिर्वेशन दोनों ही किये जा सकते हैं। धरणी Y का आकलन X के किसी भी मान के लिए किया जा सकता है। यह विधि इस सिद्धान्त पर आधारित है कि दिए हुए Y के प्रेक्षणों से घनत्व ज्ञात किये जा सकते हैं और इन घनत्वों की सहायता में Y के मानों का आकलन किया जा सकता है। अतः इस विधि से घनत्वों एवं घनत्वों की सारणी बनानी होगी है और इन घनत्वों को ग्लूटन के सूत्र में रखकर दिये हुए X के लिए Y का आकलन कर लिया जाता है।

माना कि पाँच युक्त प्रेक्षण $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4)$ दिये हुए हैं।

(सारणी 17.1) प्रत्तरों के लिए चारली जबकि पाँच प्रेषण ज्ञात हैं

X	Y	कालर (Δ)			
		Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
X_0	Y_0	$Y_1 - Y_0 = \Delta^1_0$	$\Delta^1_1 - \Delta^1_0 = \Delta^2_0$		
X_1	Y_1	$Y_2 - Y_1 = \Delta^1_1$	$\Delta^1_2 - \Delta^1_1 = \Delta^2_1$	$\Delta^2_1 - \Delta^2_0 = \Delta^3_0$	
X_2	Y_2	$Y_3 - Y_2 = \Delta^1_2$	$\Delta^1_3 - \Delta^1_2 = \Delta^2_2$	$\Delta^2_2 - \Delta^2_1 = \Delta^3_1$	$\Delta^1_1 - \Delta^3_0 = \Delta^4_0$
X_3	Y_3				
X_4	Y_4				

इसी प्रकार की मापनी विधि की सुदूर प्रेरणा के लिए दूसरे की याचकी है। यदि कुल n ही तो Δ की मात्रा $(n-1)$ होती प्रसंग्य चर $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots, \Delta^{n-1}$ मान सकते हैं। मापनी के दिने हुए चरों को स्थल सूत्र में रखकर Y का प्राकृतिक मान ज्ञान कर सकते हैं—

$$\hat{Y} = Y_0 + \binom{x}{1} \Delta^1_0 + \binom{x}{2} \Delta^2_0 + \binom{x}{3} \Delta^3_0 + \dots + \binom{x}{k} \Delta^k_0 \quad \dots (17.7)$$

जहाँ $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Y_0 प्रारम्भी श्रेणी के प्रथम प्रेरित मान है।

\hat{Y} वह मान है जिसका दिने हुए X के लिए प्राकृतिक करता है और कहा

$$x = \frac{(X \text{ का वह मान जिसके लिए प्रारम्भी श्रेणी में } Y \text{ का प्राकृतिक करता है}) - X \text{ का प्रथम मान } (X_0)}{\text{दो } X \text{ मानों का अन्तर}}$$

$$= \frac{X' - X_0}{X_1 - X_0} \quad \dots (17.8)$$

इस विधि का प्रयोग उस स्थिति में उपयुक्त है जबकि X का वह मान जिसके लिए समवेत करना है श्रेणी के प्रारम्भ में ही हो। इसका कारण यह है कि सूत्र (17.7) में केवल अग्रतः अन्तरों (Lead og differences) का ही प्रयोग किया गया है। अतः इस विधि द्वारा Y का प्राकृतिक मान, X के उस मान के लिए जो श्रेणी के अग्रतः अन्तर में ही या अतिवेत के लिए प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 17.5 : एक कक्षा में विद्यार्थियों के मासिकी की परीक्षा में प्राप्ति अंकों का काल निम्न प्रकार था—

प्राप्ति : X	श्रेणी अन्तर : Y
30 से कम	2
40 से कम	5
50 से कम	17
60 से कम	31
70 से कम	35

जो विद्यार्थियों की कक्षा जिनके प्राप्ति 45 से कम है सुदूर की प्रारम्भी विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं—

पहले घन्तरों के लिए सारणी तैयार की,

X	Y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
30	2				
		$\Delta^1_0 = 3$			
40	5		$\Delta^2_0 = 9$		
		$\Delta^1_1 = 12$		$\Delta^3_0 = -7$	
50	17		$\Delta^2_1 = 2$		$\Delta^4_0 = -5$
		$\Delta^1_2 = 14$		$\Delta^3_1 = -12$	
60	31		$\Delta^2_2 = -10$		
		$\Delta^1_3 = 4$			
70	35				

$$\text{और } x = \frac{45 - 30}{40 - 30} = \frac{15}{10} = 3/2$$

सूत्र (17.7) द्वारा, $X = 45$ के लिए Y का आकलित मान है

$$Y \approx 2 + \binom{3/2}{1} 3 + \binom{3/2}{2} 9 + \binom{3/2}{3} (-7) \\ + \binom{3/2}{4} (-5).$$

$$\approx 2 + 3/2 \cdot 3 + \frac{3/2(3/2-1)}{1 \cdot 2} 9 + \frac{3/2(3/2-1)(3/2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-7)$$

$$+ \frac{3/2(3/2-1)(3/2-2)(3/2-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (-5)$$

$$\approx 2 + 9/4 + 27/8 + 7/16 - 15/128$$

$$\approx 2 + 2.25 + 3.38 + 0.44 - 0.12$$

$$\approx 7.95 \approx 8$$

अतः विद्यार्थियों की संख्या, जिनके प्राप्तांक 45 से कम हैं, 8 है।

(ख) न्यूटन-गैसस की अग्रवर्ती विधि—यदि Y का आकलन, श्रेणी के बीच के किसी X -मान के लिए करना हो तो इन विधि का प्रयोग करना उचित है। इसके लिए भी मानों का समान्तर श्रेणी में होना आवश्यक है। इस विधि द्वारा Y के आकलन के लिए सूत्र,

$$Y = Y_0 + \binom{x}{1} \Delta^1_0 + \binom{x}{2} \Delta^2_{-1} + \binom{x+1}{3} \Delta^3_{-1} + \binom{x+1}{4} \Delta^4_{-1} + \dots \quad \dots (17.9)$$

है। इस सूत्र में अन्तर्वेशन के लिए दिये गये X -मान में पिछले मान को X_0 इनमें पिछले मानों की क्रमशः $X_{-1}, X_{-2}, X_{-3}, \dots$ आदि से निरूपित करते हैं और X_0 के बाद के

X-मानों को क्रमश X_1, X_2, X_3, \dots द्वारा निरूपित करते हैं। इन X मानों के तदनुसार Y-मानों को $Y_0, Y_{-1}, Y_{-2}, Y_{-3}, \dots$ और Y_1, Y_2, Y_3, \dots द्वारा निरूपित करते हैं। अन्तरों $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ के लिए सारणी न्यूटन की प्रथमो अन्तर विधि के लिए दी गई सारणी की भांति, तैयार कर ली जाती है। इस सारणी में $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$ आदि अन्तरों के स्तम्भ में अन्तर Δ^1_0, Δ^1_1 या $\Delta^2_0, \Delta^2_1, \Delta^3_1, \dots$ में अनुमान 0, 1, 2, 3, ... के स्थान पर Y के तदनुसार अनुमान -2, -1, 0, 1, 2, ... प्रयोग किये जाते हैं। यह सकेतन विधि सारणी (17.2) का देव कर और स्पष्ट हो जायेगी।

यही

$$x = \frac{\text{अन्तर्वेशन के लिए X का मान} - X_0 \text{ का मान जो दम स्थिति में हो}}{\text{X-मानों का समान्तर}} \dots (17.10)$$

सूत्र (17.9) में Y_0, x और अन्तरों के मानों का प्रतिस्थापन करके Y का परिचयन कर लिया जाता है। इस विधि द्वारा वही परिणाम प्राप्त होते हैं जो कि न्यूटन की प्रथमो अन्तर विधि द्वारा प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 17.6 माना कि फायरोरम की चार मात्राओं के लिए प्रति घूण्ड (10 × 1.5 वर्ग मी०) भूमे का भार (किगोवाम) निम्न प्रकार था —

फायरोरम की मात्रा (किगो प्रति हेक्टर) X	प्रति घूण्ड भूमे का भार (किगोवाम) Y
0	9.6
15	7.2
30	9.1
45	7.3

25 किगो प्रति हेक्टर फायरोरम की मात्रा के लिए भूमे की मात्रा का सार्वजन न्यूटन ताल की सववर्ती विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञान कर सकते हैं —

सारणी 17.2 के समरूप अन्तरों के लिए सारणी बनाई,

X	Y	Δ^1	अन्तर Δ^2	Δ^3
0 X_{-1}	9.6 Y_{-1}			
15 X_0	7.2 Y_0	$\Delta^1_{-1} = -2.4$	$\Delta^2_{-1} = 4.3$	$\Delta^3_{-1} = -8.0$
30 X_1	9.1 Y_1	$\Delta^1_0 = 1.9$	$\Delta^2_0 = 3.7$	
45 X_2	7.2 Y_2	$\Delta^1_1 = -1.8$		

(सारणी 17.2) अन्तरों के लिए सारणी जबकि $X_3 < X_2 < X_1$ और केवल पाँच प्रेक्षण प्राप्त हैं

X	Y	संकेतिक X	संकेतिक Y	अन्तर			
				Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
X_1	Y_1	X_{-2}	Y_{-2}	$Y_{-1} - Y_{-2} = \Delta^1_{-2}$	$\Delta^1_{-1} - \Delta^1_{-2} = \Delta^2_{-2}$	$\Delta^2_{-1} - \Delta^2_{-2} = \Delta^3_{-2}$	$\Delta^3_{-1} - \Delta^3_{-2} = \Delta^4_{-2}$
X_2	Y_2	X_{-1}	Y_{-1}	$Y_0 - Y_{-1} = \Delta^1_{-1}$	$\Delta^1_{0} - \Delta^1_{-1} = \Delta^2_{-1}$	$\Delta^2_{0} - \Delta^2_{-1} = \Delta^3_{-1}$	
X_3	Y_3	X_0	Y_0	$Y_1 - Y_0 = \Delta^1_0$	$\Delta^1_1 - \Delta^1_0 = \Delta^2_0$		
X_4	Y_4	X_1	Y_1	$Y_2 - Y_1 = \Delta^1_1$			
X_5	Y_5	X_2	Y_2				

सूत्र (17.10) द्वारा,

$$x = \frac{25 - 15}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

यस सूत्र (17.9) द्वारा Y का अन्तर्वेशन मान,

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 7.2 + \binom{2/3}{1} 1.9 + \binom{2/3}{2} \times 4.3 + \binom{2/3+1}{3} \times (-8.0) \\ &= 7.2 + 2/3 \times 1.9 + \frac{2/3(2/3-1)}{1 \cdot 2} \times 4.3 \\ &\quad + \frac{(2/3+1)(2/3)(2/3-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times (-8.0) \\ &= 7.2 + 1.27 - \frac{4.3}{9} + \frac{40}{81} \\ &= 7.20 + 1.27 - 0.48 + 50 \\ &= 8.49 \end{aligned}$$

यस अन्तर्वेशन द्वारा प्राप्त Y का, $X=25$ के तदनुसार, आकस्मिक मान 8.49 किलो प्रति भूतण्ड है।

(ग) ग्यूरन शास प्रत्यक्ष विधि—इस विधि का प्रयोग उम स्थिति में करते हैं जबकि Y का आकस्मिक X के उम मान के लिए करना हो जो भेरी के अंतर के बीच का मान हो। इस विधि के लिए भी X के मानों में समान अंतराल होना आवश्यक है।

Y के आकस्मिक के लिए सूत्र है—

$$\hat{Y} = Y_0 - \binom{x}{1} \Delta^1_{-1} + \binom{x+1}{2} \Delta^2_{-1} - \binom{x+1}{3} \Delta^3_{-2} + \binom{x+1}{4} \Delta^4_{-3} - \dots \quad \dots(17.11)$$

अन्तर्वेशन के लिए दिये हुए X के सुरत बाद भेरी में जाने वाले मान को X_0 माना जाता है और इसके तदनुसार Y का मान Y_0 दिया जाता है। अंतरों Δ के ज्ञान करने के लिए सारणी (17.3) बताने है।

यहाँ

$$x = \frac{X_0 \text{ का मान जो इस स्थिति में हो } - X \text{ का वह मान जिसे लिए अन्तर्वेशन ज्ञान करना हो}}{X \text{ मानों में समानंतर}} \quad \dots(17.12)$$

सूत्र (17.11) में विभिन्न पदों के मान रखकर Y के मान का परिचयन कर लेते हैं।

(सारणी 17.3) अन्तरों के लिए सांख्यिकी जबकि $X_1 < X < X_3$, तथा Y और X पर छ प्रेक्षण प्राप्त हैं

X		Y		अन्तर				
				Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
X_1	Y_1	X_{-1}	Y_{-1}	$Y_{-3} - Y_{-4} = \Delta^1_{-4}$				
X_2	Y_2	X_{-2}	Y_{-2}	$Y_{-2} - Y_{-3} = \Delta^1_{-3}$	$\Delta^1_{-3} - \Delta^1_{-4} = \Delta^2_{-4}$	$\Delta^2_{-3} - \Delta^2_{-4} = \Delta^3_{-4}$		
X_3	Y_3	X_{-3}	Y_{-3}	$Y_{-1} - Y_{-2} = \Delta^1_{-2}$	$\Delta^1_{-2} - \Delta^1_{-3} = \Delta^2_{-3}$	$\Delta^2_{-2} - \Delta^2_{-3} = \Delta^3_{-3}$	$\Delta^3_{-2} - \Delta^3_{-3} = \Delta^4_{-3}$	
X_4	Y_4	X_{-4}	Y_{-4}	$Y_0 - Y_{-1} = \Delta^1_{-1}$	$\Delta^1_{-1} - \Delta^1_{-2} = \Delta^2_{-2}$	$\Delta^2_{-1} - \Delta^2_{-2} = \Delta^3_{-2}$	$\Delta^3_{-1} - \Delta^3_{-2} = \Delta^4_{-2}$	
X_5	Y_5	X_{-5}	Y_{-5}	$Y_1 - Y_0 = \Delta^1_0$	$\Delta^1_0 - \Delta^1_{-1} = \Delta^2_{-1}$			
X_6	Y_6	X_{-6}	Y_{-6}					

उदाहरण 17.7 X^2 बटन के लिए दो गद एक सांख्यिकीय सारणी में 5% साधकता स्तर पर विभिन्न स्वतंत्रता कोटि के लिए सारणीबद्ध मान निम्न प्रकार हैं —

स्वतंत्रता कोटि X	सारणीबद्ध मान Y
10	18.31
22	33.92
34	48.60
46	62.83
58	76.78
70	90.53

55 दृ० व 10 के लिए Y^2 का सारणीबद्ध मान गूटन गता प्रत्यक्ष विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सारणी (17.3) के समकक्ष घनरा के लिए सारणी (17.4) बनाइए।

गूटन (17.12) द्वारा

$$x = \frac{58 - 55}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

घन $X=55$ के लिए Y का गूटन (17.11) द्वारा प्राकृतिक मान

$$\hat{Y} = 76.78 - \left(\frac{1}{4}\right) \times 13.95 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times (-0.20) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) \times (0.08)$$

$$+ \left(\frac{1}{4} + 1\right) \times (-0.09) - \left(\frac{1}{5} + 1\right) \times (0.22)$$

$$= 76.78 - \frac{13.95}{4} - \frac{(\frac{1}{2} + 1) \frac{1}{2}}{12} \times (0.20)$$

$$- \frac{(\frac{1}{3} + 1) \frac{1}{3} (\frac{1}{3} - 1)}{123} \times (0.08)$$

$$- \frac{(\frac{1}{2} + 1) \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) (\frac{1}{2} - 2)}{1234} \times (0.09)$$

$$- \frac{(\frac{1}{4} + 1) \frac{1}{4} (\frac{1}{4} - 1) (\frac{1}{4} - 2) (\frac{1}{4} - 3)}{12345} \times (0.22)$$

$$= 76.78 - 3.49 - \frac{1}{32} + \frac{05}{16}$$

— घन सपु सहायते जा कि उद्देश्याय है।

सारणी 17.4 [सारणी (17.3) के समस्त प्रन्तरो के लिये सारणी]

X	Y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
10	X_{-4}					
	Y_{-4}					
	18.31					
	Y_{-3}	$\Delta^1_{-4} = 15.61$	$\Delta^2_{-1} = -0.93$	$\Delta^3_{-4} = 0.48$	$\Delta^4_{-1} = -0.31$	$\Delta^5_{-1} = .22$
22	X_{-3}					
	33.92	$\Delta^1_{-3} = 14.68$	$\Delta^2_{-3} = -0.45$	$\Delta^3_{-3} = 0.17$	$\Delta^4_{-3} = -.09$	
34	X_{-2}					
	48.60	$\Delta^1_{-2} = 14.23$	$\Delta^2_{-2} = -0.28$	$\Delta^3_{-2} = 0.08$		
46	X_{-1}					
	62.83	$\Delta^1_{-1} = 13.95$	$\Delta^2_{-1} = -0.20$			
58	X_0					
	76.78	$\Delta^1_0 = 13.75$				
70	X_1					
	90.53					
	Y_1					

$$= 76.78 - 3.49 \cdot 03 + 0.03$$

$$= 73.263$$

ग्रुटन की विभाजित अन्तर विधि इस विधि का प्रयोग उग स्थिति में करते हैं जब कि चर X में अन्तराल समान नहीं होता है। X के दिये हुए मान के लिए Y का प्राक्लन निम्न सूत्र द्वारा करते हैं —

$$\hat{Y} = Y_0 + (X - X_0)\delta^1_0 + (X - X_0)(X - X_1)\delta^2_0 + (X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)\delta^3_0 + \dots \dots (17.13)$$

जब कि दस सूत्र में X वह मान है जिसके लिए Y का प्राक्लन करना है। X_0, X_1, X_2, \dots द्वारा ही क्रम में चर के मान हैं और $\delta^1_0, \delta^2_0, \delta^3_0, \dots$ विभाजित अन्तरों के मान हैं जिनका परिक्लन निम्न सारणी के अनुसार किसी भी स्थिति में कर सकते हैं।

(सारणी 17.5) विभाजित अन्तरों के लिए सारणी जबकि चार प्रश्न हैं

X	Y	Δ^1	Δ^2	Δ^3
X_0	Y_0			
		$\frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} = \delta^1_0$		
X_1	Y_1		$\frac{\delta^1_1 - \delta^1_0}{X_2 - X_0} = \delta^2_0$	
		$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \delta^1_1$	$\frac{\delta^1_2 - \delta^1_1}{X_3 - X_1} = \delta^2_1$	$\frac{\delta^2_1 - \delta^2_0}{X_3 - X_0} = \delta^3_0$
X_2	Y_2			
		$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \delta^1_2$		
X_3	Y_3			

विभाजित अन्तरों की सारणी X प्रश्नों की किसी भी संख्या के लिए तैयार कर सकते हैं। सूत्र (17.13) का प्रयोग करके \hat{Y} का दिये हुए X के मान के लिए परिक्लन कर सकते हैं।

उदाहरण 17.8 महत्कारिता-सांश्लेन की प्रगति जानने के हेतु एक संवक्षण द्वारा प्राप्त साहकारी समितियों की संख्या और घणित बज्रों की राशि (दस लाख रुपये में) निम्न की :-

सहकारी समितियों की संख्या X	अग्रिम कर्ज (दस लाख रुपये में) Y
26	50
52	111
83	120
93	170
101	211

हो। 90 सहकारी समितियों के लिए अग्रिम कर्ज की अनुमानित राशि न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि द्वारा निम्न प्रकार मारपी (17.6) की गहायता से ज्ञात कर सकते हैं—
सूत्र (17.13) द्वारा Y का आकलित मान,

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 50 + (90-26)(2.35) + (90-26)(90-52)(-0.041) \\ &\quad + (90-26)(90-52)(90-83)(0.0024) + (90-26)(90-52) \times \\ &\quad (90-83)(90-93)(-0.00006) \\ &= 50 + 150.40 - 99.712 + 17204 \times 0.0019 - 51072 \times (-0.00006) \\ &= 50 + 150.40 - 99.712 + 41.29 + 3.064 \\ &= 145.04 \end{aligned}$$

अतः 90 सहकारी समितियों के लिए आकलित मान अग्रिम कर्ज की राशि 145.04 (दस लाख रुपये) है।

सम्राज विधि : इस विधि द्वारा अन्तर्वेशन या बाहर्वेशन उस स्थिति में करना उपयुक्त है जबकि चर X के मान में अन्तराल असमान है। यह विधि न्यूटन की विभाजित अन्तर विधि जैसी है। X चर के किसी भी मान के लिए Y का आकलन निम्न सम्राज सूत्र की सहायता में कर सकते हैं—

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \\ &+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \\ &+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_3-x_n)} + \dots \dots \end{aligned}$$

सारणी (17.6) : सारणी (17.5) की भांति विभाजित अन्तरों के लिए विभिन्न सारणी संवार की

X	Y	Δ^1	विभाजित अन्तर Δ^2	Δ^3	Δ^4
26	50	Y_0			
52	111	Y_1	$\frac{64}{26} = 2.35 = \delta^1_0$	$\frac{-2.32}{57} = -0.041 = \delta^2_0$	$\frac{0.162}{67} = 0.0024 = \delta^3_0$
83	120	Y_2	$\frac{9}{31} = 0.03 = \delta^1_1$	$\frac{4.97}{41} = 0.121 = \delta^2_1$	$\frac{-0.120}{49} = -0.0024 = \delta^3_1$
93	170	Y_3	$\frac{50}{10} = 5.00 = \delta^1_2$	$\frac{-12}{18} = 0.0012 = \delta^2_2$	$\frac{-0.048}{75} = -0.0006 = \delta^3_2$
101	211	Y_4	$\frac{41}{8} = 5.12 = \delta^1_3$		

$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \dots (17.14)$$

उपर्युक्त सूत्र में x वह मान है जिसके लिए Y का आकलन करना है। $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ चर X पर दिये हुए आरोही क्रम में मान हैं और $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ चर Y पर $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ के तदनुसार प्राप्त मान हैं।

सराज सूत्र द्वारा X के किसी भी मान के लिए किन्हीं भी दिये हुए प्रेक्षणों की महत्ता में Y का आकलन कर सकते हैं अर्थात् इस सूत्र के प्रयोग के लिए किसी प्रकार के प्रतिद्वन्द्व नहीं हैं। फिर भी यह सूत्र कार्यविधि में कठिन होने के कारण अधिक चलन में नहीं है।

उदाहरण 17.9 निम्न सारणी में एक वर्ष के कम आयु के बच्चों की आयु (महीनों में) और उनके तदनुसार भार दिये हुए हैं।

आयु (महीनों में) X		भार (बिन्दुघन में) Y	
1	x_0	2.5	y_0
3	x_1	4.0	y_1
5	x_2	5.0	y_2
9	x_3	6.5	y_3
10	x_4	7.0	y_4

छ मास की आयु के बच्चों के भार का आकलन सराज-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

सूत्र (17.14) के अनुसार $X=6$ के लिए Y का आकलित मान,

$$\begin{aligned} Y &= 2.5 \times \frac{(6-3)(6-5)(6-9)(6-10)}{(1-3)(1-5)(1-9)(1-10)} \\ &+ 4.0 \times \frac{(6-1)(6-5)(6-9)(6-10)}{(3-1)(3-5)(3-9)(3-10)} \\ &+ 5.0 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-9)(6-10)}{(5-1)(5-3)(5-9)(5-10)} \\ &+ 6.5 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-10)}{(9-1)(9-3)(9-5)(9-10)} \\ &+ 7.0 \times \frac{(6-1)(6-3)(6-5)(6-9)}{(10-1)(10-3)(10-5)(10-9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2.5 \times \frac{1}{16} - 4.0 \times \frac{5}{14} + 5.0 \times \frac{9}{8} + 6.5 \times \frac{5}{16} - 7.0 \times \frac{1}{7} \\
 &= 0.156 - 1.428 + 5.625 + 2.031 - 1 \\
 &= 5.384
 \end{aligned}$$

अतः 6 मास की आयु के बच्चों का आकलित भार 5.384 किगो है।

अन्तिम टिप्पणी अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन का प्रयोग वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र में अधिक होता है। जनगणना या अन्य देशव्यापी ग्याम का प्रयोग करने किमी निश्चित काल में धार्मिक चर का आकलन भी इस विधि द्वारा किया जा सकता है। आकलन के हेतु किसी भी विधि या सूत्र का प्रयोग ग्याम के प्रसार पर निर्भर करता है। सूत्र का चयन करते समय सांख्यिकी विद् को पूर्ण गाद्यपानी वर्तनी चाहिये अन्यथा आकलनों के मान अनुद्ध प्राप्त होते हैं।

प्रश्नावली

1. बताइए कि अन्तर्वेशन और बहिर्वेशन में से किसने लिए आकलित मान अधिक परिशुद्ध होते हैं? अपने उत्तर की सध्यों के आधार पर पुष्टि कीजिये।
2. न्यूनतम की विधियों में से किसे विधि द्वारा बहिर्वेशन कर सकते हैं? उस विधि का सक्षित विकरण भी दीजिये।
3. अन्तर्वेशन तथा बहिर्वेशन के उपयोग बताइए।
4. जनगणना वर्षों के बीच के वर्षों से जनगणना का पता किस प्रकार लगा सकते हैं, उदाहरण सहित समझाइये।
5. अमेरिका में मट्टी के बोटले का माध्य भाव (बालर प्रति टन) विभिन्न वर्षों में निम्न प्रकार था :

वर्ष :	1951	1954	1957	1960
बोटले का भाव	19.09	14.75	15.00	30.35

(बालर प्रति टन)

वर्ष 1956 में बोटले के माध्य भाव का आकलन कीजिये।

6. भारत राज्य में औद्योगिक कार्य जानने वाले देशों के अर्थशास्त्रियों की मध्या विभिन्न वर्षों में निम्न थी :

वर्ष X	बच्चा की मरता (,000 प्रति) Y
1960	77.6
1962	109.6
1964	129.9
1966	152.4
1968	248.2

वर्ष 1967 तथा 1970 के लिए उचित विधियों का प्रयोग करके, बेकारों की संख्या का आकलन कीजिये।

7. कनाडा में खेती के अनिश्चित अन्य काम करने वालों का साप्ताहिक वेतन (डालर में) विभिन्न वर्षों में निम्न था —

वर्ष	1959	1962	1965	1968
साप्ताहिक वेतन (डालर में)	73.4	80.54	91.01	109.88

वर्ष 1967 के लिए घनत्वरेखण द्वारा साप्ताहिक वेतन ज्ञात कीजिये।

8. निम्न सारणी का न्यास प्रयोग करके 22 वर्षों की आयु पर प्रत्याशित आयु (Expectation of Life) का आकलन कीजिये।

आयु (वर्षों में)	15	20	25	30	35
प्रत्याशित आयु (वर्षों में)	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

(भागरा, एम० ए० 1964)
[उत्तर : 27.85 वर्ष]

9. निम्न सारणी में भारत में सीमेन्ट का उत्पादन हजार टनों में कुछ वर्षों के लिए दिया गया है। अप्राप्त मान को ज्ञात कीजिये।

X :	1946	1948	1950	1952	1954	1956
Y :	39	85	?	151	264	388

(आई० सी० इन्स्टी० ए० 1966)

(उत्तर : द्विपद विस्तार विधि द्वारा आकलित मान = 96.4)

10. ब्रिटिश साम्राज्य में कर्मचारियों को दी गई हानि पूति (Compensation) की राशि (पौंडों में) विभिन्न वर्षों में निम्न प्रकार थी। दो वर्षों के लिए घनात मानों का आकलन कीजिये।

वर्ष :	1963	1964	1965	1966	1967	1968
हानि पूति की राशि (,000 पौंडों में)	17.3	18.2	?	21.2	?	23.5

11. निम्न न्यास के द्वारा उन व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिये जिनकी आय 60 रुपये और 70 रु० के बीच में है।

वैतन रूपयो मे	40 से कम	40-60	60-80	80-100	100-120
व्यक्तियो की सख्या	250	12	100	70	50

(हजारों में)

(भागरा, एम० काम० 1957)

[उत्तर ग्युटन विधि द्वारा आकलन करने पर सख्या 53.6 हजार ध्यति]

- 12 लघाज-मूत्र द्वारा अपराधियो की सख्या ज्ञात कीजिये जिनकी आयु 35 वर्ष से कम है।

वर्षों से कम

आयु	25	30	40	50
अपराधियो की सख्या	52	67.3	84.1	94.4

(नागपुर, बी० काम० 1963)

[उत्तर : 77.4%]

- 13 उन बल्पनाओ का बचन कीजिये जिनके आचार पर सस्याओ का घन्तर्वेशन किया जाता है।

निम्न सारणी एक प्रकार की 1000 रु० की बीमा पालिसी पर वार्षिक बिस्त को प्रदर्शित करती है :-

आयु (जन्म दिवस से पात) वर्ष	25	30	35	40	45
वार्षिक बिस्त (रूपयो मे)	41.75	42.56	44.25	47.19	52.19

उपर दिये आँकड़ो को प्रयोग करके, 27 वर्ष की आयु पर 1000 की एक पालिसी पर वार्षिक बिस्त का आकलन कीजिये।

(जोधपुर, एम० काम० 1968)

[उत्तर . 42.34 रूपये]

14. यदि l_x जीवन-सारणी (Life Table) मे आयु पर जीवितों की सख्या को निरूपित करता है, तदात द्वारा क्या सम्भव l_x के परिशुद्ध मान ज्ञात कीजिये जबकि मान $x=35, 42$ और 47 हैं।

$$l_{20}=512, l_{30}=439, l_{40}=346, l_{50}=243$$

(माई० ए० एम० 1948)

[उत्तर $l_{35}=394, l_{42}=326, l_{47}=274$]

15. ज्ञात है,

$$\log 654 = 2.8156, \log 659 = 2.8189$$

$$\log 658 = 2.8182, \log 661 = 2.8202$$

घन्तर्वैगन के लिए सप्रांज-सूत्र का प्रयोग करके $\log 656$ ज्ञात कीजिये ।

(भागरा, 1961)

[उत्तर : $\log 656 = 2.8168$]

टिप्पणी : उपर्युक्त प्रश्नावली में दिये परीक्षार्थों के सभी प्रश्न अंग्ल भाषा में थे जिनका यहाँ हिन्दी अनुवाद दिया गया है ।

□□□

अनेको अध्ययनों में कई चरों पर एक साथ प्रेक्षण लेने होते हैं और इनका विश्लेषण भी एक साथ करना होता है। अतः इन चरों के सम्मिलित अध्ययन के लिए इनके सम्युक्त बंटन को जानना प्रायः आवश्यक हो जाता है। अनेक बहुचर बंटनों में से बहुचर प्रसामान्य बंटन सर्वाधिक प्रयोग में आता है। इसके प्रतिरिक्त कुछ अन्य मुख्य बहुचर बंटनों का भी इस अध्याय में वर्णन दिया गया है। बहुचर विश्लेषण की कुछ विधियाँ जैसे बहुसमाश्रयण, बहुसहसम्बन्ध गुणांक, प्रांशिक सहसम्बन्ध गुणांक आदि का वर्णन अध्यायों 13 व 14 में दिया जा चुका है।

बहुचर प्रसामान्य बंटन फलन

जिस प्रकार अनेको सांख्यिकीय अध्ययनों में एक चर के लिए प्रसामान्य बंटन सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण है उसी प्रकार एक से अधिक चरों के सम्युक्त प्रसामान्य बंटन की बहुधा आवश्यकता होती है। इस अध्याय में इस बंटन के विषय में संक्षेप में विवरण दिया गया है।

माना कि K पारस्परिक चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$ हैं और इन्हें $(K \times 1)$ क्रम के स्तम्भ सदिश (Vector), \underline{X} , द्वारा निरूपित किया गया है अर्थात्

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix}$$

और यदि सदिश, \underline{X}' निम्न होता है :-

$$\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_K)$$

सदिश \underline{X} के बंटन को K -चर ग्युस्समयीय प्रसामान्य बंटन (K -variate nonsingular normal distribution) कहते हैं यदि \underline{X} का \underline{x} पर प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है और इसे $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_K) \equiv f_{\underline{X}}(\underline{x})$ द्वारा सूचित करते हैं।

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu)'\Sigma^{-1}(\underline{x} - \mu)\right\}$$

$$\dots (18.1)$$

जहाँ $-\infty < x_i < \infty$ ($i=1, 2, 3, \dots, K$)

$\underline{\mu}$ और Σ इस बटन के प्राचल हैं। जहाँ

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_K \end{bmatrix} \quad -\infty < \mu_i < \infty$$

और Σ एक सममित घनात्मक निश्चित आव्यूह है जिसका घन $(K \times K)$ है। अर्थात्

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \dots \sigma_{1K} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \dots \sigma_{2K} \\ & & \sigma_{33} \dots \sigma_{3K} \\ & & & \vdots \\ & & & & \sigma_{KK} \end{bmatrix}$$

सादृश \underline{X} के \underline{x} पर प्रामाण्य बटन को $N_K(\underline{\mu}, \Sigma)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

यदि आवश्यक हो तो Σ का सहसम्बन्ध गुणाकों के पदों में निरूपण निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

यह अध्याय (14) के प्रारम्भ में दिया जा चुका है कि किन्हीं दो चरों X_1 व X_2 में सहसम्बन्ध गुणाक,

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{या} \quad \sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

होता है। अतः

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \dots \rho_{1K}\sigma_1\sigma_K \\ & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \dots \rho_{2K}\sigma_2\sigma_K \\ & & \sigma_3^2 \dots \rho_{3K}\sigma_3\sigma_K \\ & & & \vdots \\ & & & & \sigma_K^2 \end{bmatrix}$$

यदि K चर परस्पर स्वतन्त्र हो तो $\rho_{ij} = 0$ होता है और इस स्थिति में Σ एक विकर्ण आव्यूह हो जाता है और \underline{X} का \underline{x} पर प्रायिकता घनत्व फलन, K एकविकर

प्रणामात्म्य चरों (univariate normal variates) के प्रायिकता घनत्व फलनों के गुणन-फल के समान होता है।

यदि प्रत्येक $\mu_i = 0$ और Σ एक एकांक आव्यूह (unit matrix) हो तो प्रायिकता घनत्व फलन $f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ निम्न हो जाता है —

$$f_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = (2\pi)^{-\frac{K}{2}} e^{-\frac{1}{2} \underline{x}' \underline{x}} \quad \dots (18.2)$$

इस विधि में \underline{X} के बंटन को $N_k(0, I_k)$ द्वारा सूचित करते हैं।

प्रमेय 1. k -चर प्रणामात्म्य बंटन में किसी एक चर का उपांग बंटन, एकचर प्रणामात्म्य बंटन f समान होता है।

निर्दिष्ट एक प्रमेय का पक्षी चर X_1 का उपांग बंटन ज्ञान करके निम्न दिया गया है। इसी प्रकार किसी भी चर X_i के लिए एक प्रमेय को निम्न कर सकते हैं जहाँ

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

(5.27) के समुच्चय सूत्र द्वारा X_1 का उपांग बंटन निम्न रूप में दिया जा सकता है —

$$E_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})' \Lambda (\underline{x}-\underline{\mu})\right\} dx_2 dx_3 \dots dx_k \quad \dots (18.3)$$

$$\text{जहाँ } \Lambda = \Sigma^{-1} \text{ और } C = \frac{|\Lambda|^{1/2}}{(2\pi)^{k/2}}$$

यदि $(\underline{x}-\underline{\mu})$ और घातांक में आव्यूह Λ का विभाजन करते पर,
 $(\underline{x}-\underline{\mu})' \Lambda (\underline{x}-\underline{\mu}) = [(x_1 - \mu_1), (x_2 - \mu_2)] \times$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{bmatrix} \quad \dots (18.4)$$

जहाँ X_1 का माध्य μ_1 व X_2 का माध्य μ_2 है। यहाँ

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} \quad \text{एवं} \quad \underline{\mu}_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}$$

माना कि,

$$\Lambda = \begin{array}{c} \begin{array}{c|cc} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \hline & \begin{array}{c} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \\ \vdots \\ r_{k1} \end{array} & \begin{array}{c} r_{12} \quad r_{13} \dots r_{1k} \\ r_{22} \quad r_{23} \dots r_{2k} \\ r_{32} \quad r_{33} \dots r_{3k} \\ \dots \\ r_{k2} \quad r_{k3} \dots r_{kk} \end{array} \\ \hline \Lambda_{21} & & \Lambda_{22} \end{array} \\ = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}
 \end{array}$$

A एक सममित घनात्मक निश्चिन्न आव्यूह है।

$\Lambda_{11} = r_{11} > 0$, $A'_{12} = A_{21}$, A_{22} सममित आव्यूह है धार इसका घनित्व है।
(18.4) को निम्न रूप में लिख सकते हैं—

$$\begin{aligned}
 & (\underline{x} - \underline{\mu})' A (\underline{x} - \underline{\mu}) \\
 &= (x_1 - \mu_1) A_{11} (x_1 - \mu_1) + (x_1 - \mu_1) A_{12} (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2) \\
 &+ (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2)' A_{21} (x_1 - \mu_1) + (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2)' A_{22} (\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2) \quad \dots (18.4.1)
 \end{aligned}$$

धर (18.4.1) को इस प्रकार व्यवस्थित किया कि इसमें x_1 के पद \underline{x}_2 से अलग हो जायें।

$$\begin{aligned}
 & (\underline{x} - \underline{\mu})' A (\underline{x} - \underline{\mu}) \\
 &= (x_1 - \mu_1) (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) + [(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2) \\
 &+ A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1)]' A_{22} [(\underline{x}_2 - \underline{\mu}_2) + A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1)] \quad \dots (18.4.2)
 \end{aligned}$$

(18.4.2) में प्रथम पद \underline{x}_2 से मुक्त है। धर. समाकलन (18.3) द्वारा,
 $E_{X_1}(x_1) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1 - \mu_1) (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) \right\} F(\underline{x}_2)$
 $\dots (18.5)$

जबकि

$$\begin{aligned}
 F(\underline{x}_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left[\underline{x}_2 - \left\{ \underline{\mu}_2 - A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1) \right\} \right] \times \right. \\
 &\left. A_{22} \left[\underline{x}_2 - \left\{ \underline{\mu}_2 - A^{-1}_{22} A_{21} (x_1 - \mu_1) \right\} \right] \right] dx_2 dx_3 \dots dx_k \quad \dots (18.6)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|A_{22}|^{1/2} / (\sqrt{2\pi})^{k-1}} \quad \dots (18.6.1)$$

माना कि,

$$\frac{|A_{22}|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^{k-1}} = C_1$$

$$\therefore F(x_2) = \frac{1}{C_1}$$

(18.5) द्वारा,

$$\begin{aligned} g_{X_1}(x_1) &= \frac{C}{C_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1 - \mu_1) (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) \right\} \\ &= \frac{|A|^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^k} \cdot \frac{(\sqrt{2\pi})^{k-1}}{|A_{22}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1 - \mu_1) \times \right. \\ &\quad \left. (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) \right\} \\ &= \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1 - \mu_1) \times \right. \\ &\quad \left. (A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) (x_1 - \mu_1) \right\} \quad \dots (18.7) \end{aligned}$$

$$\therefore |A| = |A_{22}| |A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}|$$

$|A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}|$ एक घटित राशि (scalar quantity) है। इसलिए माना कि

$$(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21}) = \frac{1}{\sigma^2}$$

जो कि एक घनात्मक निश्चित राशि है।

$$\therefore \frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}} = \frac{1}{\sigma}$$

कम (18.7) में $\frac{|A|^{1/2}}{|A_{22}|^{1/2}}$ और $(A_{11} - A_{12} A^{-1}_{22} A_{21})$ के मान रखने पर,

$$g_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_1 - \mu_1)^2 \right\} \dots (18.8)$$

जहाँ $-\infty < x_1 < \infty$

$E_{X_1}(x_1)$, X_1 के प्रसामान्य बंटन के लिए प्राप्तिना घनत्व फलन है। अतः प्रत्येक मिड हई।

द्विचर प्रसामान्य बंटन

यह बहुचर प्रसामान्य बंटन को एक विनिष्ट स्थिति है। जिसमें कि केवल दो चर हैं अर्थात् $K=2$ और

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

जहाँ ρ चरों X_1 व X_2 में सहसम्बन्ध गुणांक है। अतः

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{bmatrix}$$

क्योंकि एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह $A = (a_{ij})$ के प्रतिव्योम का (i, j) वा घटक $a^{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}$ होता है जबकि A_{ji} घटक a_{ji} का सहसंयोजक है और $|A|$, A के सारणिक को निरूपित करता है। अतः (18.1) के अनुसार,

$$f_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)\}(2\pi)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)]\right\}$$

$$\frac{1}{1-\rho^2} \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array} \right] \quad \dots (18.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left\{ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right] \quad \dots (18.9.1)$$

द्विचर वंटन की प्रायिकता विभिन्न पद्धतियों में बहुधा पडती है। यह बहुचर वंटनों में से सरलतम है क्योंकि इसमें केवल दो चर हैं; द्विचर के लिए उदात्त वंटन और प्रतिबंधी वंटन को निम्न रीति से ज्ञान कर सकते हैं।

उदात्त वंटन

यदि X_1, X_2 दो यादृच्छिक प्रमाणात्मक वंटन हों तो X_1 का उदात्त वंटन,

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \dots (18.10)$$

जब कि फलन $f_{X_1}(x_1, x_2)$ सूत्र (18.9.1) द्वारा दिया गया है।

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right\} \right] dx_2 \quad \dots (18.10.1)$$

माना कि

$$\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} = u \quad \text{और} \quad \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} = v$$

$$\therefore dx_1 = \sigma_1 du; \quad dx_2 = \sigma_2 dv$$

$$E_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times (u^2 - 2\rho uv + v^2)\right\} dv \quad \dots(18.10.2)$$

(18.10.2) में जब dv के सम्बन्ध में समाकलन करना है तो u एक स्थिरांक के रूप में लिया जाता है। $(v - \rho u)$ का पूर्ण वर्ग बनाने के हेतु, घातांक में $\rho^2 u^2$ जोड़ने व घटाने पर,

$$E_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times (u^2 - \rho^2 u^2 + v^2 - 2\rho uv + \rho^2 u^2)\right\} dv \quad \dots(18.10.3)$$

$$\therefore E_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{2\pi \sigma_1 \sqrt{(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times (v - \rho u)^2\right\} dv \quad \dots(18.10.4)$$

$$\frac{v - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} = t \quad \text{का प्रतिस्थापन करने पर,}$$

$$dv = \sqrt{1-\rho^2} \cdot dt$$

$$E_{X_1}(x_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{2\pi \sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi} \sigma_1}$$

$$\left\{ \because \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 1 \right\}$$

u के स्थान पर $\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ रखने पर,

$$E_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2} (x_1 - \mu_1)^2\right\} \quad \dots(18.11)$$

स्पष्टतः $f_{X_1}(x_1)$ केवल चर X_1 का प्रायिकता घनत्व फलन है। इसी प्रकार X_2 का उपात बंटन है,

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2)^2\right\} \quad \dots(18.12)$$

यह परिणाम मापदरन मापूणं ज्ञात करने में प्रत्यन्त सहायक है जेमे

$$\mu'_{00} = 1, \mu'_{10} = \mu_1, \mu'_{01} = \mu_2$$

$$\mu'_{20} = \sigma_1^2, \mu'_{02} = \sigma_2^2 \quad \text{आदि}$$

यदि $\rho = 0$ हो तो (18.9) व $f_{X_1}(x_1)$ और $f_{X_2}(x_2)$ का महायता मे,

$$f_X(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \quad \dots(18.13)$$

जहाँ $f_1(x_1) = f_{X_1}(x_1)$ और $f_2(x_2) = f_{X_2}(x_2)$ जो कि X_1 व X_2 स्वतन्त्र होने के लिए प्रतिबन्ध है।

सप्रतिबन्ध वंटन

दो चरों के सप्रतिबन्ध वंटन से कुछ रुचिकर गुण प्राप्त होते हैं। इन गुणों का जानने के हेतु इस वंटन का अध्ययन करना पर्याप्त है। माना कि दो प्रमाणात्मक: बटित चर X_1 और X_2 है और स्थिर X_1 के लिए X_2 का सप्रतिबन्ध वंटन $f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)$ माना करना है। (5.37) के अनुसार,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \quad \dots(18.14)$$

(18.9) व (18.11) के द्वारा $f(x_1, x_2)$ व $f_1(x_1)$ घनत्व फलन ज्ञात है अतः इनको (18.14) में रखने पर,

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{\dots}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2\right\}} \quad \dots(18.15)$$

माना कि

$$\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} = u \quad \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} = v$$

$$\frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (u^2 - 2\rho uv + v^2) \right\}$$

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (v - \rho u)^2 \right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (v - \rho u)^2 \right\} \dots (18.16)$$

u व v का पुनः x_1 व x_2 के पदों में प्रतिस्थापन करने पर,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \times \left\{ \frac{(x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} - \rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_2^2(1 - \rho^2)} \times \left[\lambda_2 - \left\{ \mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1) \right\} \right]^2 \right] \dots (18.161)$$

क्योंकि $x_1, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ व ρ प्रचर हैं और X_2 एक सतत चर है। अतः (18.161)

से स्पष्ट है कि X_2 का बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य $\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x_1 - \mu_1)$ है और प्रसरण $\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ है। इसी प्रकार स्थिर X_2 के लिए X_1 का सप्रतिबन्धी बंटन ज्ञात किया जा सकता है। यह बंटन वही होगा जो कि यदि (18.14) में अनुलग्न 1 और

2 को परस्पर बदलने पर प्राप्त होता है अर्थात्

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. [x_1 - \{\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (x_2 - \mu_2)\}]^2 \right] \quad \dots (18.17)$$

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि बहुचर प्रसामान्य वंटन के उपात तथा सप्रतिबन्धी वंटन भी प्रसामान्य होते हैं।

समाश्रयण-वक्र

उपात और सप्रतिबन्धी वंटन के ज्ञान को, सैद्धान्तिक समाश्रयण वक्र का रूप जानने में प्रयोग कर सकते हैं। इसकी आवश्यकता आनुभविक वक्र-रेखी समाश्रयण के लिए प्रतिरूप (Model) की रचना के हेतु होती है।

माना कि सप्रतिबन्धी वंटन $f(y/x)$ का विचार किया गया है क्योंकि समाश्रयण में फलन चरों Y और X में ही दिया जाता है। यदि मान लिया कि X का एक स्थिर मान x_0 है तो रेखा $X = x_0$ के साथ Y का माध्य मान एक ऐसा बिन्दु निर्धारित करेगा कि जिसकी कोटि \bar{Y}_{x_0} से निरूपित की जा सकती है। जैसे-जैसे X के विभिन्न मान लिये जाते हैं, ऊर्ध्वाधर रेखा पर भिन्न-भिन्न माध्य बिन्दु प्राप्त होते जाते हैं। इस प्रकार माध्य बिन्दुओं को कोटि \bar{Y}_x निर्धारित मान x का एक फलन होता है। इन माध्य बिन्दुओं का पथ (Locus) एक वक्र होता है जिसे कि Y का X पर समाश्रयण वक्र कहते हैं।

Y के X पर समाश्रयण वक्र की समीकरण है

$$\bar{Y}_x = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy \quad \dots (18.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x,y)}{f_1(x)} dy \quad \dots (18.18.1)$$

पथ परिभाषा के अनुसार एक समाश्रयण वक्र एवं सप्रतिबन्धी वंटन के माध्य का पथ है (18.16.1) की सहायता से, $x_2 = y$ और $x_1 = x$ मानने पर Y का X पर समाश्रयण वक्र समीकरण है,

$$\bar{Y}_x = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mu_X) \quad \dots (18.19)$$

जबकि चरों Y और X के माध्य एवं मानक विचलन क्रमशः

$$\mu_Y, \sigma_Y \text{ और } \mu_X, \sigma_X \text{ हैं।}$$

यह ध्यान रखना चाहिये कि सम्बन्ध (18.19) के मत्व होने के लिए यह आवश्यक है कि चरों X और Y का समुक्त बंटन प्रसामान्य हो। इस समीकरण से इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि दोनों चरों का बंटन प्रसामान्य होने की स्थिति में Y का X पर समाश्रयण बक एक सरल रेखा होती है। इस कारण व्यवहार में बहुधा रेखीय समाश्रयण का प्रयोग होता है।

विशार्ट-बंटन

माना कि \underline{X} एक $(K \times 1)$ त्रम का सदिश है जिसका बंटन $N_K(\underline{\mu}, \Sigma)$ है और समग्र प्रसरण-महप्रसरण आव्यूह, Σ का आवलक S है। यदि प्रत्येक चर पर प्रतिदर्श में n प्रेक्षण हैं तो,

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}}) (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}})' \quad \dots (18.20)$$

$$\text{या } A = \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}}) (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}})' = (n-1) S \quad \dots (18.20.1)$$

$$\text{जहाँ } \bar{\underline{X}} = \frac{1}{n} [\underline{X}_1 + \underline{X}_2 + \dots + \underline{X}_n]$$

ध्यान दें कि A (या S) के बंटन को विशार्ट-बंटन कहते हैं। इस बंटन को निम्न रूप में भी समझ सकते हैं :—

माना कि $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{kk}$, आव्यूह Σ के तत्व हैं और इनके आवलक $s_{11}, s_{12}, s_{22}, \dots, s_{kk}$ हैं तो समस्याओं $(n-1)s_{11}, (n-1)s_{12}, (n-1)s_{22}, \dots, (n-1)s_{kk}$ जो कि A के घस हैं, का समुक्त बंटन विशार्ट-बंटन कहलाता है।

A के घनात्मक निश्चित होने की स्थिति में, A का घनत्व फलन निम्न होता है :—

$$f(A) = \frac{|A|^{-\frac{1}{2}(n-k-1)} e^{-\frac{1}{2}t, \Sigma^{-1} A}}{2^{\frac{1}{2}nk} \pi^{k(k-1)/4} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^k \left| \frac{1}{2}(n-i+1) \right|} \quad \dots (18.21)$$

यहाँ इस फलन को व्युत्पन्न नहीं किया गया है क्योंकि यह पुस्तक मुख्यतया प्रयोगात्मक दृष्टि से लिखी गई है। यदि $\Sigma = I$ हो तो उपर्युक्त बंटन को X^2 बंटन का व्यापक रूप समझा जाता है।

यदि सदिश में केवल दो चर X_1 व X_2 हो तो विशार्ट-बंटन के लिए व्यंजक (18.21) में $k=2$ रखने पर घनत्व फलन है

$$f_A(x_1, x_2) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}(n-3)^c (-\frac{1}{2}t, \Sigma^{-1}A)}{2^n \pi^{\frac{1}{2}} |\Sigma|^{n/2} \left| \frac{n}{2} \right| \left| \frac{n-1}{2} \right|} \dots (18.22)$$

टिप्पणी यहाँ $t, \Sigma^{-1}A$ का अर्थ है कि साम्यह, $\Sigma^{-1}A$ के विकर्ण तारों का योग लिया गया है क्योंकि एक $(p \times p)$ तम के साम्यह B का अनुक्रम (Trace) परिमाण के अनुसार, निम्न होता है .—

$$t_r(B) = \sum_{i=1}^p b_i$$

होटसिंग T²-घंटन

एक चर समष्टि के माध्य के प्रति परिवर्तना $H_0 : \mu = \mu_0$ की परीक्षा के विषय में अध्याय 9 में पर्याप्त दिया जा चुका है। इस स्थिति में प्रतिदर्श,

$$t = \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{s}$$

$$\text{या } t^2 = \frac{(\bar{X} - \mu)^2 n}{s^2} \dots (18.23)$$

जबकि चर $X \sim N(\mu, \sigma)$ है।

किन्तु प्रायः एक साथ अनेक चरों के समष्टि माध्य के प्रति परिवर्तना की आवश्यकता होता है और उस स्थिति में होटसिंग T²-घंटन का प्रयोग प्रति उत्तम है। माना कि K चर है जो कि सदिस \underline{X} द्वारा निर्दिष्ट है और $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$

T²-घंटन को पहले शून्य स्थिति (null case) में ही दिया गया है अर्थात् जब $H_0 : \underline{\mu} = \underline{\mu}_0$

$$\text{यहाँ } \underline{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_{10} \\ \mu_{20} \\ \mu_{30} \\ \vdots \\ \mu_{k0} \end{bmatrix}$$

माना कि प्रादेश चर पर n परिमाण के एक वास्तुस्थित प्रतिदर्श का अर्थ दिया गया है। (18.23) के अनुसार k-चर समष्टि के लिए प्रतिदर्श

$$T^2 = n (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0)' S^{-1} (\underline{\bar{X}} - \underline{\mu}_0) \dots (18.24)$$

जबकि S सह प्रसरण आव्यूह Σ का आकलक है।

माना कि

$$(S_{ij}) = \left(\sum_{i=1}^n (X_{i1} - \bar{X}_1) (X_{ij} - \bar{X}_j) \right) \quad \dots (18.25)$$

जहाँ $i, j = 1, 2, 3 \dots k$

$$= (n-1) S \quad \dots (18.25.1)$$

यदि (S_{ij}) का प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) है तो सम्बन्ध (18.24) को परिकल्पना H_0 के अन्तर्गत निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$T^2 = n(n-1) \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \mu_{i0}) S^{ij} (\bar{X}_j - \mu_{j0}) \quad \dots (18.26)$$

यदि (18.26) में $k=1$ हो तो T^2 , t^2 के तुल्य हो जाता है। व्यक्त (18.26) में μ_{10} व μ_{j0} के मान निराकरण योग्य परिकल्पना $\mu_i = \mu_{i0}$ के अनुसार रखने होते हैं। जबकि μ_i चर X_i का वास्तविक माध्य है और μ_{i0} माध्य μ_i का कल्पित मान है। होटलिंग ने बताया कि परिकल्पना H_0 के अन्तर्गत संख्या,

$$U = \frac{T^2}{n-1} \quad \dots (18.27)$$

एक अभाज्य-बीटा चर (beta-prime variate) होता है जिसका घनत्व फलन है,

$$f(U) = \frac{1}{\beta \left(\frac{k}{2}, \frac{n-k}{2} \right)} \frac{U^{(k-2)/2}}{(1+U)^{n/2}} \quad \dots (18.28)$$

फलन $f(U)$ द्वारा स्पष्ट है कि $\frac{(n-k)}{K} \cdot \frac{T^2}{(n-1)}$ का बंटन, F -बंटन है जिसकी स्वतन्त्रता कोटियाँ k और $(n-k)$ हैं।

अज्ञान्य स्थिति :

यदि H_0 मध्य न हो अर्थात् $\mu_i - \mu_{i0} \neq 0$ हो तो T^2 -बंटन अकेन्द्रीय F -बंटन के समान होता है। इस स्थिति में भी F की स्वतन्त्रता कोटियाँ K और $(n-k)$ होती हैं। अकेन्द्रीय प्राचल τ निम्न होता है :—

$$\tau = \frac{n}{2} \sum_{i,j} (\mu_i - \mu_{i0}) (\mu_j - \mu_{j0}) \sigma^{ij} \quad \dots (18.29)$$

जबकि $(\sigma^{ij}) = \Sigma^{-1}$

घन घकेन्द्रीय F-बटन का घनत्व फलन है,

$$f(F_1) = \frac{k}{n-k} \frac{e^{-\tau}}{|(n-k)/2|} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{\tau^\beta}{\beta!} \frac{\left(\frac{n}{2} + \beta\right) \left(\frac{KF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2} + \beta - 1}}{\left(\frac{k}{2} + \beta\right) \left(1 + \frac{KF_1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2} + \beta}}$$

... (18.30)

$\tau = 0$ होने की स्थिति में यह घनत्व फलन केन्द्रीय बटन के लिए घनत्व फलन के रूप में हो जाता है।

दिएषु भी घकेन्द्रीय F-बटन के लिए दिया गया घनत्व फलन (18.30) और (7.36) एक रूप हो जाते हैं यदि (18.30) में $n = \nu_1 + \nu_2$, $k = \nu_1$ व $n - k = \nu_2$ रखें।

परिकल्पना परीक्षा :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ की $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ के विरुद्ध परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :-

T^2 का मान (18.26) से परिकल्पित कर लिया जाता है और परिकल्पित T^2 की सहायता T_0^2 से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है जहाँ α सा. स्. और स्व. को. $(k, n-k)$ के लिए,

$$T_0^2 = \frac{(n-1)k}{n-k} F_\alpha$$

... (18.31)

यदि $T^2 > T_0^2$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अन्यथा स्वीकार कर लिया जाता है।

यदि उपर्युक्त परीक्षा सम्भावित अनुपात निरूपण के आधार पर करें तो यह निश्चय किया जा सकता है कि

$$L^{2/n} = \frac{1}{1 + T^2/\alpha}$$

... (18.32)

जबकि सम्भावित अनुपात परीक्षा के लिए आंकिक सेव $L < L_0$ द्वारा दिया जाता है जहाँ L_0 का मान इस प्रकार मानते हैं कि H_0 के सत्य होने पर $L < L_0$ होने की प्रायिकता α है। घन (18.32) की सहायता से

$$T_0^2 = (n-1)(L_0^{2/n} - 1) / L_0^{2/n}$$

... (18.33)

इस स्थिति में भी परीक्षा निरूपण बरी रहता है।

महासामान्योत्त व्यापकोक्त सूत्री :

माना कि दो K-पर प्रसामान्य समय है जिसके माध्य क्रम $\mu^{(1)}$ और $\mu^{(2)}$ हैं और

दोनों का सामान्य प्रसार भाव्यहू Σ है। गणितीय भाषा में दो K -चर समग्र $N(\underline{\mu}^{(1)}, \Sigma)$ और $N(\underline{\mu}^{(2)}, \Sigma)$ हैं तो

$$\Delta^2 = \frac{1}{K} (\underline{\mu}^{(1)} - \underline{\mu}^{(2)})' \Sigma^{-1} (\underline{\mu}^{(1)} - \underline{\mu}^{(2)}) \quad \dots (18.34)$$

को दो समग्रों के बीच महानामकीय व्यापकीकृत दूरी $D^2 = \Delta^2$ ।

Δ^2 का आकलन :

इस आकलन को Bosc ने ज्ञात किया था। माना कि दोनों समग्रों में से क्रमशः परिमाण n_1 व n_2 के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्श चयन किये गये हैं और Δ^2 का आकलन D^2 है।

परिमाण के अनुसार

$$D^2 = \frac{1}{k} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})' \Sigma^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) \quad \dots (18.35)$$

$$\text{और } E(D^2) = \Delta^2 + \frac{2}{n} \quad \dots (18.36)$$

जहाँ \bar{n} , n_1 व n_2 का हरात्मक माध्य है अर्थात्

$$\bar{n} = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

अतः Δ^2 का अनभिन्न आकलन,

$$D_k^2 = D^2 - \frac{2}{n} \quad \dots (18.37)$$

$$= \frac{1}{k} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})' \Sigma^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) - \frac{2}{n} \quad \dots (18.37.1)$$

यदि n_1 और n_2 बृहत् हो तो $\frac{2}{n}$ उपेक्षणीय है और इस स्थिति में,

$$D_k^2 = D^2 \quad \dots (18.37.2)$$

जब Σ ज्ञात हो तो Δ^2 को स्टूडेंटिकृत D^2 कहते हैं।

स्थिति 2 :—यदि Σ अज्ञात हो तो Δ^2 को अस्टूडेंटिकृत (unstudentised) D^2 कहते हैं। माना कि n_1 व n_2 परिमाण के दो स्वतन्त्र प्रतिदर्शों द्वारा प्राप्त Σ का आकलन S है। इस स्थिति में Σ के स्थान पर S का प्रयोग करना होता है। अतः

$$D^2_2 = \frac{1}{K} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})' S^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) \quad \dots (18.38)$$

$$E(D^2_2) = \frac{(n_1 + n_2 - 2)}{(n_1 + n_2 - k - 3)} \left(\Delta^2 + \frac{2}{n} \right) \quad \dots (18.39)$$

प्रतिदर्शन D^2_2 को ही सम्युद्धीकृत D^2 कहते हैं।

T^2 और D^2 में सम्बन्ध .

यदि D^2 के लिए दिये गये व्यंजक में $1/K$, या कि स्थिरांक है, का छार दें ता भी बंटन में क्या पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस स्थिति में,

$$D^2_2 = (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)})' S^{-1} (\bar{X}^{(1)} - \bar{X}^{(2)}) \quad \dots (18.40)$$

$$\text{और} \quad T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} D^2_2 \quad \dots (18.41)$$

$$\text{जबकि} \quad \frac{T^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2 - k - 1}{k} \sim F_{k, (n_1 + n_2 - k - 1)} \quad \dots (18.42)$$

इसी प्रकार का बंटन D^2 के पक्षों में विविक्तकर पत्र के साथ अध्याय 19 में दिया गया है।

द्विघात रूपों का सम्मिश्रित बंटन :

यदि K अरों का सम्मिश्रित बंटन,

$$C e^{-\frac{1}{2} \underline{x}' A \underline{x}} d\underline{x}$$

ज्ञात है तो द्विघात रूप $\underline{x}' A \underline{x}$ का बंटन ज्ञात करना है।

माना कि $\underline{x} = Q \underline{y}$ जबकि Q एक साम्यूह इस प्रकार का है कि

$$Q' A Q = I$$

$$\text{यत} \quad \underline{x}' A \underline{x} = \underline{y}' O' A Q \\ = \underline{y}' \underline{y}$$

और सम्मिश्रित K अरों का बंटन पतन

$$C_1 e^{-\frac{1}{2} \underline{y}' \underline{y}} d\underline{y} \\ = C_1 e^{-\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2)} dy_1 dy_2 \dots dy_k \quad \dots (18.43)$$

$$\therefore \underline{x}' A \underline{x} = \sum_i y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_k^2$$

का बंटन χ^2 होता है जबकि K बार, $N(0,1)$ बंटित हो। यहाँ χ^2 की स्वातन्त्रता कोटि K होती है।

कोकरान-प्रमेय :

माना कि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, समग्र $N(0,1)$ से एक प्रतिदर्श है और यदि

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2 = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_k \quad \text{है।} \quad \dots (1844)$$

जबकि q_i ($i=1, 2, 3, \dots, k$) एक द्विघात रूप है जिसकी कोटि (rank) n_i है तो $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ का स्वतन्त्र रूप से बंटन $\chi^2_{n_i}$ होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है कि,

$$n = \sum_i n_i$$

इस प्रमेय को घाब्यूह सिद्धान्तों का प्रयोग करके सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है। यहाँ इसको सिद्ध करके नहीं दिखाया गया है।

बहुपद-बंटन :

यदि $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$, K स्वतन्त्र घटनाएँ हैं जिनके घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ है तो n परीक्षणों में से घटना E_1 के n_1 बार घटित होने, E_2 के n_2 बार घटित होने, ... E_k के n_k बार घटित होने की प्रायिकता,

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

जहाँ
$$\sum_i n_i = n$$

घटनाएँ किस क्रम में घटित होती हैं इसमें कोई रुचि नहीं है अतः n में से $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ बार घटनाओं के घटित होने के परस्पर अपवर्जी ढंग

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

हैं। अतः आवश्यक प्रायिकता,

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} \quad \dots (1845)$$

(1845) द्वारा दिये गये बंटन को बहुपद बंटन कहते हैं। दायीं ओर दिया गया व्यंजक $(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k)^n$ के विस्तार में व्यापक पद है।

बहुपद बंटन का माध्य व प्रसरण निम्न होता है -

$$E(n_i) = np_i \quad (18.46)$$

$$E(n_i^2) = np_i + n(n-1)p_i^2 \quad (18.47)$$

$$\begin{aligned} \therefore V(n_i) &= E(n_i^2) - \{E(n_i)\}^2 \\ &= np_i + n(n-1)p_i^2 - n^2 p_i^2 \\ &= np_i - np_i^2 \\ &= np_i(1-p_i) \end{aligned}$$

n_1 व n_2 में सहप्रसरण

$$\text{cov}(n_1, n_2) = E(n_1 n_2) - E(n_1) E(n_2)$$

जहाँ

$$E(n_1 n_2) = n(n-1)p_1 p_2$$

$$\therefore \text{cov}(n_1, n_2) = n(n-1)p_1 p_2 - np_1 \cdot np_2$$

$$= -np_1 p_2$$

उपरोक्त परिणाम द्विपद बंटन का समरूप है।

प्रश्नावली

1. यदि $f(x, y) = C$ जबकि $x^2 + y^2 \leq a^2$
 $= 0$ अन्यथा

$$\text{सिद्ध कीजिये कि } C = \frac{1}{\pi a^2} \text{ और यदि } E(X) = E(Y) = 0$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{a^2}{4} \text{ ता } X \text{ व } Y \text{ की स्वतन्त्रता की परीक्षा कीजिये।}$$

2. यदि $\underline{\mu} = \underline{0}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 75 & -35 \\ & 1 & -50 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(i) λ_1 व X_2 का सप्रतिबंध बंटन ज्ञान कीजिये जबकि $X_2 = x_0$

(ii) X_2 का उपांग बंटन ज्ञान कीजिये।

3. बन्धोप बंटन व घन शाय बंटन में चानर का मूल्य का म उदाहरण सहित समझाइय।
4. हाईसिंग T^2 बंटन में किम परिकल्पना का परीक्षा की जाती है और इन परिकल्पना का लिए प्रतिद्वन्द्व दत्तक पूर्ण विधि का विवरण दीजिये।

5. यदि

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}^{(1)} \\ \underline{\mu}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिये कि $\underline{\mu}' \Sigma^{-1} \underline{\mu} \geq \underline{\mu}^{(1)'} \Sigma_{11}^{-1} \underline{\mu}^{(1)}$ जबकि $\underline{\mu}^{(1)}$ के K_1 और $\underline{\mu}^{(2)}$ के K_2 सघटक हैं और $K_1 + K_2 = K$

□ □ □

जब कापी में प्रायः यह समस्या सामना प्राणी है कि एक एक या कुछ एकको का समूह किस समग्र में है। जैसे बानस्पतिक (botanical) अध्ययन में जाति (species) का निर्णय करने की समस्या प्राणी है। पादप प्रजनन (plant breeding) संबंधी समस्याओं में यह ज्ञान की आवश्यकता होती है कि एक पादप सन्तति (plant progeny) उच्च उपज वाले या अल्प उपज वाले समूह में है। इसी प्रकार की अनेक अन्य समस्याएँ सामने आती हैं।

अधिकांशतः व्यवहार में समस्या के विषय में ज्ञान नहीं होता है अर्थात् इनका प्राचल ज्ञात नहीं होते हैं। किन्तु प्रत्येक समग्र से एक प्रतिनिधि लेकर समग्र के विषय में जानकारी प्राप्त करली जाती है। इस जानकारी का प्रयोग यह ज्ञान के लिए किया जाता है कि एक नया एक या कुछ नए एकों का समूह किस समग्र में है। कभी-कभी यह निर्णय केवल एक लक्षण (चर) के आधार पर लिया जा सकता है। किन्तु बहुधा दो समग्र एक दूसरे से अनेक लक्षणों (चरों) में भिन्न होते हैं। इनमें से प्रत्येक चर द्वारा कुछ अनेक मिलता है कि एक किस समग्र का है। अतः अनेक चरों का एक साथ लेकर एक ऐसा पत्रन ज्ञात करना होता है जिससे कि एक का किस समग्र का है उक्त अनिश्चित किसी अन्य समग्र का मानन की दृष्टि न्यूनतम हो। एक फलन को विविक्तकर फलन कहते हैं। विविक्तकर फलन प्रविधि का ज्ञान प्रो० ए० फिशर (R. A. Fisher) ने सन् 1936 में किया था। इस विधि का उपयोग गणना (computer) के आविष्कार के बाद अधिक लाभदायक है। विविक्तकर फलन ज्ञान करने तथा परिचलनात्मक की परीक्षा करने की विधि निम्न प्रकार है -

यदि दो एक चर समग्र (प्रयोगात्मक) μ_1 व μ_2 हैं जिनके माध्य अंश μ_1 और μ_2 है तथा सांख्यिक प्रसरण σ^2 है तो मानक विचलन के पक्ष में इन माध्यों के बीच की दूरी का वर्ग $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ का मान है। स्पष्टतः एक प्रक्षण X को समग्र μ_1 का माना जायगा यदि

यह μ_1 के निकट है और μ_2 का माना जायगा यदि यह μ_2 के निकट है। किन्तु बर्गीकरण करने में दृष्टि की भी सहायता रखनी है। इस दृष्टि की सहायता कम होगी यदि

$\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ बृहत् है अर्थात् इस स्थिति में ही प्रयोगात्मक वक्र एक दूसरे से पर्याप्त दूरी

पर होंगे। इसके विपरीत स्थिति में दृष्टियुक्त बर्गीकरण की सहायता अधिक होगी। केवल एक चर के आधार पर समुचित बर्गीकरण होना भी कठिन है। अतः बर्गीकरण का पर्याप्त समुच्च बनाने के लिए एक से अधिक चरों को लेना उचित है।

K-चर ($X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$) प्रामाण्य समष्टी की स्थिति में प्रा० विचर ने सुनाया कि इन K-लक्षणों का एक ऐसा रैखिक फलन ज्ञान किया जाना चाहिये जिसके लिए $\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}\right)^2$ अधिकतम हो और वर्गीकरण इस इष्टतम रैखिक मयोजन (Optimum linear combination) पर आधारित होना चाहिये। इस प्रकार फलन $\underline{a}' X$ लेकर K-विमीय वर्गीकरण प्रक्रिया को एक विमीय प्रक्रिया में परिवर्तित कर दिया जाता है। इष्टतम फलन $\underline{a}' X$ का इस प्रकार लिया जाता है कि जिसके लिए \underline{a} के सबंध में तूरी का वर्ग,

$$\left(\frac{\mu_1 \text{ में } \underline{a}' X \text{ का माध्य} - \mu_2 \text{ में } \underline{a}' X \text{ का माध्य}}{\underline{a}' X \text{ का मानक विचलन}} \right)^2 \quad \dots (19.1)$$

अधिकतम है।

माना कि K चरों $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ का रैखिक फलन 'Z' निम्न है —

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_k X_k \quad \dots (19.2)$$

फलन (19.2) में गुणांकों $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ का इस प्रकार चयन किया जाता है कि रैखिक फलन द्वारा दो समष्टी में अधिकतम विभेद प्राप्त हो सके। इसके लिए प्रतिचर (19.1) दिया गया है।

फलन, $(a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_k X_k)$ का प्रसरण

$$= \sum_j \sigma_j^2 a_j^2 \quad \dots (19.3)$$

$j = 1, 2, 3, \dots, k$

है और दो समष्टी के लिए इस फलन के माध्य मानों में अन्तर का वर्ग,

$$(a_1 \delta_1 + a_2 \delta_2 + \dots + a_k \delta_k)^2 \quad \dots (19.4)$$

है जब कि बहुचर समष्टी प्रसामान्य बंटित हैं जिन दोनों का विक्षेपण मापदू (σ_j) है और माध्यों में अन्तर $\delta_j = (\mu_{j1} - \mu_{j2})$ के है।

माना कि प्रतिदर्श माध्यों में अन्तर $(\bar{X}_{j1} - \bar{X}_{j2}) = d_j$ और चरों X_1 व X_j में दोनों प्रतिदर्शों के लिए विक्षेपण मापदू (S_j) है।

जहाँ,

$$S_j = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_{11}) (X_{1i} - \bar{X}_{11}) + \sum_{u=1}^{n_2} (X_{2u} - \bar{X}_{21}) (X_{2u} - \bar{X}_{21}) \right\} \quad \dots (19.5)$$

उपर्युक्त वर्णन में d_j का घातनक d_j और a_j का घातनक S_{1j} है। विविक्तकर फलन Z के लिए सभ्य

$$Q = \frac{(\sum_j a_j d_j)^2}{\sum_j \sum_j a_j a_j S_{1j}} \quad \dots (19.6)$$

को अधिकतम करना होता है।

सम्राज-गुणक 'λ' का प्रयोग करने सभ्य Q का अधिकतम किया जाता है। इस विधि के घनगर्ण सभ्य $(\sum_j \sum_j a_j a_j d_j d_j - \lambda \sum_j \sum_j a_j a_j S_{1j})$ का a_j ($j=1, 2, 3, \dots, K$)

के संबंध में प्रागिक अवकलन करने शून्य के समान स्थान पर घोर सभ्य $(a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + \dots + a_k d_k) / \lambda$ को। मान लेते पर निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं -

$$\left. \begin{aligned} a_1 S_{11} + a_2 S_{12} + a_3 S_{13} + \dots + a_k S_{1k} &= d_1 \\ a_1 S_{21} + a_2 S_{22} + a_3 S_{23} + \dots + a_k S_{2k} &= d_2 \\ a_1 S_{31} + a_2 S_{32} + a_3 S_{33} + \dots + a_k S_{3k} &= d_3 \\ \vdots & \\ a_1 S_{k1} + a_2 S_{k2} + a_3 S_{k3} + \dots + a_k S_{kk} &= d_k \end{aligned} \right\} \quad \dots (19.7)$$

इन समीकरणों को हल करने a_j ($j=1, 2, 3, \dots, K$) के प्राकृतिक मान प्राप्त होते हैं। इन समीकरणों को उतरी प्रकार हल कर सकते हैं जैसे कि अध्याय 13 में बहु समाधान्य रेखा को स्थिति में प्रागिक समाधान्य गुणाको का प्राप्त करने के लिए हल किया गया है।

माना कि घातनक (S_{1j}) का प्रतिशत घातनक (S^j) है तो

$$a_j = S^j d_1 + S^{2j} d_2 + \dots + S^{kj} d_k \quad \dots (19.8)$$

जहाँ $j=1, 2, 3, \dots, K$

प्राकृतिक $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ का समीकरण (19.2) में प्रतिस्थापन करने पर विविक्तकर फलन Z प्राप्त हो जाता है। यदि चर $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ के माध्य समान हों और इनके विविक्तकर मान (discriminating value) समान हो तो $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ के भार $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ समान होते हैं और इस स्थिति में विविक्तकर फलन,

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k \quad \dots (19.9)$$

होता है। किन्तु, क्रियात्मक दृष्टि में ऐसी स्थिति बहुत कम पाई जाती है क्योंकि कुछ चरों को विविक्तकर तर्क अधिक और कुछ को कम होता है। अतः चरों को अनुसूचित प्राप्ति करना आवश्यक हो जाता है। सामान्य में विविक्तकर फलन का नियम बहुचर विविक्तकर का घन है और इसके घनगर्ण हम दो या दो से अधिक चरों के दुर्गम विचरण का अध्ययन करते हैं।

परिकल्पना H_0 : सब चरों के लिए समग्र माध्यों में अन्तर शून्य है, की H_1 : कम से कम किन्हीं दो समग्र माध्यों में अन्तर शून्य नहीं है, के विरुद्ध परीक्षा महालानबीस (Mahalanobis) D^2 की सहायता से कर सकते हैं। महालानबीस D^2 के लिए गणितीय सूत्र निम्न है :—

$$D_k^2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K S^i d_i d_j \quad \dots (19.10)$$

$$= \sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2 + \sigma_3 d_3 + \dots + \sigma_k d_k \quad \dots (19.10.1)$$

जहाँ D^2 का अनुमान K यह प्रदर्शित करता है कि अध्ययन में K चरों को लिया गया है।

परिकल्पना H_0 की F -परीक्षा निम्न प्रकार की जाती है —

यहाँ प्रतिदर्शज,

$$F = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - K - 1)}{K (n_1 + n_2) (n_1 + n_2 - 2)} D_k^2 \quad \dots (19.11)$$

है।

प्रतिदर्शज F की स्व० को० K और $(n_1 + n_2 - k - 1)$ होती है। परिवर्तित F को α सा० स्त० व K और $(n_1 + n_2 - k - 1)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध F के तुलना करके H_0 के विषय में नियम अनुसार निर्णय कर लिया जाता है।

लक्षणों की संख्या बढ़ाने पर परीक्षा

यदि लक्षणों (चरों) की संख्या बढ़ाकर m कर दी गई हो तो परिकल्पना H_0 कि $(m - k)$ लक्षणों द्वारा और अधिक विविक्तकर-शक्ति नहीं बढ़ी है, की परीक्षा, F -परीक्षा द्वारा की जाती है जबकि प्रतिदर्शज,

$$F = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - m - 1)}{(m - k) \{ (n_1 + n_2) (n_1 + n_2 - 2) + n_1 n_2 D_k^2 \}} (D_m^2 - D_k^2) \quad \dots (19.12)$$

है। यहाँ F की स्व० को० $(m - k)$ और $(n_1 + n_2 - m - 1)$ है। परिवर्तित F को सारणीबद्ध F से तुलना करके H_0 के विषय में निर्णय कर लिया जाता है यदि H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है तो इसका समिप्राय. है कि $(m - k)$ चरों के बढ़ाने पर विविक्तकर शक्ति में कोई वृद्धि नहीं हुई है। H_0 को अस्वीकार कर देने की स्थिति में विपरीत निर्णय लिया जाता है।

विल्क- Λ निकष द्वारा अनेकों समग्रों के माध्य मानों में अन्तर की परीक्षा

परिकल्पना H_0 अनेकों समग्रों के लिए समस्त चरों (लक्षणों) के माध्य मानों में अन्तर शून्य के समान है की परीक्षा विल्क- Λ निकष के आधार पर निम्न प्रकार की जाती है :—

माना कि p -समग्रों में से क्रमशः परिमाण $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p$ के p प्रतिदर्श लिये गये हैं और प्रत्येक प्रतिदर्श द्वारा K लक्षणों का अध्ययन किया गया है।

माना कि h वें प्रतिदश के लिए K पक्षणा व माध्य क्रम $\bar{X}_{h1}, \bar{X}_{h2}, \bar{X}_{h3}$ और वगों तथा गुणना का योग S_{h1} है या कि $(n_h - 1)$ स्वरूपा पर आधारित है जहाँ

$$h=1, 2, 3, \dots, p$$

$$\text{माना कि } \sum_h n_h = n \quad \text{तथा } \bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_k$$

मत्र प्रतिदशों को सम्मिलित करने पर माध्य है घात S_j , चर X व X_j व वगों तथा गुणना के योग का प्रदर्शित करने है। प्रतिदशों के बीच गुणना का योग

$$B_j = \sum_{h=1}^p n_h \bar{X}_{hj} \bar{X}_{h1} - n \bar{X}_j \bar{X}_1 \quad (19.13)$$

$$\text{जहाँ } j=1, 2, 3, \dots, k$$

$$\text{या } B_j = \sum_{h=1}^p \frac{T_h \times T_{hj}}{n_h} - \frac{T_j \times T_1}{n} \quad (19.13.1)$$

जब कि T_{hj}, T_{h1} क्रमशः h वें प्रतिदश में चर X_j व चर X_1 के योग है तब T व T_j प्रतिदशों का सम्मिलित करने पर चर X व X_j के योग है।

प्रतिदशों के अंदर गुणना का योग

$$W_j = S_j - B_j \quad (19.14)$$

$$= \sum_{h=1}^p S_{hj} \quad (19.14.1)$$

विलक Λ - निकष के अनुसार

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W+B|} \quad (19.15)$$

जब कि $|W|$ और $|W+B|$ क्रमशः विभाग घातू (W_q) और $(W_q + B_j)$ के सारणिक है।

$$\text{यदि } m = n - \frac{k+q+1}{2} \quad q = (k-1)$$

$$\lambda = \frac{K \times q - 2}{4}, \quad s = \sqrt{\frac{K^2 q^2 - 4}{K^2 + q^2 - 4}}$$

$$r = Kq/2$$

तो,

$$\lambda^2 K(p-1) = -m \log_e \Lambda \quad (19.16)$$

$$= -m \log_e \Lambda \log_e 10 \quad \dots (19.16.1)$$

$$= - (2.3026)m \log_{10} \Lambda \quad \dots (19.16.2)$$

परिकल्पना H_0 की परीक्षा बिल्कुल- Λ की सहायता से F परीक्षा द्वारा भी की जा सकती है जबकि प्रतिदर्शज,

$$F_{\{2r, (ms - 2\lambda)\}} = \frac{ms - 2\lambda}{2r} \frac{1 - \Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}} \quad \dots (19.17)$$

पूर्व निर्धारित सा० स्त० व प्रतिदर्शज F की स्व० की० के लिए प्राप्त सारणीबद्ध मान को F के परिवर्तित मान से तुलना करके नियमानुसार H_0 के विषय में निर्णय ले लिया जाता है।

उदाहरण 19.1 . एक प्रजाती-परीक्षण (varietal test) में ली गई तिल (sesamum) की दो प्रजातियों के तीन लक्षणों के प्रति अध्ययन किया गया है। प्रयोग में प्रत्येक प्रजाति के प्रत्येक लक्षण के लिए तीन प्रेक्षण लिये गये जो कि निम्न प्रकार थे:—

प्रजाति	प्रति गोधो की उम्र (षाम)			प्रति गोधो में सम्पुटों (capsules) की संख्या			प्रति गोधो में माषाण		
	(X_1)			(X_2)			(X_3)		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
V_1	4.965	5.967	5.444	29.6	32.0	29.6	5.4	4.8	5.0
V_2	4.953	5.075	6.565	36.8	34.2	41.2	5.6	5.6	4.4

(1) इन दो प्रजातियों के लिए विवक्तकर फलन,

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3,$$

का समझन,

(2) दोनों प्रजातियों में दूरी महालानबीस D^2 ,

(3) परिकल्पना H_0 दो प्रजातियों के लक्षणों के माध्यों में अन्तर शून्य के समान है, की एक साथ परीक्षा, निम्न प्रकार कर सकते हैं

सूत्र (19.5) का प्रयोग करके सत्याप्तो S_n का परिकलन किया।

$$S_{11} = \frac{1}{(3+3-2)} \left\{ (4.965^2 + 5.967^2 + 5.444^2) - \frac{(16.476)^2}{3} \right. \\ \left. + (4.953^2 + 5.075^2 + 6.565^2) - \frac{(16.593)^2}{3} \right\} \\ = 0.5293$$

$$S_{12} = \frac{1}{(3+3-2)} \left\{ (4.965 \times 26.6 + 5.967 \times 32.0 + 5.444 \times 29.6) \right. \\ \left. - \frac{(16.476)(88.20)}{3} + (4.953 \times 36.8 + 5.075 \times 34.2) \right. \\ \left. + 6.565 \times 41.2) - \frac{(16.593)(112.20)}{3} \right\}$$

$$= 2.1140$$

इसी प्रकार,

$$S_{22} = 9.9200, S_{23} = -1.5500, S_{13} = -0.3867, S_{33} = 0.2867$$

अतः X_1, X_2 व X_3 के लिए माध्य,

	\bar{X}_1	\bar{X}_2	\bar{X}_3
V_1	5.492	29.400	5.067
V_2	5.531	37.400	5.200
$V_2 - V_1 = d$	0.039	8.000	0.133

अब माध्य (S_{ij}) को विवेकिकर, इसका प्रतिलोम माध्य (S^{ij}) कीलकीय सघनन (Pivotal condensation) विधि द्वारा ज्ञात किया। (इस विधि का वर्णन परिशिष्ट-क में दिया गया है।)

(S _{ij})			I		
0.5293	2.1140	-0.3867	1	0	0
2.1140	9.9200	-1.5500	0	1	0
-0.3867	-1.5500	0.2867	0	0	1
1	3.993954	-0.730587	1.889387	0	0
0	1.476782	-0.0055440	-3.3993952	1	0
0	-0.005538	0.004183	0.730587	0	1
1	-0.003751		-2.704496	0.677148	0
0	0.004163		0.715610	0.003750	1

कीलकीय रेखाओं को लिखकर उपरि निम्न के अंशों को शून्य किया।

1	3.993954	-0.730587	1.889287	0	0
0	1	-0.003751	-2.704496	0.677148	0
0	0	1	171.897669	0.900792	240.211386
1	0	-0.715606	12.690919	-2.704497	0
0	1	0	-2.059708	0.680526	0.901032
0	0	1	171.898669	0.900792	240.211384
1	0	0	135.701920	-2.059885	171.897669
0	1	0	-2.059708	0.680526	0.901032
0	0	1	171.897669	0.900792	240.211384
	I		(S ⁰)		

सूत्र (19.8) की सहायता से,

$$a_1 = S^{11} d_1 + S^{12} d_2 + S^{13} d_3$$

$$= (135.701920)(.039) + (-2.059885)(8.000) + (171.897669)(0.133)$$

$$= 11.6757$$

इसी प्रकार,

$$a_2 = 5.4837$$

$$\text{और } a_3 = 45.8584$$

विविक्तकर फलन,

$$Z = 11.6757 X_1 + 5.4837 X_2 + 45.8584 X_3 \text{ है।}$$

(2) महालानबीस D² सूत्र (19.10.1) के अनुसार निम्न है:—

$$D^2_3 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3$$

$$= (11.6757)(.039) + (5.4837)(8.000) + (45.8584)(.1133)$$

$$= 50.4241$$

परिष्कल्पना H₀ की परीक्षा के लिए (19.11) के अनुसार प्रतिदर्शज

$$F = \frac{3 \times 3(3+3-3-1)}{3(3+3)(3+3-2)} D^2_3$$

$$= \frac{18}{18 \times 4} \times 504241$$

$$= 12.606$$

सारणी (परि० प-52) द्वारा $\alpha = 0.5$ और स्त० स्त० 3 और 2 पर F का मान 19.16 है जो कि F के परिचलित मान से अधिक है अतः H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 19.2 यदि, उदाहरण (19.1) में तीन लक्षणों के प्रतिरक्त एक पर X_4 को और निम्न जाय तो परिकल्पना H_0 चौथे लक्षण को बढ़ाने में विविक्तकर शक्ति बढ़ी है, की परीक्षा निम्न प्रकार में कर गाने हैं —

चार लक्षणों X_1, X_2, X_3, X_4 पर दिये गये प्रेरण 3 पुनरावृत्तियों के अनुसार निम्न हैं। इनके योग तथा माध्य आदि भी निम्न सारणी में दिखाये गये हैं:—

लक्षण	प्रक्रियाएँ	V_1	V_2
X_1	R_1	4 965	4 953
	R_2	5 967	5 075
	R_3	5 544	6 565
	योग	16 476	16 593
	माध्य	5 492	5 531
X_2	R_1	26 6	36 8
	R_2	32 0	34 2
	R_3	29 6	41 2
	योग	88 20	112 20
	माध्य	29 400	37 400
X_3	R_1	5 4	5 6
	R_2	4 8	5 6
	R_3	5 0	4 4
	योग	15 2	15 6
	माध्य	5 066	5 200
X_4	R_1	71 2	58 4
	R_2	69 2	57 0
	R_3	71 6	59 4
	योग	212 0	174 8
	माध्य	70 666	58 266

विभिन्न चरों के लिए माध्यों के अन्तर ($V_2 - V_1$) के अनुसार,

$$d_1 = 0.039, d_2 = 8.000, d_3 = 0.133, d_4 = -12.40$$

सूत्र (19.5) के अनुसार मध्यमों S_{ij} को परिकल्पित किया जहाँ $i, j = 1, 2, 3, 4$

$$S_{11} = 0.5293, \quad S_{12} = 2.1140, \quad S_{13} = -0.3867$$

$$S_{14} = 0.3448, \quad S_{22} = 9.9200, \quad S_{23} = -1.5500$$

$$S_{24} = 0.7900, \quad S_{33} = 0.2867, \quad S_{34} = -0.2133$$

$$S_{44} = 1.5533$$

अतः विक्षेपण आव्यूह निम्न है:—

$$(S_{ij}) = \begin{bmatrix} 0.5293 & 2.1140 & -0.3867 & 0.3448 \\ 2.1140 & 9.9200 & -1.5500 & 0.7900 \\ -0.3867 & -1.5500 & 0.2867 & -0.2133 \\ 0.3448 & 0.7900 & -0.2133 & 1.5533 \end{bmatrix}$$

आव्यूह (S_{ij}) का कोलकीय सघनन या मलिनप्ट डूलिटिल विधि (abbreviated Doolittle method) द्वारा प्रतिलोम आव्यूह (S^{ij}) ज्ञात किया जो कि निम्न प्रकार है। इन विधियों का वर्णन परिशिष्ट-क में दिया गया है।

$$(S^{ij}) = \begin{bmatrix} 228.637303 & -6.049397 & 267.541313 & -10.937085 \\ -6.049397 & 0.851787 & -3.205020 & 0.469509 \\ 267.541313 & -3.205020 & 338.642988 & -11.255893 \\ -10.937085 & 0.469509 & -11.255893 & 1.287138 \end{bmatrix}$$

सूत्र (19.5) की सहायता से a_1, a_2, a_3, a_4 ज्ञात किये,

$$a_1 = (228.637303)(0.039) + (-6.049397)(8.000) + (267.541313)(0.133) + (-10.937085)(-12.400) \\ = 131.7245$$

इसी प्रकार,

$$a_2 = 0.3302, \quad a_3 = 169.4065, \quad a_4 = -14.1280$$

$$D^2_4 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + a_4 d_4 \\ = 205.4971$$

सूत्र (19.12) के अनुसार

$$F = \frac{3 \times 3(3+3-4-1)}{(4-3)(3+3)(3+3-2) + 3 \times 3 \times 504241} (2054971 - 504241)$$

$$= \frac{9}{24 + 4538169} \times 1550730$$

$$= \frac{13956570}{4778169}$$

$$= 2.92$$

सारणी (परि० प-5.2) द्वारा $\alpha = 0.5$ तथा 1 घोर 1 स्व० को० पर F का मान 161.4 है जो कि परिवर्तित F के मान से अधिक है। अतः परिवर्तना H_0 कि लोपे लक्षण X_4 को लेने पर विविक्तकर शक्ति नहीं बढ़ी है जो स्वीकार कर लिया जाता है।

उदाहरण 19.3 तिल की प्रजातियाँ म विभेद जानने के लिए प्रयोग किया गया और तीन लक्षणों के प्रति प्रेक्षण लिये गये। अभिव्यक्तना म 3 पुनरावृत्तियाँ ली गईं। प्रेक्षण विम्न सारणी के अनुसार प्राप्त हुए —

लक्षण		प्रजातियाँ			योग
		V_1	V_2	V_3	
X_1	R_1	4.965	4.953	6.056	
	R_2	5.967	5.075	6.022	
	R_3	5.544	6.565	6.967	
योग		16.476	16.593	19.045	52.114
माध्य		5.492	5.531	6.348	
X_2	R_1	26.6	36.8	32.0	
	R_2	32.0	34.2	35.2	
	R_3	29.6	41.2	32.0	
योग		88.20	112.20	99.20	299.60
माध्य		29.400	37.400	33.066	
X_3	R_1	5.4	5.6	1.6	
	R_2	4.8	5.6	1.0	
	R_3	5.0	4.4	1.4	
योग		15.2	15.6	4.0	34.8
माध्य		5.066	5.200	1.333	

परिचलना H_0 : इन तीनों प्रजातियों में लिये गये लक्षणों के अनुमान, भिन्न नहीं है, की परीक्षा विल्क- Λ निष्पन्न द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

यहाँ चरों X_1 व X_2 के वर्गों तथा गुणनों के योग S_{ij} निम्न प्रकार ज्ञात किये गये हैं:-

$$S_{11} = (4.965^2 + 5.967^2 + 5.544^2) + (4.953^2 + 5.075^2 + 6.565^2) \\ + (6.056^2 + 6.022^2 + 6.967^2) - \frac{(52.114)^2}{9} \\ = 4.094797$$

$$\text{घोर } S_{12} = (4.965 \times 26.6 + 5.967 \times 32.0 + \dots + 6.022 \times 35.2 \\ + 6.967 \times 32.0) - \frac{(52.114)(299.60)}{9} \\ = 7.322045$$

इसी प्रकार,

$$S_{22} = 142.728889, \quad S_{33} = 30.240000$$

$$\text{घोर } S_{13} = -7.836266, \quad S_{23} = -3.133333$$

सूत्र (19.13.1) की सहायता से,

$$B_{11} = \frac{1}{3} \{ (16.475)^2 + (16.593)^2 + (18.045)^2 \} - \frac{(52.114)^2}{9} \\ = 1.402862,$$

$$\text{घोर } B_{12} = \frac{1}{3} \{ (16.475)(88.2) + (16.593)(112.20) \\ + (18.045)(99.20) \} - \frac{(52.114)(299.6)}{9} \\ = -0.089889$$

इसी प्रकार,

$$B_{22} = 96.222222, \quad B_{33} = 28.906666$$

$$\text{घोर } B_{13} = -6.352133, \quad B_{23} = 4.133333$$

सूत्र (19.14) की सहायता से सारणिक $|W+B|$ को लिखकर इसका मान ज्ञात कर लिया। यह ज्ञात है कि $S_{ij} = W_{ij} + B_{ij}$.

$$|W+B| = \begin{vmatrix} 4.094797 & 7.322045 & -7.836266 \\ 7.322045 & 142.728889 & -3.133333 \\ -7.836266 & -3.133333 & 30.240000 \end{vmatrix} \\ = 7607.212585$$

$$W_{11} = S_{11} - B_1$$

$$W_{11} = S_{11} - B_{11}$$

$$= 4.094797 - 1.402862$$

$$= 2.691935$$

इसी प्रकार

$$W_{22} = 46.506667 \quad W_{33} = 1.333336,$$

$$W_{12} = 7.411884 \quad W_{13} = -1.484133 \quad W_{23} = -7.266666$$

$$|W| = \begin{vmatrix} 2.691935 & 7.411884 & -1.484133 \\ 7.411884 & 46.506667 & -7.266666 \\ -1.484133 & -7.266666 & 1.333336 \end{vmatrix}$$

सारणिक $|W|$ का मान भी ज्ञात किया जो कि निम्न है -

$$|W| = 8.962041$$

$$\Lambda = \frac{8.962041}{7607.212585}$$

$$= 0.001178$$

सूत्र (19.16.2) के अनुसार,

$$\chi^2 = -(2.3026) \times 5 \times \log_{10}(0.001178) - (2.3026) \times 5 \times (2.928855) \\ = 33.7198$$

$$\chi^2 \text{ की स्व० को०} = 3 \times (3 - 1) = 6$$

$\alpha = 0.5$ व 6 स्व० को० पर χ^2 का सारणीबद्ध मान 12.59 है जो कि परिवर्तित मान से कम है अतः परिवर्तना H_0 मस्वीकृत है। इसका अभिप्राय है कि विषादाधीन सक्षमा के घाघार पर इन प्रजातियों में सार्थक अन्तर है।

H_0 की F-परीक्षा, प्रतिदर्श (19.17) के अनुसार निम्न प्रकार कर सकते हैं -
दस उदाहरण के लिए,

$$m = 9 - \frac{3+2+1}{2} = 6, \quad q = (3 - 1) = 2$$

$$\lambda = \frac{3 \times 2 - 2}{4} = 1, \quad s = \sqrt{\frac{9 \times 4 - 4}{9 + 4 - 5}} = 2$$

$$r = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$F = \frac{6 \times 2 - 2 \times 1}{2 \times 3} \times \frac{1 - (0.001178)^{\frac{1}{2}}}{(0.001178)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{10}{6} \times \frac{0.965678}{0.034322} = \frac{9.65678}{0.205932}$$

$$= 46.88$$

सारणी (परि० प-52) द्वारा $\alpha = 0.1$ तथा 6 और 10 स्व० को० पर F का मान 5.39 है। F का परिकल्पित मान सारणीबद्ध मान से अधिक है अतः परिकल्पना H_0 को अस्वीकार कर दिया। अतः यह कह सकते हैं कि प्रजातियों में मापक अन्तर है।

उपरोक्त उदाहरणों का न्यास दृष्टि महाविद्यालय उदयपुर के एक छात्र श्री हरबाल हुमैन के शीर्षक से प्राप्त हुआ।

प्ररनायली

1. विवेचक फलन का उपयोग किन स्थितियों में उपयुक्त है स्पष्ट कीजिये।
2. मक्का की प्रजातियों में विभेद जानने के हेतु एक परीक्षण किया गया¹। निम्न सारणी में न्यास पाँच प्रजातियों तथा पाँच सप्तरणों के प्रति दिया गया है। प्रत्येक प्रजाति के लिए चार पुनरावृत्तियों का प्रयोग किया गया।

प्रजाति संख्या	उपग्र समीपत प्रति हेक्टर (X_1)	प्रति बीघे में बानिया की संख्या (X_2)	प्रति घुट्टी में दानों की संख्या (X_3)	100 दानों का भार (ग्राम में) (X_4)	बीघे की ऊँचाई (से० मी०) (X_5)
R_1	11.43	0.850	341.6	11.73	195.65
1 R_2	17.35	0.666	434.8	16.93	205.71
R_3	19.14	0.909	382.8	16.12	211.40
R_4	22.17	0.863	438.6	16.66	225.91
2 R_1	15.39	1.000	270.2	16.20	155.32
R_2	16.98	0.904	321.0	17.70	187.52
R_3	9.39	0.695	230.0	16.12	137.82
R_4	13.80	0.826	318.2	14.70	171.26
3 R_1	9.79	0.590	245.0	17.12	236.45
R_2	8.02	0.541	298.0	13.56	208.79
R_3	8.40	0.700	255.5	19.97	211.55
R_4	7.73	0.545	256.0	16.35	201.50

1 इस प्रश्न का न्यास श्री योगेन्द्र कुमार गुप्ता, राज० दृष्टि महाविद्यालय, उदयपुर के शीर्षक से प्राप्त हुआ।

4	R_1	24.88	0.956	423.6	17.40	232.91
	R_2	20.90	1.000	373.0	15.14	217.87
	R_3	22.17	0.952	425.4	16.81	234.00
	R_4	24.07	0.950	435.6	17.76	217.90
5	R_1	26.47	0.875	29.6	19.38	255.58
	R_2	12.52	0.782	211.4	20.76	201.47
	R_3	10.04	0.826	227.6	15.46	202.47
	R_4	10.01	0.681	251.4	17.32	220.07

उपर्युक्त न्याय के लिए (i) प्रजाति 1 व 2 में विवेक फलन $Z = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5$ ज्ञात कीजिये।

(ii) विभिन्न प्रजातियों में दूरियों D^2 ज्ञात कीजिये और उनकी साधकता की परीक्षा कीजिये।

(iii) विभिन्न प्रजातियों में मजारीयता की विलक- Λ द्वारा परीक्षा कीजिये।

□ □ □

अनेक जैव अध्ययनों में विभिन्न रसायनिक यौगिकों का कीटों पर विषंत्तापन ज्ञात किया जाता है। इसके लिए प्रयोगों में या तो भिन्न-यौगिकों को लिया जाता है या एक ही यौगिक की विभिन्न सांद्रताओं या मात्राओं को प्रयुक्त किया जाता है। इन प्रयोगों में म जीवित कीटों की गणना प्रत्येक प्रायोगिक यूनिट (Experimental unit) पर टाक्सिन (Toxin) प्रयुक्त करने से पूर्व व पश्चात् कर ली जाती है। माना कि टाक्सिन प्रयुक्त करने से पूर्व एक प्रायोगिक एकक में n कीट थे और टाक्सिन के कारण r कीट मर गये। मृत अनुपात $\frac{r}{n}$ या $\frac{r}{n} \times 100$ प्रतिशत कीट उम यौगिक के कारण मरे। कीटों के मरने

की सख्या टाक्सिन के विषंसेपन एवं सांद्रता पर निर्भर करती है।

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि हमें इस प्रकार के प्रयोगों में दो चरों से सम्बन्ध रहना है, एक तो यौगिक के घोल की सांद्रता या मात्रा से और दूसरा मृत कीटों की प्रतिशत सख्या से। यह मिट्ट किया जा चुका है कि इन दोनों चरों में म किसी एक का भी बटन प्रसामान्य नहीं है। अतः सांद्रता को लघुगणक सांद्रता में और प्रतिशत मृतकों की सख्या को प्रॉबिट में रूपान्तरित कर दिया जाता है।

किसी टाक्सिन की वह मात्रा या सांद्रता, जिसके कम प्रयुक्त करने पर इसका कोई प्रभाव नहीं होता हो किन्तु इससे अधिक मात्रा को प्रयुक्त करने पर इसका प्रभाव स्पष्ट प्रतीत होता हो, सहिष्णुता (tolerance) कहलाती है। सहिष्णुता को प्रायः λ द्वारा सूचित किया जाता है। λ को डी. जे. फिने (D. J. Finney) ने सांद्रता ही कहा और प्रॉबिट विश्लेषण में सांद्रता के लघुगणक को ही लिया जाता है। λ का लघुगणक रूपान्तरण करने पर रूपान्तरित चर X (मान लिया) का बटन प्रसामान्य हो जाता है जहाँ

$$X = \log_{10} \lambda \quad \dots (20.1)$$

चर X का मात्रा-अंश (Dosage) कहते हैं। किसी विशेष स्थिति में कोई अन्य रूपान्तरण उचित हो सकता है किन्तु साधारणतः लघुगणक रूपान्तरण ही उपयुक्त है। स्पष्टतः λ का परास 0 से ∞ है किन्तु $\log_{10} \lambda = X$ का परास $-\infty$ से ∞ हो जाता है जो कि चर X का बटन प्रसामान्य होने के लिए एक प्रतिबन्ध है।

यदि λ का प्रायिकता घनत्व फलन $f(\lambda)$ है तो मृत कीटों का अनुपात जो कि टाक्सिन की सांद्रता को λ से $\lambda + d\lambda$ तक बढ़ाने से प्राप्त होता है, माना dP है। अतः

$$dP = f(\lambda) d\lambda \quad \dots (20.2)$$

किसी जीव-सख्या को एक रसायनिक यौगिक की मात्रा λ_1 , जो कि सहिष्णुता में अधिक है देने पर मृत कीटों का अनुपात 'P' निम्न होता है :

$$P = \int_0^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda \quad \dots (20.3)$$

जो मात्रा 50% जीवों को मारती है उसे माध्य घातक मात्रा (median lethal dose) कहते हैं और इस LDS_{50} द्वारा निरूपित करते हैं। यदि प्रयोग ऐसा है कि जीव मरते नहीं किन्तु इन पर केवल पदार्थ का प्रभाव देना जाता है तो जो मात्रा 50% जीवों का प्रभावित करती हो, मध्यम प्रभावी मात्रा (median effective dose) कहलाती है और इसे ED_{50} द्वारा निरूपित करते हैं। इसी प्रकार 10% अथवा अनुपात के हेतु अनुरूप संकेतन दिये जा सकते हैं जैसे 80% के लिए LD_{80} या ED_{80} या 75% के लिए LD_{75} या ED_{75} द्वारा निरूपित कर सकते हैं। LD_{50} या ED_{50} ज्ञात करने का मुख्य कारण यह है कि इस मात्रा का चरम प्रतिगत मानों की संवेदा घटिका परिष्कृत प्राकल्पन किया जा सकता है।

सहिष्णुता का कोई भी बंटन हो, LD_{50} या ED_{50} के लिए मात्रा λ_0 निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात कर सकते हैं,

$$\int_0^{\lambda_0} f(\lambda) d\lambda = 0.5 \quad \dots (20.4)$$

संवहारे में सहिष्णुता λ का बंटन फलन $f(\lambda)$ ज्ञात करना प्राथमिक कठिन है। लघुगणक वक्रांतरण के पश्चात् x का बंटन प्रसामान्य हो जाता है जिसके अनुसार,

$$dP = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 dx \right\} \quad \dots (20.5)$$

समीकरण (20.5) में μ समय के लिए मध्यम सहिष्णुता या मध्यम प्रभावी मात्रा श्रेणी है अतः

$$\mu = \log_{10} (LD_{50} \text{ या } ED_{50}) \quad (20.6)$$

और σ^2 इस बंटन का प्रसरण है।

दो जीव विध के लिए मात्रा LD_{50} या ED_{50} ज्ञात करने मात्र से पूर्ण आशय नहीं निकलता है यदि एक जीव-विध के लिए सहिष्णुता के बंटने में प्रसरण दूसरे जीव विध के लिए बंटन के प्रसरण से अधिक हो अर्थात् $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (जबकि σ_1^2 व σ_2^2 पहले व दूसरे विध के लिए क्रमशः प्रसरण हैं) तो दूसरे विध की मात्रा में थोड़े ही अन्तर के लिए मृत्यु संख्या में अधिक अन्तर हो जाता है। ऐसा उद्दीनक जिनके शरीर विचारमूलक (physiological) प्रभाव एत से ही अर्थात् माध्य अनुक्रमों हो तो उनके लिए x के प्रसरण भी समान होते हैं तथापि इनकी मध्यम घातक मात्राओं में पर्याप्त अन्तर होता है। ऐसी स्थिति में उनकी अतिशय अन्तर शक्ति (potencies) केवल मध्यम घातक मात्रा द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

ऊपर दिये हुए विवरण के अनुसार $x = i \log_{10} \lambda$ के प्राचल λ और σ^2 का प्रागणन प्रयोग में प्राप्त मृतकों की संख्या के रूपान्तरित मान प्रॉबिट पर निर्भर है। इस रूपान्तरण को प्रॉबिट शब्द सर्वप्रथम बिलिस (Bliss) ने 1934 में दिया। इसमें पूर्व गार्दुम (Gaddum) ने इसी मान को प्रसामान्य तुल्य विचल (normal equivalent deviate) का नाम दिया था। अनुपात P के प्रॉबिट की परिभाषा इस प्रकार कर सकते हैं।

यह प्रसामान्य वटन जिसका माध्य 5 और प्रसरण 1 है, में मुजा अक्ष (Abscissa) पर वह बिन्दु है कि जिसके बाईं ओर का क्षेत्र सम्भावितता P के समान है। P के तदनुगामी प्रॉबिट को Y में निरूपित करते हैं और P तथा Y में गणितीय सम्बन्ध निम्न है।

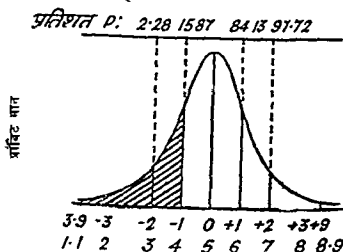
$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Y \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-5)^2\right\} dx \quad \dots (20.7)$$

माना कि $X-5 = u$ ता $dx = du$ और u की सीमाएँ जब $X = -\infty$, $u = -\infty$
 $X = Y$, $u = Y - 5$

अतः u के पदों में X का प्रतिस्थापन करने पर,

$$P = \int_{-\infty}^{y-5} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du \quad \dots (20.7.1)$$

अनुपात P के समान क्षेत्र और प्रॉबिट Y में सबध को प्रसामान्य वक्र द्वारा चित्र (20.1) में प्रदर्शित किया गया है।



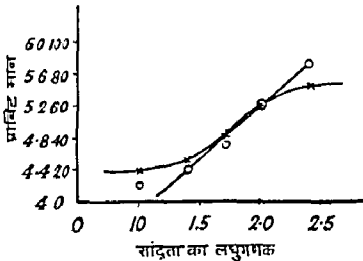
चित्र 20.1 प्रतिशत P और प्रॉबिट Y में सबध का चित्रित प्रदर्शन

जब प्रॉबिट Y का मान 8.9 होता है तो इसके बाईं ओर का क्षेत्र के नीचे का क्षेत्र लगभग 1 होता है। इसी प्रकार जब $Y = 1.1$ हो तो बाईं ओर का क्षेत्र लगभग शून्य होता है। अतः प्रॉबिट Y का मान 1.1 से 8.9 तक विचर सकता है क्योंकि मृत्यु-संख्या 0 प्रतिशत से कम और 100 प्रतिशत से अधिक नहीं हो सकती है।

यदि लघुगणक मापना घोर प्रतिगत मृतकों में प्राप्त बनाये तो यह f (एफ) के रूप का एक वक्र होता है जिसे सिगमोइड (Sigmoid) वक्र कहते हैं। यदि प्रतिगत मृत्यु को प्रॉबिट में रूपांतरित कर दें तो यह वक्र एक सरल रेखा में परिवर्तित होता है।

एक प्रयोग द्वारा एन्ड्रिन (Endrin) की पाच सांद्रता पर प्राप्त प्रतिगत मृत्यु सभ्या घोर रूपांतरित मान निम्न सारणी में दिय गये हैं। सांद्रता के लघुगणक मानों घोर प्रतिगत मृत्यु सभ्या का आलेखित करके सिगमोइड वक्र घोर सांद्रता के लघुगणक मानों घोर प्रतिगत मृत्यु सभ्या के अनुसार प्रॉबिट मानों को आलेखित करके प्रॉबिट रेखा का चित्र (20.2) में प्रदर्शित किया गया है —

सांद्रता विधीयमान प्रति 1000 घन म. (λ)	$\log_{10} \lambda$ (X)	प्रतिगत मृत्यु सभ्या (P)	प्रॉबिट मान (Y)
250	2.4	76.6	5.7
100	2.0	60.0	5.2
50	1.7	40.0	4.7
25	1.4	26.6	4.4
10	1.0	20.0	4.2



चित्र 20.2 सिगमोइड वक्र तथा प्रॉबिट रेखा सेखाचित्र

यदि लघुगणक मापना का बटन प्रमाणात्मक न हो तो प्रॉबिट बिन्दुओं का आलेख करने पर भी चित्र रेखीय नहीं होता है। चित्र का रेखीय न होना, बीटा के समूह एकत्र न होने के कारण हो सकता है जबतः इस स्थिति में चित्र प्रयोगों कायम होना है। प्रायः एसी स्थिति में मापना λ का लघुगणक रूपांतरण उपयुक्त नहीं होता है।

कुछ फर्दनाशियों के लिए रूपान्तरण $X = \lambda^1$ उपयुक्त है जबकि $\lambda \leq 1$ होता है किन्तु व्यवहार में लघुगणक और प्रॉबिट रूपान्तरण ही प्रयोग किये जाते हैं जब तक कि इनके अनुचित होने के विशेष कारण ज्ञात न हो चुके हों।

न्यास का प्रॉबिट विश्लेषण

रूपान्तरण के पश्चात् न्यास का सांख्यिकीय विश्लेषण किया जाता है। इसका उद्देश्य LD 50 या ED 50 को ज्ञात करना, विभिन्न परिदृश्यों की परीक्षा करना या X पर प्रॉबिट Y का समाश्रयण ज्ञात करना ही सक्ता है। समाश्रयण रेखा का समझना करना अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि इसकी सहायता से LD 50 या ED 50 या अन्य किसी भी प्रतिशत के तुल्य प्रॉबिट के लिए सादृता का प्राकृतिक मान ज्ञात कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त रासायनिक पदार्थों की संवेदिता (Sensitivity) रेखा के ढलान के समान होती है। यदि रेखा का ढलान अधिक होना है तो मात्रा-श्रेणी में एक निश्चित प्रतिशत-मृतकों के परास के लिए कम अन्तर होता है अन्यथा इसके विपरीत स्थिति होती है। यदि प्राकृतिक समाश्रयण रेखा का समीकरण $\hat{Y} = a + bx$ है तो रेखा का ढलान b के समान है। 'b' प्रॉबिट मान में वह वृद्धि है जो कि x में प्रति इकाई वृद्धि करने से उत्पन्न होती है।

गणितीय रूप से $b = \frac{1}{s}$ है जहाँ s, x के मानक विचलन σ का प्राकृतिक है।

प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का नेत्र समझना

प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समझना, साधारणतः दो चरों में समाश्रयण से भिन्न है। साधारण स्थिति में यह कल्पना की गई है कि स्वतन्त्र चर x के प्रत्येक मान के लिए प्राप्ति चर Y का प्रसरण समान रहता है किन्तु यह कल्पना प्रॉबिट रेखा के समझना की स्थिति में सत्य नहीं है। LD 50 पर प्रॉबिट Y का प्रसरण न्यूनतम और 0% या 100% मृतकों की स्थिति में अधिकतम (∞ तक) होता है। अतः प्रॉबिट रेखा का यथार्थ समझना करने के लिए X के प्रत्येक मान को चर X के प्रसरण के प्रतिशत से भागित करना होता है। यदि n कीटों के एक समूह पर किसी कीटनाशी को प्रयुक्त करने पर मृतकों की संख्या का अनुपात P है तो $n - (n-1), (n-2), \dots, 3, 2, 1$ कीटों के मरने की प्रायिकता क्रमशः $(P+Q)^n$ के क्रमिक पदों द्वारा दी जा सकती है, क्योंकि स्पष्टतः मृतकों की संख्या का बटन द्विपद बटन होता है और $P+Q=1$ है। माना कि n कीटों में से r कीट मर जाते हैं (प्रभावित होते हैं) तो द्विपद बटन के अनुसार प्रेक्षित अनुपात

$\frac{r}{n} = P$ का प्रसरण, $\frac{PQ}{n}$ है। अतः अनुपात P, n के प्रतिलोमानुपाती है। यह विदित हो

कि प्रसरण के प्रतिलोम का प्रायः जानकारी की मात्रा (quantity of information) भी कहते हैं जो कि n के समानुपाती है। इस जानकारी की मात्रा को ही समूह पर प्रेक्षण के भार के रूप में लिया जाता है। भार गुणक,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \quad \dots(20.8)$$

होता है।

जबकि Z प्रायिकता P के तदनुसार कोटि मान है। परिवर्तन को सरल बनाने के लिए बलिस (Bliss) ने रेखा पर प्रॉबिट मान Y के लिए तदनुसार भार गुणांक W के मानों को सारणीबद्ध किया।

घर X का भारित माध्य,

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^k n_i w_i X_i}{\sum_{i=1}^k n_i w_i} \quad \dots(20.9)$$

जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, k$

सूत्र (20.9) में कोटि के k वर्ग हैं और i वे वर्ग में कोटि की संख्या n_i है। w_i , W_i का मायणित मान है।

व्यवहार में प्रायसो, Z, P व Q के मान प्राप्त करना लगभग असम्भव है परन्तु इन प्राकृतिक मान z, p, q क्रमशः प्रयोग में लाये जाते हैं और इन्हीं के आधार पर w के मान प्राप्त किये जाते हैं।

माना कि मध्यम घातक मात्रा m_1 है पर्याप्त $m_1 = LD 50$ का λ का मान m_1 भी रेखा $\hat{Y} = a + bX$ को समुष्ट करेगा। b का मान प्रयोग बिन्दुओं की दलबन्धन के समन्वित रेखा द्वारा प्राप्त कर सकते हैं। इस परधायी रेखा पर दो घटक बिन्दु लेकर (एक कम और दूसरा बृहत् मान का) उनके निर्देशांक X_1 में देखकर प्राप्त कर किये जाते हैं।

माना कि यह निर्देशांक (X_1, Y_1) और (X_2, Y_2) हैं तब रेखा $\hat{Y} = a + bX$ को समुष्ट करते हैं।

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_1 &= a + bX_1 \\ \text{और } \hat{Y}_2 &= a + bX_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots(20.10)$$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

है। और बिना एक समीकरण में b का परिकल्पित मान रखने पर a का मान प्राप्त हो जाता है।

समजित समीकरण में $Y=5$ रखने पर X का मान ज्ञात हो जाता है जो कि m के समान है अर्थात्

$$5 = a + bm \quad \dots(20.11)$$

समाश्रयण रेखा का नेत्र समझन करते समय यह सावधानी बतानी होती है कि रेखा 40 से 60 प्रतिशत तक के बिन्दुओं में होकर जाय या ये बिन्दु रेखा से निकटतम ह। चरम बिन्दुमा की ओर कोई ध्यान नहीं देना चाहिए प्रधात् वह रेखा से अधिक दूरी पर भी हो सकते हैं।

m की मानक त्रुटि,

$$s_m = \frac{1}{b \sqrt{\sum_i n_i w_i}} \quad \dots(20.12)$$

यदि m और X में अधिक अन्तर हा ता यह कम आगणन होता है अत m के प्रसरण का अधिक परिशुद्ध मान,

$$v(m) = \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{1}{\sum_i n_i w_i} + \frac{(m - X)^2}{\sum_i n_i w_i (X_i - \bar{X})^2} \right\} \quad \dots(20.13)$$

$$s_m = \sqrt{v(m)} \quad \dots(20.14)$$

α प्रतिशत सा० स्त० पर m की विश्वास्यता सीमाएँ (Fiducial limits)¹,

$$m \pm s_m t_\alpha \quad \dots(20.15)$$

हैं।

जहाँ t_α , α सा० स्त० व $(k - 2)$ स्व० को० पर t का सारणीबद्ध मान है।

b का प्रसरण,

$$v(b) = \frac{1}{\sum_i n_i w_i (X_i - \bar{X})^2} \quad \dots(20.16)$$

$$v(b) = \frac{1}{\sum_i n_i w_i x_i^2} \quad \dots(20.16.1)$$

$$\text{जहाँ } \sum_i n_i w_i x_i^2 = \sum_i n_i w_i X_i^2 - \frac{(\sum_i n_i w_i X_i)^2}{\sum_i n_i w_i}$$

1 Fiducial limits, या कि प्रा० फिटर द्वारा सुझाई गई जो, confidence limits से अधिकतम परिस्थितियों में परिणामन भिन्न नहीं है तथापि 'दोनों में कीजिए' रूप से अन्तर है। इसकी विशद व्याख्या इस पुस्तक के स्तर के अनुप्य नहीं है अत इसी यहाँ उल्लेख कर दी गई है।

घौर $s_b = \sqrt{v(b)}$ (20.17)

प्राचल β की $(1 - \alpha)$ 100 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ

$$b \pm s_b t_\alpha \quad \dots(20.18)$$

हैं जहाँ b प्राचल β का प्राकलन है।

s_b का मान (20.16) के अनुसार है घौर t_α का मान α सा० स्त० व $(k - 2)$ स्व० को० के लिए सारणी द्वारा ज्ञात कर लिया जाता है।

उपर्युक्त वर्णन में भार, प्रसरण आदि का परिकलन इस कल्पना पर आधारित है कि प्रत्येक बिन्दुओं घौर समाश्रयण देता पर तुल्य बिन्दुओं में विषमांगता नहीं है। परत विश्लेषण से पूर्व विषमांगता की χ^2 -परीक्षा करना आवश्यक है। जबकि यहाँ प्रतिदर्शज,

$$\chi^2 = \sum \frac{(r_i - nP_i)^2}{n_i P_i Q_i} \quad \dots(20.19)$$

($i=1, 2, 3, \dots, k$)

है। जहाँ i वें समूह में प्रेषित मृत्यु-संख्या r_i है और प्रत्याशित अनुपात P_i है। χ^2 की स्व० को० $(k - 2)$ है।

यदि परिकलित χ^2 का मान, पूर्व निर्धारित सा० स्त० α व $(k - 2)$ स्व० को० के लिए सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो विषमांगता सापेक्ष सिद्ध होती है। इस स्थिति में भार, $\chi^2/(k - 2)$ के समान अधिक आकलित होते हैं। सत्या $\chi^2/(k - 2)$ को विषमांगता गुणक कहते हैं। अधिक आकलित होने के कारण उत्पन्न शक्ति पुनः करने के लिए सभी प्रसरणों को सत्या $\chi^2/(k - 2)$ में गुणा कर दिया जाता है।

माना कि विषमांगता गुणक ϕ है, तो

$$\phi = \frac{\chi^2}{k - 2} \quad \dots(20.20)$$

परत b का समोद्यित प्रसरण,

$$v'(b) = \frac{\phi}{\sum (n_i w_i r_i^2)} \quad \dots(20.21)$$

घौर $s'_b = \sqrt{v'(b)}$..(20.22)

β की समोद्यित विश्वास्यता सीमाएँ निम्न हैं —

$$b \pm s'_b t_\alpha \quad \dots(20.23)$$

उदाहरण 20.1 एक बीटनागी टार्डिबोलेकोन की विभिन्न माट्टाओं का बीट, रेंड पम्पकिन बीटल (red pumpkin beetle) पर प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया।

इस प्रयोग में प्रत्येक मादता के घोल को 30 कीटा पर प्रयुक्त किया गया जिसके परिणाम स्वरूप निम्न आंकड़े प्राप्त हुए —

घोल की मादता (मिली ग्राम प्रति 100 घन सें०)	मृत कीटों की संख्या	प्रतिशत मृत्यु संख्या
00	0	0
7 5	4	13 33
10 0	7	23 33
25 0	13	43 33
50 0	20	66 66
75 0	25	83 33

(इस प्रयोग का नाम डॉ० बी० एम० कार्डिया, उज्जपुर विश्वविद्यालय उदयपुर के सौजन्य से प्राप्त हुआ।)

(1) इस न्यास में प्रॉबिट समाश्रयण रेखा $Y^A = a + bX$ का नेत्र समझन तथा प्राचल β की 99 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं।

पहले घोल की सादता के लघुगणक मान 'X' और प्रतिशत मृत्यु-संख्या के रूपान्तरित मान Y और P के विभिन्न मानों के लिए भार w, इनके लिए दी गई सारणियों (परि० घ-13) व (परि० घ-14) द्वारा ज्ञात किये, जो कि निम्न सारणी में दिये गये हैं —

$\log_{10} \lambda$ (X)	प्रॉबिट मान (Y)	भार ($w = Z^2/pq$)
0 8757	3 89	0 405
1 0000	4 27	0 532
1 3979	4 83	0 627
1 6990	5 43	0 601
1 8751	5 97	0 439

इस उदाहरण के प्रत्येक समूह में कीटा की संख्या समान है जो कि 30 है अतः प्रत्येक n_i का मान 30 ही रहना होगा।

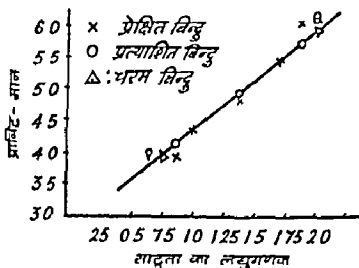
$$\begin{aligned} \sum_1 n_i w_i &= n \sum_1 w \\ &= 30 \times 2 604 \\ &= 78 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i n_i w_i X_i &= r \sum_i w_i X \\ &= 30(0.08757 \times 0.405 + 1.0000 \times 0.532 + \\ &\quad + 1.8751 \times 0.439) \\ &= 30 \times 3.6074 \\ &= 108.2220 \end{aligned}$$

सूत्र (20.9) की सहायता से

$$\bar{X} = \frac{108.222}{78.120} = 1.3853$$

माना कि नेत्र समजित रेखा पर दो धरम मान P व Q हैं जंता कि बिन्दु (20-3) में दिखाया गया है। बिन्दु P व Q के निर्देशांक क्रमशः (75, 3.9) और (20, 5.85) हैं।



चित्र 20-3 नेत्र समजित प्रॉबिट समाश्रयण रेखा

$$\begin{aligned} b &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5.85 - 3.90}{20 - 0.75} \\ &= \frac{1.95}{1.25} = 1.56 \end{aligned}$$

समीकरण $\hat{Y}_1 = a + bX_1$ में X_1 , Y_1 व b का मान रखने पर a प्राप्त हो जाता है।

$$\begin{aligned} 3.9 &= a + 1.56 \times 75 \\ a &= 2.73 \end{aligned}$$

घत नेत्र समजित समाश्रयण रेखा का निम्न समीकरण प्राप्त हो जाता है।

$$Y = 2.73 + 1.56 X$$

LD 50 के लिए m का मान (20 11) के अनुसार निम्न है —

$$5 = 2.73 + 1.56 m$$

$$m = \frac{2.27}{1.56}$$

$$= 1.457$$

नेत्राचित्रीय विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा की सहायता से LD 50 का मान 1.47 है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। यह मान प्रॉबिट $Y=5$ के तदनुसार X का निर्देशक है। सूत्र (20 12) की सहायता से m की मानक त्रुटि,

$$s_m = \frac{1}{1.56 \sqrt{78.12}}$$

$$= \frac{1}{1.56 \times 8.84} = \frac{1}{13.79} = 0.0725 \text{ है।}$$

सूत्र (20.13) द्वारा m का अधिक परिशुद्ध प्रसरण,

$$v(m) = \frac{1}{(1.56)^2} \left\{ \frac{1}{78.12} + \frac{(1.457 - 1.385)^2}{8.331} \right\}$$

जबकि व्यंजक

$$\sum_1^n w_i (X_i - \bar{X})^2 = 30 \sum_1 W_i (X_i - 1.3853)^2$$

$$= 30 \{ 0.405 (0.8757 - 1.3853)^2 + \dots + 0.439 (1.875 - 1.3853)^2 \}$$

$$= 8.331$$

$$v(m) = \frac{1}{2.4336} \left\{ 0.0128 + \frac{.004858}{8.331} \right\}$$

$$= \frac{1}{2.4336} \{ 0.0128 + .00058 \}$$

$$= \frac{1}{2.4336} (0.01338)$$

$$= 0.005498$$

या $s_m = 0.0741$

सूत्र (20.15) की सहायता से LD 50 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ,

$$C.L. = 1.455 \pm 0.0741 \times 3.812$$

$$= 1.455 \pm 0.2358$$

m की उपरि सीमा $= 1.455 + 0.2358$

$$= 1.6908$$

घीर m की निम्न सीमा $= 1.455 - 0.2358$

$$= 1.2192$$

सूत्र (20.16) के अनुसार b का प्रसरण

$$v(b) = \frac{1}{8.331} = 0.120$$

यहाँ सख्या $\sum n_i w_i (X_i - \bar{X})^2$ को, $v(m)$ का परिवर्तन करते समय प्राप्त किया जा चुका है अतः $v(b)$ के लिए इसका सीधा प्रतिस्थापन कर दिया गया है।

या $s_b = 0.11$

सूत्र (20.18) द्वारा b की विश्वास्यता सीमाएँ,

$$C.L. = 1.56 \pm 0.11 \times 3.182$$

$$= 1.56 \pm 0.3500$$

b की उपरि सीमा $= 1.91$

b की निम्न सीमा $= 1.21$

फीटो की प्रेषित मृत्यु-संख्या तथा समाथयन रेषा द्वारा प्राप्त तदनुसार विन्दुमो से प्राप्त मृत्यु-संख्या में नियमांगता की परीक्षा निम्न प्रकार कर सकते हैं :-

$\log_{10} \lambda$ (X)	रेखा द्वारा प्राप्त (Y)	क्षैण मृत्यु-संख्या (Y) = r _i	Y के तदनुसार (P)	$\frac{nP}{=30P}$	$\frac{(r - nP)^2}{nPQ}$
0.8757	4.10	4	0.184	5.52	2.223
1.0000	4.27	7	0.233	7.00	00
1.3979	4.90	13	0.460	13.80	0.086
1.6990	5.43	20	0.666	20.00	00
1.8751	5.65	25	0.742	22.30	1.267

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=1}^5 \frac{(r_i - n_i P_i)^2}{n_i P_i Q_i} \\ &= 3.576 \end{aligned}$$

5 प्रतिशत सा० स्त० व 3 स्व० की० के लिए χ^2 का सारणीबद्ध मान 7.815 है जो कि परिकल्पित χ^2 से अधिक है। इससे सिद्ध होता है कि आलेख बिन्दुओं तथा समाश्रयण रेखा पर तुल्य बिन्दुओं में सार्थक विपमता नहीं है। अतः विपमता गुणक ज्ञात करने तथा संशोधन करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

अधिकतम सम्भाविता विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समंजन

प्रायः ऐसा देखा गया है कि मात्रा-श्रेणी के लघुगणक और प्रॉबिट मृतकों के अनुसार लेखाचित्र पर आलेखित बिन्दुओं के द्वारा नेत्र समंजन करना लगभग असम्भव है क्योंकि आलेखित बिन्दु अधिक प्रकीर्ण पाये जाते हैं। यह स्थिति प्रायः विभिन्न प्रकार की प्रयोग सामग्री या अधिक शोधन मात्राओं के कारण भी उत्पन्न हो सकती है। अतः नेत्र समंजन न करके किसी विश्लेषिक प्रविधि को अपनाना चाहिये। यहाँ अधिकतम सम्भाविता विधि का वर्णन बिना किसी गणितीय प्रमाण के दिया गया है, समंजन विधि को निम्न प्रकार समझ सकते हैं :—

(1) मात्रा को मात्रा-श्रेणी (X) में और प्रतिशत मृतकों को प्रॉबिट (Y) में रूपान्तरित कर लिया जाता है।

(2) इन आनुभविक प्रॉबिट (empirical probit) Y का X के साथ प्राक वेपर पर आलेख करके, उचिततम प्रॉबिट रेखा का नेत्र समंजन कर दिया जाता है। उन आलेखित बिन्दुओं के तदनुसार अन्तःकालीन रेखा पर स्थित बिन्दुओं के लिए अन्तिम प्रॉबिट, (Provisional probit) Y_0 , केवल एक दशमलव तक, पढ़ लिये जाते हैं।

(3) प्रत्येक मान Y_0 के अनुसार डी० जे० फिने (D. J. Finney) द्वारा दी गई सारणी से Y_0 के तदनुसार भार गुणांक w के मान ज्ञात कर लिये जाते हैं। चाहे तो सूत्र $\frac{Z^2}{PQ}$ द्वारा w के मान ज्ञात कर सकते हैं किन्तु सारणी द्वारा यह मान शीघ्रता एवं सुगमता से प्राप्त हो जाते हैं।

(4) समूह में कीटी की संख्या n से w को गुणा करके संख्याएँ nw ज्ञात कर ली जाती हैं।

(5) ऐसा देखा गया है कि प्रेक्षित अनुपात का प्रॉबिट में रूपान्तरण द्वारा समीकरण रेखीय नहीं होता है अतः प्रॉबिट समाश्रयण समीकरण को कार्यकर प्रॉबिट (working probits) Y_1 का प्रयोग करते समय करते हैं। कार्यकर प्रॉबिट को निम्न सूत्र द्वारा परिवर्तित करते हैं :—

$$Y_1 = Y_0 + \frac{p - P}{Z} \quad \dots (20.24)$$

या
$$Y_1 = Y_0 - \frac{q - Q}{Z} \quad \dots (20.24.1)$$

जहाँ Z, Y_0 के तदनुसार कोटि है और p प्रेषित प्रतिगत मृत्यु-संख्या के अनुसार प्रसामान्य वक्र का क्षेत्र है और $q = 1 - p$ है। P, Y_0 के तदनुसार प्रसामान्य वक्र का क्षेत्र है और

$$Q = 1 - P \text{ है।}$$

यदि परीक्षा में लिए गये सब कीट मर जाते हैं अर्थात् शून्य प्रतिगत मृत्यु-संख्या हो तो Y_{100} को अधिकतम कार्यन्तर प्रॉबिट कहते हैं। इस स्थिति में

$$Y_{100} = Y_0 + \frac{1 - P}{Z} \quad \dots (20.25)$$

या
$$Y_{100} = Y_0 + \frac{Q}{Z} \quad \dots (20.25.1)$$

विक्टर और वेल्स ने मारणी (Table XI)² में और फिने ने मारणी (Table IV)³ में अधिकतम तथा न्यूनतम कार्यन्तर प्रॉबिट और $\frac{1}{Z}$ के पराम के लिए सारणियाँ दी हैं। यदि सारणी में दिये हुए P के मान के प्रतिरक्त किसी अन्य मान के तदनुसार कार्यन्तर प्रॉबिट प्राप्त करना हो तो सूत्र (20.24) द्वारा इसका परिवर्तन कर सकते हैं। विभिन्न मापणियों के परिवर्तन के लिए सूत्र किन्तु प्रकार है। इन सूत्रों में Y_1 के प्रतिरक्त सभी संकेतन पिछले लक्षण के अनुरूप हैं।

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i w_i X_i}{\sum n_i w_i}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum n_i w_i Y_i}{\sum n_i w_i} \quad \dots (20.26)$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, K$

यदि K कीटों के समूह हैं जिन्हें K विभिन्न पदार्थ दिये गये हैं तो,

$$\sum (n_i w_i x_i^2) = \sum n_i w_i X_i^2 - \frac{(\sum n_i w_i X_i)^2}{\sum n_i w_i} \quad \dots (20.27)$$

$$\sum (n_i w_i x_i y_{1i}) = \sum n_i w_i X_i Y_{1i} - \frac{(\sum n_i w_i X_i) (\sum n_i w_i Y_{1i})}{\sum n_i w_i} \quad \dots (20.28)$$

$$\sum n_i w_i y_{1i}^2 = \sum n_i w_i Y_{1i}^2 - \frac{(\sum n_i w_i Y_{1i})^2}{\sum n_i w_i} \quad \dots (20.29)$$

2 Statistical Tables for Biological and Agricultural Workers by Fisher, R. A. and Yates F.

3 Probit Analysis by Finney D. J.

$$b = \frac{\sum_1 n_i w_i x_i y_{1i}}{\sum_1 n_i w_i x_i^2} \quad \dots (20 30)$$

$$X^2_{k-2} = (\sum_1 n_i w_i y_{1i}^2) - \frac{(\sum_1 n_i w_i x_i y_{1i})^2}{\sum_1 (n_i w_i x_i^2)} \quad \dots (20 31)$$

$$v(b) = \frac{1}{\sum_1 (n_i w_i x_i^2)} \quad \dots (20.32)$$

$$s_b = \sqrt{v(b)}$$

$$\phi = \frac{X^2}{K - 2} \quad \dots (20 34)$$

और

$$s'_b = \phi s_b \quad \dots (20 35)$$

अतः प्रॉबिट समाश्रयण रेखा,

$$(\hat{Y} - \bar{Y}_1) = b (X - \bar{X}) \quad \dots (20.36)$$

है। जहाँ \hat{Y} , X के निश्चित मान X_0 के लिए प्राग्णित मान है, तो

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{\sum_1 n_i w_i} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_1 (n_i w_i x_i^2)} \quad \dots (20 37)$$

$$s_{\hat{Y}} = \sqrt{v(\hat{Y})} \quad \dots (20 38)$$

\hat{Y} की $(1 - \alpha)$ 100 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाएँ

$$\hat{Y} \pm s_{\hat{Y}} t_{\alpha} \quad \dots (20 39)$$

है। LD 50 या ED 50 के लिए $X=m$, $Y=5$ को समीकरण (20 36) में रखकर m का मान ज्ञात कर लिया जाता है।

50% मृत्यु सख्या के लिए मात्रा, अपनी पूर्वं इकाइयों में (प्रतिप्लु m)/5 के समान होती है। यदि X^2 परीक्षा द्वारा विपमागता सिद्ध हो तो इसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती है। अतः अधिक यथार्थ विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने के लिए पहले ϕ का और इसके पश्चात् g का परिकलन करना होता है जबकि

$$g = \frac{t^2 \phi}{b^2 \sum_1 (n_i w_i x_i^2)} \quad \dots (20 40)$$

LD 50 की यथार्थ विश्वास्यता सीमाएँ निम्न सूत्र द्वारा परिकल्पित की जाती हैं:—

$$\left\{ m + \frac{g}{1-g} (m - \bar{X}) \right\} \pm \frac{t}{b(1-g)} \times \sqrt{\left| \frac{1}{\sum_i n_i w_i} + \frac{(m - \bar{X})^2}{\left(\sum_i n_i w_i x_i^2 \right)} \right|} \quad \dots (24.41)$$

यदि X^2 निरर्थक हो या $g=0$ रज दिया जाता है। इस स्थिति में $t=1.96$ क समान रखते हैं।

अधिकतम सम्भावना विधि के प्रयोग की निम्न उदाहरण द्वारा घोर स्पष्ट समझ सकते हैं।

उदाहरण 20.2 — विद्ये तण्ड में दिये गय उदाहरण (20.1) के प्रेक्षणो तथ्य चित्र (20-1) का प्रयोग करर अधिकतम सम्भावना विधि द्वारा प्रॉबिट समाश्रयण रेखा का समग्रण, LD 50 का परिकल्पन तथा LD 50 की 95 प्रतिशत विश्वास्यता सीमाओं का परिकल्पन निम्न प्रकार कर सकते हैं:—

सबसे पहले निम्न सारणी की रचना की गई है।

मात्रा श्रेणी (X)	समूहों की संख्या (n)	प्रतिशत संख्या (P)	मातृपरिच प्रॉबिट (Y)	प्रत्याक्षित प्रॉबिट (Y ₀)	कार्यकर प्रॉबिट (Y ₁)	Y ₀ के तदनुसार भार (w)
1	2	3	4	5	6	7
0.8757	30	13.33	3.89	4.15	3.912	0.487
1.0000	30	23.33	4.27	4.27	4.274	0.532
1.3979	30	45.33	4.83	4.90	4.832	0.634
1.6990	30	66.66	5.43	5.43	5.430	0.601
1.8751	30	83.33	5.97	5.65	5.932	0.545

उपर्युक्त सारणी के स्तम्भ (5) में प्रत्याक्षित प्रॉबिट मात्र चित्र (20-1) की सहायता से घोर स्तम्भ (6) में कार्यकर प्रॉबिट Y₁ के भार, डी० जे० फिन्ने द्वारा मिलित पुस्तक प्रॉबिट विश्लेषण (Probit analysis, by D. J. Finney) के परिचिष्ट में दी गई सारणी 4 (table IV) में देखकर रज दिये गय है। Y₁ मानों को Y₀ तथा p के मानों के अनुसार घन-संकेतन करके रखा गया है। यदि प्रासंग्यता हो तो प्रत्याक्षित प्रॉबिट Y₀ के तदनुसार Z व P के मान सारणियों द्वारा ज्ञात करके सूत्र (20.24) की सहायता से कार्यकर प्रॉबिट (Y₁) भी परिचिप्त किये जा सकते हैं। किन्तु परिधम को बचाने के हेतु सबसे सारणी का ही प्रयोग किया जाता है।

अन्य संख्याओं का परिकल्पन इस प्रकार कर सकते हैं:—

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i &= 30 \sum_i w_i \\ &= 83\ 970\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i X_i &= 30 \sum_i w_i X_i \\ &= 116\ 6329\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i Y_{1i} &= 30 \sum_i w_i Y_{1i} \\ &= 412\ 1631\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{116\ 6329}{83\ 970} \\ &= 1\ 3890\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \frac{412\ 1631}{83\ 970} \\ &= 4\ 9084\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i X_i^2 &= 30 \sum_i w_i X_i^2 \\ &= 30 \{0\ 0487 (0\ 8757)^2 + 0\ 532 \\ &\quad (1\ 0700)^2 + \dots + 0\ 545 (1\ 8751)^2\} \\ &= 173\ 8620\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i X_i Y_{1i} &= 30 \sum_i w_i X_i Y_{1i} \\ &= 30 \{487 \times 8757 \times 3\ 912 + \dots + \\ &\quad 545 \times 1\ 8751 \times 5\ 932\} \\ &= 594\ 9330\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i Y_{1i}^2 &= 30 \sum_i w_i Y_{1i}^2 \\ &= 30 \{487 \times (3\ 912)^2 + \dots \\ &\quad + 545 (5\ 932)^2\} \\ &= 2066\ 1600\end{aligned}$$

सूत्रों (20.27) से (20.33) तक का प्रयोग करके निम्न सहायकों का परिकलन किया गया है :—

$$\begin{aligned}\sum_i n_i w_i x_i^2 &= 173\ 8620 - \frac{(116\ 6329)^2}{83\ 970} \\ &= 173\ 8620 - 162\ 0011 \\ &= 11\ 8609\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i n_i w_i x_i y_i &= 594 \cdot 9330 - \frac{(116 \ 6329)(412 \ 1631)}{83 \ 970} \\ &= 594 \ 9330 - 572 \ 4875 \\ &= 22 \cdot 4455 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i n_i w_i y_i^2 &= 2066 \ 1600 - \frac{(412 \ 1631)^2}{83 \ 970} \\ &= 2066 \cdot 1606 - 2023 \ 0847 \\ &= 43 \ 0753 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{22 \ 4455}{11 \ 8609} \\ &= 1 \ 8924 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(b) &= \frac{1}{11 \ 8609} \\ &= 0 \ 0843 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_b &= \sqrt{0 \ 0843} \\ &= 0 \cdot 2903 \end{aligned}$$

(20.36) के अनुसार प्रॉबिट समाश्रयण रेखा

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 4 \cdot 9084 + 1 \cdot 8924 (X - 1 \cdot 3890) \\ &= 1 \ 8924 X + 2 \cdot 2799 \end{aligned}$$

है। माना कि X का निश्चित मान $X_0 = 2$ है तो Y का परिकल्पित मान $= 6 \ 0647$ सूत्र (20.37) की सहायता से,

$$\begin{aligned} v(\hat{Y}) &= \frac{1}{83 \ 970} + \frac{(2 - 1 \ 3890)^2}{11 \cdot 8609} \\ &= 0 \ 0434 \end{aligned}$$

$$s_{\hat{Y}} = 0 \ 2137$$

है। (20.39) की महादत्ता से \hat{Y} की 95 प्रतिशत विश्वासघटना भीमार्गे

$$\begin{aligned} C.L. &= 6 \ 0647 \pm 3 \ 182 X \cdot 2137 \\ &= 6 \ 0647 \pm 6 \ 800 \end{aligned}$$

$$Y \text{ की उच्चरि सीमा} = 6 \ 7447$$

$$Y \text{ की निम्न सीमा} = 5 \ 3847$$

है। LD 50 ज्ञात करने के लिए प्रॉबिट समाश्रयण रखा में $X=m$ और $Y=5$ रखकर m का मान ज्ञात कर लिया।

$$5 = 1.8924 \times m + 2.2799$$

या $m = 1.4374$

सादृशता λ ज्ञात करने के लिए m का प्रतिलघु लिया

$$\lambda = \text{Anti log } (1.4374)$$

$$= 27.38 \text{ मिलीग्राम प्रति } 100 \text{ घन से.}$$

सूत्र (20.31) की सहायता में, X^2 का मान विषमांगता के प्रति परिवर्तना-परीक्षा के लिए ज्ञात कर सकते हैं।

$$X^2 = 43.0753 - \frac{(22.4455)^2}{11.8609}$$

$$= 0.5996$$

X^2 का परिवर्तित मान $\alpha = 0.5$ सा. स्त. तथा 3 स्व. को. पर, X^2 के सारणीबद्ध मान 7.815 से कम है अतः विषमांगता का सार्थक नहीं होना निश्चित होता है।

X^2 निरर्थक होने पर विषमांगता गुणक ϕ को ज्ञात करने और उसके उपरान्त g का परिकलन करके m की परिशुद्ध विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि इस स्थिति में $g = 0$ लिया जाता है। ऐसा होते हुए भी यहाँ परिकलन करने की विधि को प्रदर्शित करने के लिए ϕ तथा g का परिकलन करके m की परिशुद्ध विश्वास्यता सीमाओं को ज्ञात किया गया है। सूत्र (20.34) की सहायता से,

$$\phi = \frac{0.5996}{3}$$

$$= 0.1999$$

सूत्र (20.35) से,

$$s_b' = 0.1999 \times 0.2903$$

$$= 0.0580$$

सूत्र (20.40) में $\alpha = 0.05$ और 3 स्व. को. के लिए सारणी द्वारा प्राप्त t मान का 3.182 रखने पर

$$g = \frac{(3.182)^2 (0.1999)}{(1.8924)^2 (11.8609)}$$

$$= \frac{2.0244}{42.2763}$$

$$= 0.0477$$

है। अतः सूत्र (20.41) की सहायता से m की 95 प्रतिशत परिशुद्ध विश्वास्यता

सीमाएँ हैं —

$$C.L = \left\{ 1.4374 + \frac{0.0477}{1-0.477} (1.4374-1.3890) \right\}$$

$$\pm \frac{3.182}{1.8924(1-0.477)} \sqrt{\left\{ \frac{1}{83.970} + \frac{(1.4374-1.3890)^2}{11.8609} \right\} \times 0.1999}$$

$$= (1.4374 + 0.020) \pm 1.7657 \times \sqrt{0.0024}$$

$$= 1.4394 \pm 1.7657 \times 0.5$$

$$= 1.4394 \pm 0.883$$

m की उपरि सीमा = 1.5277

m की निम्न सीमा = 1.3511

प्राकृतिक मृत्यु-संख्या के लिए समायोजन

उपर्युक्त विधियों के वर्णन में सर्वत्र यह कल्पना की गई है कि परीक्षा के हेतु लिए गये कीटों या जीवाणु पर जो भी प्रभाव है केवल उद्दीपक या टॉक्सिन के कारण ही है मगर इस ओर कोई ध्यान नहीं दिया गया है कि इनमें कुछ प्रतिक्रिया इन उद्दीपक या टॉक्सिन के बिना भी होती है जैसे कि किसी कीटनाशक का कीटों पर नहीं छिड़का गया हो तो भी उनमें से कुछ प्राकृतिक मृत से मर जाते हैं या किसी फफूँदनाशी का प्रभाव बीजाणु (Spores) प्रकुरण के माध्यम पर देखना हा तो उन बीजाणुओं की संख्या के प्रति समायोजन करना चाहिये जो कि किसी फफूँदनाशी को प्रयुक्त नहीं करने की स्थिति में प्रकुरित नहीं होते हैं। इस प्रकार के सशोधन को डब्ल्यू. एस. एबोट (W. S. Abbot) ने 1925 में निराला था जो कि निम्न रूप में दिया गया है —

यदि जीवाणुओं या कीटों का वह अनुपात C है जो कि बिना जीवनाशी या कीटनाशी के ही मर गये हैं और P प्रेषित मृतकों का अनुपात है जो शोधन के कारण मरे हैं तो कुल मृतकों का अनुपात P₁ यदि दो मृत्यु संख्या स्वतंत्र हो तो निम्न होता है —

$$P_1 = C + P(1-C) \quad \dots(20.42)$$

यस विषय (उपचार) द्वारा मृतकों का अनुपात

$$P = \frac{P_1 - C}{1 - C} \quad \dots(20.43)$$

है। सूत्र (20.42) को एबोट का सूत्र कहते हैं। इसके पर्याय विहित ने बताया कि सहिष्णुता के बढने के प्रायसों का अधिकतम सम्भावित विधि द्वारा प्राकृतन करने में प्राकृतिक मृत्यु संख्या के प्रभाव को ध्येयतः उपेक्षा कर देते हैं किन्तु हमने स्थान पर व्ययंकर संख्या, जिस पर विषय प्रयुक्त किया गया है, n न होकर n(1-C) हाडी है। फिने ने एबोट एवं बिबिस द्वारा लिये गये सशोधनों को समुक्त रूप में मार गुणाई के

परिवर्तित करके प्रयोग करने की विधि को सुझाया। यदि C का वास्तविक मान ज्ञात हो तो किने ने भार w' के लिए निम्न सूत्र दिया —

$$w' = \frac{Z^2}{Q\left(P + \frac{C}{1-C}\right)} \quad \dots (20.44)$$

इन भारों के लिए किने ने अपनी पुस्तक प्रॉबिट-विश्लेषण (Probit analysis) में सारणी-2 (table-II) दी है। यह सारणी 0 से 90 तक प्रतिशत मृत्यु सख्या के तुल्य प्रॉबिट Y में 0.1 अन्तराल और C में 0.1% अन्तराल के लिए दी गई है। यदि $C=0$ हो तो किसी प्रकार के समायोजन की आवश्यकता नहीं है। शून्य के प्रतिरिक्त C किसी भी मान के लिए भार w और w' में सम्बन्ध $w' = \theta w$ के रूप में स्थापित कर सकते हैं।

यह ज्ञात है कि,

$$w = \frac{Z^2}{PQ} \quad \text{या} \quad Z^2 = PQw$$

$$\text{या} \quad w' = \frac{PQw}{Q\left(P + \frac{C}{1-C}\right)} = \theta w \quad \dots (20.44.1)$$

जबकि माना,

$$\theta = \frac{P}{P + \frac{C}{1-C}}$$

$$w' = \frac{P}{P + \frac{C}{1-C}} \times w \quad \dots (20.45)$$

C का मान नियन्त्रण वर्ग अर्थात् वह कोट समूह जिसे कोई उपचार न दिया हो, द्वारा ज्ञात करते हैं। यदि इस वर्ग में बीटों की सख्या अन्य वर्गों की सख्या से बृहत् हो तो C का आकलित मान प्रतभिन्न होता है। यदि C का आकलन अधिक या कम हो तो इसमें सशोधन सिगमाइड (sigmoid) वक्र की सहायता से किया जा सकता है। यदि C का मान बृहत् न हो अर्थात् 20% से कम हो तो w' का सीधा प्रयोग करके प्रॉबिट विश्लेषण कर लिया जाता है। यदि प्राकृतिक मृत्यु सख्या दर उच्च हो और परीक्षित वर्गों में मृत्यु सख्या दर अत्यधिक अनियमित हो तो C का आकलन कठिन है। ऐसी स्थिति में सांख्यिकीय विश्लेषण, एक सहायक चिन्च X' लेकर करते हैं।

जहाँ,

$$X' = \frac{Q}{Z} \quad \dots (20.46)$$

उदाहरण 20.3 : कीटों पर लिंडेन (Lindane) की तीन सान्द्रताओं का प्रभाव तथा नियन्त्रण (0 सान्द्रता) की अपेक्षा प्रभाव देखने के हेतु एक प्रयोग किया गया। इस प्रयोग के अन्तर्गत निम्न प्रेक्षण प्राप्त हुए। प्रयोग के प्रत्येक समूह में 30 कीट नियमित गये थे —

सान्द्रता मिलीग्राम प्रति 1000 घन से०	48 घंटों के बाद मृत कीटों की संख्या	प्रतिशत मृत्यु संख्या	प्रॉबिट Y	भार w
0	5	16.66	4.0313	449
100	26	86.66	6.1104	401
50	20	66.66	5.4305	594
25	11	36.66	4.6591	610

उपर्युक्त न्यास का प्रॉबिट विश्लेषण करने से पूर्व यह आवश्यक है कि प्राकृतिक मृत्यु संख्या, जो कि नियन्त्रण समूह द्वारा ज्ञात है, का प्रयोग करने अथवा उपचारों के कारण मृत्यु संख्या अनुपात का समायोजन किया जाये।

उपर्युक्त न्यास के अनुसार,

$$C = 1666$$

विभिन्न सान्द्रताओं पर कुल मृतकों के अनुपात P_1 का मान सूत्र (20.43) में रखकर समायोजित अनुपात P प्राप्त हो जाते हैं।

जब $P_1 = 86.66$ तो

$$P = \frac{86.66 - 16.66}{1 - 16.66}$$

$$= \frac{70.00}{83.34}$$

$$= 83.99$$

इसी प्रकार,

जब $P_1 = 66.66$ तो

$$P = \frac{50}{83.34}$$

$$= 59.99$$

और जब $P_1 = 36.66$ तो

$$P = \frac{20}{83.34}$$

$$= 24.00$$

घट: तीनी दी हुई सान्द्रताओं के लिए समायोजित प्रतिगत, मृत्यु सख्या का प्रयोग करना होता है।

सान्द्रता वि० घा० 100 c.c.	समायोजित प्रतिगत मृत्यु सख्या	प्रॉबिट मान Y	भार w
10	83 99	5 99	35 66
5	59 99	5 25	4665
2 5	24 00	4 29	2912

समायोजित प्रतिगत मृत्यु सख्या के लिए भार w सारणी से देखकर रख लिये गये हैं। यदि सारणी उपलब्ध न हो तो इन्हें सूत्र की सहायता से परिवर्तित कर सकते हैं।

यहाँ सूत्र (20 44 1) का प्रयोग करके 10% सान्द्रता के लिए भार w' का परिवर्तन करके दिखाया गया है।

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{8399}{8399 + \frac{1666}{8334}} \\ &= \frac{8399}{10399} \\ &= 0.80767 \end{aligned}$$

या

$$\begin{aligned} w' &= 0.80767 \times w \\ &= 0.80767 \times 449 \\ &= 3626 \end{aligned}$$

सारणी से देखे गये भार तथा परिवर्तित भार में कुछ अन्तर है जो कि अन्तर्वेशन के कारण है।

प्राकृतिक मृत्यु सख्या के लिए समायोजन करने पर प्राप्त प्रतिगत मृत्यु सख्या तथा तदनुसार भारों को प्रयोग करके आवश्यकतानुसार प्रॉबिट विश्लेषण कर सकते हैं।

सापेक्ष अन्त शक्ति

प्रायः किसी नये रसायनिक पदार्थ कीटनाशी, उद्दीपक या फफूँदनाशी का प्रभाव एवं किसी मानक पदार्थ जो चलन में है, उससे तुलनात्मक प्रभाव जानने की आवश्यकता होती है। किसी उपचारित वर्ग की नियन्त्रक वर्ग से तुलना करके प्रभाव सुगमता से ज्ञात हो जाता है। किन्तु एक पदार्थ की दूसरे पदार्थ से तुलना करने हेतु किसी विशेष विधि की अपनाना पड़ता है। नये पदार्थ पर केवल परीक्षण करके मानक पदार्थ के ज्ञात परिणामों

से तुलना करने निष्कर्ष निकालना उचित नहीं है क्योंकि जैव अध्ययन में मिश्र मिश्र समूहों पर विभिन्न पशुओं या बीटों के साथ प्रयोग करने पर परिस्थितियाँ भी मिश्र मिश्र होती हैं अतः सर्वे नये पदार्थ और मानक पदार्थ को एक साथ लेकर एक-सी परिस्थितियों में परीक्षण करना होता है।

किसी उद्दीपक की मापेक्ष अन्त शक्ति समान प्रभावी मात्राओं के अनुपात के समान होती है। एक या एक से अधिक रसायनिक पदार्थों की मानक पदार्थ से सापेक्ष अन्त शक्ति की तुलना समान्तर प्रॉबिट समाश्रयण रेखाओं के द्वारा कर सकते हैं। यदि ये रेखाएँ समान्तर न हों तो अन्य किसी विधि को अपनाना पड़ता है। इस विषय के विस्तृत अध्ययन के लिए पुस्तक "Statistical methods in biological essays" by D J Finney का अध्ययन कीजिये।

माध्य प्रॉबिट अन्तर

दो प्रेक्षण श्रेणियों, जिनसे समान्तर प्रॉबिट समाश्रयण रेखाएँ प्राप्त होती हैं, उनमें अन्तर का मुख्य माप, माध्य प्रॉबिट अन्तर ' Δ ' है।

Δ , दो समान्तर प्रॉबिट रेखाओं में ऊर्ध्वाधर अन्तर के समान होता है। गणितीय रूप में Δ को निम्न रूप में दिया जा सकता है—

$$\Delta_{12} = (Y_1 - Y_2) = bM_{12}$$

$$= \{ \bar{Y}_1 - b(\bar{X}_1 - \bar{X}_1) \} - \{ \bar{Y}_2 - b(\bar{X}_2 - \bar{X}_2) \} \quad \dots (20.47)$$

$$= (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$$

$$bM_{12} = (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$$

$$\text{या } M_{12} = (\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - \left(\frac{(\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1)}{b} \right) \quad \dots (20.48)$$

Δ का प्रसरण जब विषयगतता गुणांक की प्रासंगिकता न हो तो निम्न होता है—

$$v(\Delta) = v \{ (\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - b(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \}$$

$$v(\Delta) = v(\bar{Y}_1) + v(\bar{Y}_2) + (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2 v(b)$$

$$= \frac{1}{\sum n_i w_1} + \frac{1}{\sum n_i w_2} + \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)^2}{\sum x^2} \quad (20.49)$$

उपर्युक्त समीकरणों में M_{12} किन्हीं दो मात्रा श्रेणियों में स्थिर अन्तर है। यहाँ M या Δ का अनुमान 12 श्रेणियों का सूचक है जबकि विश्लेषण दो से अधिक श्रेणियों के प्रति किया जा रहा है। M की अपेक्षा Δ के प्रति परिचयन सुगम है। इसके द्वारा विश्वास्यता भीमापन भी सरलता से प्राप्त कर सकते हैं।

प्रयोग अभिकल्पना

अधिकांश प्रयोगों में एक साथ कई विपले पदार्थों, उद्दीपकों आदि की तुलना करने का उद्देश्य होता है। इन पदार्थों की विभिन्न मात्राओं का स्वयं में अन्तर, दूसरे पदार्थों से तुलना एवं परस्पर क्रिया (Interaction) के विषय में जानकारी प्राप्त करने हेतु दिन-प्रतिदिन प्रयोग किये जाते हैं। बाल, स्थान, प्रयोगकर्ता तथा कीट या पशु, जिन पर प्रभाव देखा जाना है, का परिणामों पर प्रभाव पड़ता है। इन सभी की समानता को प्राप्त करके एक-सी परिस्थितियाँ उपलब्ध करना कठिन है या लगभग असम्भव है। अतः प्रयोग अभिकल्पना की सहायता से प्रयोग को योजनाबद्ध करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। प्रयोग-अभिकल्पना के प्रति ज्ञान प्राप्त करने के लिए इस विषय पर पुस्तक "Experimental Design" by W. T. Federer या अन्य किसी पुस्तक को पढ़िये।

किसी प्रयोग की योजना बनाते समय दो मुख्य समस्याएँ और उत्पन्न होती हैं। एक तो यह कि विपले पदार्थों की कितनी मात्रा (सान्द्रता) ली जाये। इसके लिए कोई नियम बताना तो कठिन है पर यह माना जाता है कि मात्राएँ ऐसी होनी चाहिए कि जो 16 से 84 प्रतिशत तक मृत्यु को सख्या प्रदान करें। ऐसा करने से आसक लगभग समान परिशुद्धि के साथ प्राप्त होते हैं। वर्तमान ज्ञान के अनुसार ऐसा समझा जाता है कि $\log LD 50$ के प्रति सभी आकलन समान परिशुद्धि होते हैं। सान्द्रताएँ जो 16 प्रतिशत से कम या 84 प्रतिशत से अधिक मृत्यु सख्या प्रदान करती हैं उनसे LD 50 की अपेक्षा बहुत कम जानकारी प्राप्त होती है।

दूसरी समस्या यह सामने आती है कि प्रत्येक वर्ग में कितने कीट या पशु होने चाहिए। इसके लिए भी कोई नियम तो नहीं है फिर भी यह उपलब्ध कीटों या पशुओं की सख्या, उनमें भिन्नता की मात्रा और आकलन में इच्छित परिशुद्धि पर निर्भर करती है। साधारणतः बृहत् वर्गों की कम सख्या की अपेक्षा लघु परिमाण के अधिक वर्ग अधिमातीय हैं। व्यवहार में प्रत्येक वर्ग में 20 से 30 तक कीट सख्या उपयुक्त समझी जाती है।

प्ररनामली

1. प्रॉबिट विश्लेषण में रूपान्तरण की आवश्यकता एवं उपयोगिता पर टिप्पणी लिखिए।
2. उन स्थितियों का उदाहरण सहित वर्णन कीजिये जिनमें वर्गमूल रूपान्तरण की आवश्यकता होती है।
3. प्रॉबिट विश्लेषण करने की एक उत्तम विधि का विवरण कीजिये।
4. एनाट का मूल क्या है? प्रॉबिट विश्लेषण में इसके महत्त्व पर प्रकाश डालिए।
5. एलड्रिन (Aldrin) की पाँच सान्द्रताओं के घोल का कीटों पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग किया। घोल की सान्द्रताएँ तथा कीटों की सख्या निम्न प्रकार थी -

सांद्रता Pg/ml	समुद्रों में बीटों की संख्या	48 घंटे के बाद मृत बीटों की संख्या
5.00	30	24
2.50	30	17
1.00	30	15
.50	30	12
.25	30	6

उपरोक्त ग्यास के लिए,

- (i) प्रोबिट समाश्रयण रेखा का समझन कीजिये ।
- (ii) LD 50 ज्ञात कीजिये ।
- (iii) मध्यम घातक मात्रा 'm' की 99 प्रतिशत परिशुद्ध विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात कीजिये ।

□ □ □

प्रसरण विश्लेषण सांख्यिकी का अत्यन्त महत्त्वपूर्ण भाग है। अधिकांशतः प्रयोगों द्वारा उचित एवं शुद्ध निष्कर्ष निकालने हेतु इसका प्रयोग होता है अतः सांख्यिकी में इसका समुचित ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक है। लगभग सभी अध्ययनों में प्रसरण को ज्ञात किया जाता है और समस्या के अनुसार इसका विश्लेषण करना अनिवार्य हो जाता है। समस्या कोई भी प्रकार की हो परन्तु प्रसरण विश्लेषण का मूल सिद्धान्त बही रहता है। समस्या के आधार पर केवल प्रसरण के स्तरों में परिवर्तन होता रहता है। प्रसरण-विश्लेषण की विधि एवं इसका उपयोग कुछ प्रचलित धर्मात्मकनामों (Design of experiments) के लिए इस अध्याय में दिया गया है।

परिभाषा एवं सिद्धान्त

प्रक्षणा के एक समुच्चय के पूर्ण प्रसरण का किन्हीं परिस्थितियों के अनुसार घटकों में वृत्तव्यकरण किया जा सकता है यदि यह घटक प्रेक्षणों के वर्गीकरण में प्रसरण छोट से सम्बन्ध हो। माथ ही इन घटकों के प्रति परिकल्पनाओं की F-परीक्षा की जाती है। इस विश्लेषण को प्रसरण विश्लेषण कहते हैं।

प्रसरण विश्लेषण की विधि को सर्वप्रथम सन् 1920 में आर० ए० फ़िगर ने दिया था और तब से इसका प्रयोग दिन प्रति दिन बढ़ता ही जा रहा है। उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि प्रसरण विश्लेषण के निम्न दो उद्देश्य हैं —

- (1) पूर्ण प्रसरण को घटकों के प्रसरण में विभाजित (split) करना।
- (2) इन घटकों के प्रति परिकल्पनाओं की F-परीक्षा करना।

F-परीक्षा द्वारा अधिकतर वर्गों के खण्डों की समानता की परीक्षा की जाती है।

प्रसरण के विषय में अध्याय 4 में पर्याप्त दिया जा चुका है। फिर भी यहाँ प्रसरण के सूत्र के द्वारा परिकलन का निर्वचन करना उचित प्रतीत होता है। हम जानते हैं कि एक n प्रेक्षणों के प्रतिदर्श $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ के लिए, मादृच्छिक चर X का प्रसरण,

$$\hat{V}(X) = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 \quad \dots (21.1)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} \right\} \quad \dots (21.1.1)$$

सूत्र (21.1.1) के तीन खण्ड हैं $\sum X_i^2$, प्रेषित मानों के वर्गों के योग का निरूपित करता है और मस्य $(\sum X_i)^2/n$ माध्या के लिए सजायन का प्रदर्शित करता है। दूसरे

शर्तों में, मध्या $(\sum X_i)^2/n$ को घटा देने पर उन मानों के वर्गों का योग प्राप्त हो जाता है जो कि माध्यों को मूल बिन्दु पर ले जाने से प्राप्त होता है। $(n - 1)$ प्रेषित मानों की स्वतन्त्रता कोटि है जिससे कि भाग देने पर प्रसरण प्राप्त हो जाता है।

प्रसरण विश्लेषण में मध्या $(\sum X_i)^2/n$ को शोधन कारक (सं० का०) (correction factor C F) कहते हैं और इसे घटितकर G^2/n से निरूपित करते हैं जबकि G घटक के सब प्रेषित मानों का योग है और n प्रेषित मानों की संख्या है जिस पर G आधागित है। प्रसरण विश्लेषण में भी प्रत्येक घटक में प्रति एक प्रेषणों के वर्गों का योग प्राप्त करने के लिये हमें शोधन कारक G^2/n को घटाकर हम घटक की स्वतन्त्रता कोटि में भाग कर देने पर घटक के प्रति प्रसरण प्राप्त हो जाता है। इसे प्रसरण विश्लेषण में माध्य वर्गों का योग कहा जाता है। प्रसरण विश्लेषण करने के लिए सर्वे एक सारणी बनानी होती है जिसे प्रसरण विश्लेषण सारणी कहते हैं। इस सारणी में सर्वे निम्न स्तम्भ होते हैं —

(सारणी 21.1) प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण श्रेणी	स्वतन्त्रता कोटि (स्व० को०)	वर्ग योग (व० घ०)	माध्य वर्ग योग (मा० व० घ०)	F-मान
क				
ख				
ग				
घ				
च				
दुष्टि				
पूर्णा				

जब कि उपर्युक्त सारणी में क, ख, ..घ आदि विवरण श्रेणी हैं अर्थात् विभिन्न घटक हैं। सारणी में अधिकतर स्वतन्त्रता कोटि को स्व० को०, वर्गों के योग को व० घ० और माध्य वर्ग योग को मा० व० घ० के रूप में लिखा जाता है जैसा कि मनु कोष्ठक में दिया गया है।

विवरण श्रेणी के स्तम्भ में घटकों के नाम, जो भी प्रसरण में सम्बद्ध हों, तथा दुष्टि के पूर्ण, शब्द लिख दिये जाते हैं। पूर्ण वर्ग योग का घटक के वर्ग योग से जो अन्तर होता है उसे दुष्टि (या वर्गों के अन्तर) घटक में सम्बद्ध माना जाता है घन दुष्टि या वर्गों के अन्तर घटक की स्व० को०, पूर्ण स्व० को० में से घटकों की स्व० को० के योग को घटा कर प्राप्त हो जाती है। इसी प्रकार दुष्टि के लिए व० घ०, पूर्ण व० घ० में से घटकों के व० घ०

गये हैं। एक-धा वर्गीकरण के लिए प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग निम्न अभिकल्पना की स्थिति में होता है।

पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना (पू०या०घ०)

इस अभिकल्पना का प्रयोग सब प्रयोगगत युनिटों (Experimental units) के मजालीय (एक-मा) होने के स्थिति में किया जाता है। प्रत्येक उपचार एक-क की विभिन्न मर्यादा पर प्रयुक्त कर सकते हैं अर्थात् प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति (replication) मिश्र हो सकती है।

माना कि k उपचारा (प्रतिदलों) के लिए प्रेषण निम्न सारणी के अनुसार है जबकि उपचारों की पुनरावृत्ति संख्या (प्रतिदलं परिमाण) क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ है। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रेषणों को निम्न सारणी में दिया जा सकता है —

(सारणी 21.2) प्रेषणों का सारणीकरण

उपचार का प्रतिदर्श संख्या	प्रेषण		योग	माध्य	
1	X_{11}	X_{12}	$X_{13} \dots X_{1j} \dots X_{1r_1}$	X_1	\bar{X}_1
2	X_{21}	X_{22}	$X_{23} \dots X_{2j} \dots X_{2r_2}$	X_2	\bar{X}_2
3	X_{31}	X_{32}	$X_{33} \dots X_{3j} \dots X_{3r_3}$	X_3	\bar{X}_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	X_{11}	X_{12}	$X_{13} \dots X_{1j} \dots X_{1r_1}$	X_1	\bar{X}_1
k	X_{k1}	X_{k2}	$X_{k3} \dots X_{kj} \dots X_{kr_k}$	X_k	\bar{X}_k
			पूर्व	$X = G$	\bar{X}

प्रेषण X_{ij} में प्रथम अनुक्रम, i उपचार संख्या और दूसरा अनुक्रम, j की प्रेषण को निरूपित करता है।

माना कि $\sum r_i = n$ जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, k$

इस प्रकार के ग्याम के लिए निम्न प्रसरण विश्लेषण सारणी का प्रयोग किया जाता है।

यहाँ समीपन कारक $= \frac{X^2}{\sum r_i} = \frac{G^2}{n}$ होगा है।

(सारणी 21.3) पूर्ण या अर्ध के लिए प्रसरण-विश्लेषण सारणी

विवरण स्रोत	स्व. को.	व. य.	मा. व. य.	F-मान
उपचारों (प्रतिदर्शों) के बीच	(k-1)	$\sum_{i=1}^k X_i^2/r_i - \frac{G^2}{n} = S_{XX}$	$S_{XX}/k-1$	$\frac{S_{XX}}{S_{EE}} \frac{n-1}{k-1} = F$
त्रुटि (प्रतिदर्शों के अन्दर)	(n-k)	$(T_{XX} - S_{XX}) = S_{EE}$	$S_{EE}/n-k$ $= s_e^2$	
पूर्ण	(n-1)	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} = T_{XX}$		

वर्गों या उपचारों के अन्दर त्रुटि को प्रयोग-त्रुटि या बेबल त्रुटि भी कहते हैं। प्रयोग-गत अनिश्चलनाओं की स्थिति में त्रुटि शब्द का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{पूर्ण व. य.} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} \quad \dots (21.2.1)$$

$$= X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{kr}^2 - \frac{G^2}{n} \quad \dots (21.2)$$

= प्रेक्षणों के वर्गों का योग - मा. का.

इसी प्रकार उपचारों या प्रतिदर्शों के बीच,

$$\text{व. य.} = \frac{X_1^2}{r_1} + \frac{X_2^2}{r_2} + \dots + \frac{X_k^2}{r_k} - \frac{G^2}{n} \quad \dots (21.3)$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{X_i^2}{r_i} - \frac{G^2}{n} \quad \dots (21.3.1)$$

प्रतिदर्शों या उपचारों के अन्दर त्रुटि,

$$\begin{aligned} \text{व. य.} &= \left(\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{G^2}{n} \right) - \left(\sum_i \frac{X_i^2}{r_i} - \frac{G^2}{n} \right) \\ &= \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \sum_i \frac{X_i^2}{r_i} \quad \dots (21.4) \end{aligned}$$

इस प्रकार विश्लेषण सारणी से दिये स्तम्भों में विकरण शून्य के अनुसार तस्यार्थे जात करने की विधि उपलब्ध है। इसी विधि का प्रयोग उदाहरण द्वारा स्पष्ट हो जायेगा।

यह ज्ञात है कि दो प्रसरणों का अनुपात F -वटित होता है अतः यही परिकल्पना H_0 की F -परीक्षा की जाती है। प्रसरण विश्लेषण सारणी में प्रसरण अनुपात,

$$F = \frac{\text{प्रतिदशों (बर्गों) के बीच माध्य वर्ग योग}}{\text{प्रतिदशों (बर्गों) के अन्दर माध्य वर्ग योग}}$$

या
$$F = \frac{\text{उपचार माध्य वर्ग-भाग}}{\text{शुद्धि माध्य वर्ग-भाग}}$$

यदि परिकल्पित F का मान, α सा. स्त. व (n_1, n_2) स्व. को. के लिए F के सारणीबद्ध मान से अधिक हो तो H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है अर्थात् H_1 को स्वीकार कर लिया जाता है और इसके विपरीत स्थिति में H_0 को स्वीकार कर लिया जाता है। इस स्थिति में उपयुक्त निर्णय का हम प्रकार भी कहते हैं। H_0 अस्वीकृत होने का अर्थ है कि कम से कम कोई दो उपचार एक दूसरे से अर्थवत् रूप में भिन्न हैं। H_0 स्वीकृत करने का अर्थ है कि इनमें अन्तर निरर्थक है।

टिप्पणी : यदि परिकल्पित F का मान एव से कम हो अर्थात् $F < 1$ हो ता बिना। प्राधिकृत सारणी देते H_0 को स्वीकार करने का निर्णय ले सकते हैं।

उदाहरण 21.1 : तीन प्रकार के कोढ़ (Leprosy) के रोगियों और 20 परीक्षकों के प्रतिदशों में सीरम एल्ब्यूमिन (Serum Albumin) की प्रति 100 मि. सीटर में निम्न मात्रा (ग्रामों में) प्राप्त हुई —

परीक्षकों की संख्या	नियन्त्रण (Control)	लेप्रोमैटस कोढ़ (Lepromatous Leprosy)	ट्यूबर्कुलोइड कोढ़ (Tuberculoid Leprosy)	इंटरमिटेंट T (Intermittent)
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
1	4.20	3.65	3.20	3.90
2.	4.00	3.65	4.10	3.10
3	4.10	3.60	4.20	3.20
4.	3.80	2.70	3.65	4.20
5.	3.30	3.15	4.65	3.00
6.	4.50	4.00	3.70	3.40
7.	4.60	3.60	3.40	
8.	4.30	2.95	4.80	
9.	4.10	2.85	3.20	

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
10.	3 20	3 30	3 90	
11.	4 10	3 80	3 75	
12.	3 20	3 60		
13.	3 90	3 80		
14.	4 40	3 05		
15.	3 70	2 65		
16.	4 50	2 90		
17.	3 60	3 10		
18.	3 50	3 75		
19.	3 80	3 80		
20.	3 40	3 60		
21.		3 70		
22.		3 65		
23.		3 60		
योग	78.20	75.45	42.55	20.80
माध्य	3.91	3.28	3.87	3.47

$$\text{पूर्ण योग} = 217.00$$

$$\text{स० का०} = \frac{(217.00)^2}{60} = 784.81$$

प्रतिदर्शों के बीच व० य०,

$$= \frac{(78.20)^2}{20} + \frac{(75.45)^2}{23} + \frac{(42.55)^2}{11} + \frac{(20.80)^2}{6} \quad \text{— स० का०}$$

$$= 789.97 - 784.81$$

$$= 5.16$$

$$\text{पूर्ण व० य०} = (4.20^2 + 4.00^2 + \dots + 3.00^2 + 3.40^2) - \text{स० का०}$$

$$= 821.46 - 784.81$$

$$= 36.65$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी,

विवरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
प्रतिदलों के बीच	3	5.16	1.72	$\frac{1.72}{0.56} = 3.071$
प्रतिदलों के अन्दर	56	31.48	0.56	
पूर्णा	59			

$\alpha = 0.05$ और (3,56) स्व० को० के लिए F का सारणीबद्ध मान (परि० प-5.2) 2.76 है जो कि F के परिकल्पित मान में कम है। अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि भिन्न प्रकार के रोगिया में सीरम एल्यूमिन की माध्य मात्रा में एक दूसरे से सांख्यिक अन्तर है।

युगल माध्यों की तुलना

यदि प्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत F-परीक्षा द्वारा निराकरणीय परिणतता H_0 को अस्वीकार कर दिया गया हो तो इसका अभिप्राय है कि H_1 को स्वीकार किया है। इस स्थिति में यह जानना आवश्यक हो जाता है कि $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_k$ उपचार माध्यों में से कौन से माध्य एक दूसरे से सांख्यिक रूप में भिन्न हैं और कौन से माध्य समान हैं या सब ही माध्य एक दूसरे से सांख्यिक रूप में भिन्न हैं।

इन युगल माध्यों में सांख्यिक अन्तर जानने की एक प्रचलित विधि, न्यूनतम सांख्यिक अन्तर न्यून सा० य० (least significant difference : LSD) विधि है जब कि,

$$\text{न्यून सा० य०} = \sqrt{s_0^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \times t_{0.05(\text{error d.f.})} \dots (21.5)$$

यहाँ (21.5) में s_0^2 त्रुटि मा० य० है और r_1 व r_2 त्रिण माध्यों की परीक्षा की जा रही है उन उपचार (वर्गों) की क्रमशः पुनरावृत्ति संख्या है।

यदि $r_1 = r_2 = r$ हो तो,

$$\text{न्यून सा० य०} = \sqrt{\frac{2}{r}} s_0^2 \times t_{0.05(\text{error d. f.})} \dots (21.5.1)$$

यहाँ $t_{0.05}$ प्रतिदलन सांख्यिकता स्तर तथा त्रुटि स्वतन्त्रता कोटि के लिए सारणीबद्ध मान है।

उपरोक्त 21.1 का स्थान वा० एम० के लेख, रॉबर्टसन और एडवर्ड्स द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

यदि t का सारणीबद्ध मान t प्रतिगत माप्यंकता स्तर व त्रुटि स्वतन्त्रता कोटि के लिए सूत्र में रख दें तो मन्था

$$\sqrt{\frac{2}{r} s_e^2} t_{01} (\text{error d f})$$

को अधिकतम माप्यंकता अन्तर (most significant difference MSD) कहते हैं।

यदि किन्हीं दो माध्यों में अन्तर न्यून सा० अ० में अधिक या न्यून मा० अ० के समान हो तो यह माना जाता है कि यह माध्य माप्यंक रूप में एक दूसरे में भिन्न हैं और इसके विपरीत स्थिति में माध्यों का समान अर्थात् सजातीय समझा जाता है। न्यूनतम माप्यंक अन्तर को क्रानिक अन्तर का० अ० (critical difference C D) भी कहते हैं।

युगल माध्यों की तुलना के हेतु न्यूनतम माप्यंक अन्तर विधि उपयुक्त है यदि माध्यों के जोड़े जिनमें तुलना करना हो उनका चयन, प्रयोग करने में पूर्व ही कर लिया गया हो अन्यथा कुछ माध्यों में अन्तर (comparision) प्रतिचयन विचरण के कारण स्वतः ही बृहत् होता है। यदि यह अन्तर न्यून सा० अ० से अधिक हो तो k , उपचारों की संख्या अधिक होने की स्थिति में यह कहना कठिन हो जाता है कि यह दोनों उपचार माध्य माप्यंक रूप में एक दूसरे से भिन्न हैं क्योंकि इनका अन्तर प्रतिचयन विचरण के कारण भी बृहत् होने की शक्यता रहती है। अतः यदि उपचारों की बृहत् संख्या ($k > 2$), बृहत् हो और पहले से युगल माध्यों में वैषम्य (Comparision or Contrast) निर्धारित नहीं किये गये हो तथा सब सम्भव युगल उपचार वैषम्यों में तुलना करना हो तो न्यूनतम माप्यंकता अन्तर विधि का प्रयोग करना उचित नहीं है। न्यूनतम माप्यंकता अन्तर विधि के इस दोष को दूर करने के हेतु अन्वेषण क्रियाओं में अनेक विधियाँ मुभाई हैं जैसे स्टुडेन्ट न्यूमेन क्यूल्स परीक्षा (Student Newman Kuuls test), टुकीज परीक्षा (Tukey's test) डकन की बहु-परास परीक्षा (Duncan's multiple range test), सेफे-परीक्षा (Scheffe's test) आदि। यहाँ केवल डकन की बहु-परास परीक्षा का वर्णन दिया गया है जो कि अपने गुणों के कारण एक अच्छी परीक्षा है।

डकन-बहुपरास परीक्षा

यह परीक्षा अन्य की अपेक्षा उत्तम है। इस परीक्षा की विशेषता यह है कि इसमें एक न्यूनतम माप्यंक पराम की युगल माध्यों में अन्तर से तुलना न करके, क्रमिक माध्य श्रेणी में वे एक दूसरे से कितनी दूरी पर हैं इस सत्य को भी महत्त्व दिया गया है। दूरी के आधार पर भिन्न-भिन्न न्यूनतम माप्यंक पराम ज्ञात किये जाते हैं और इन न्यूनतम पराम की तदनुसार युगल माध्यों में अन्तर से तुलना करके उनके माप्यंक रूप में भिन्न होना या न होने का पता चल जाता है। यदि युगल माध्यों में अन्तर न्यूनतम पराम के समान हो या इससे अधिक हो तो वे उपचार माप्यंक रूप में भिन्न माने जाते हैं अन्यथा नहीं। इन परीक्षा में t मान की भाँति, D_0 के मान 5% या 1% माप्यंकता स्तर पर बी०डी० डकन (B D. Duncan) द्वारा दी गई सारणी (परि० प-15) का प्रयोग करके ज्ञात करते

हैं। इनकी बहुपराम विधि को निम्न रूप में कायान्वित कर सकते हैं।

(1) उपचार माध्यों को द्विक सारणी के एक पंक्ति और दूसरी पंक्ति के बीच के स्थानों पर लिख लेते हैं। इस सारणी की प्रत्येक कोष्ठिका में इन माध्यों के अन्तर लिख दिये जाते हैं। इस प्रकार सब सम्भव युक्त उपचार माध्यों के अन्तर प्राप्त हो जाते हैं। बाह्य दोनों पंक्तियों के माध्य अनुक्रम में न्यूनतम माध्य और आगे की अनुक्रम की ओर अधिकतम माध्य छोड़ सकते हैं क्योंकि यह अन्तर पहले ही सारणी में आ जाते हैं।

(2) उपचार माध्य की मानक त्रुटि, सूत्र $\sqrt{\frac{s_p^2}{r}}$ द्वारा ज्ञात कर ली जाती है।

(3) पूर्व निर्धारण के अनुसार साधकता स्तर $\alpha = 0.5$ या 0.1 आदि तब नियत जाते हैं।

(4) इन सारणी द्वारा माध्यों में दूरी p की त्रुटि स्वतन्त्रता की n_2 व α मानों के लिए D_p के मान ज्ञात कर लिए जाते हैं। इस D_p के मान का मूल्या $\sqrt{\frac{s_p^2}{r}}$

में गुणा करने परिकल्पित न्यूनतम पराम ज्ञात हो जाता है। अधिकतम व न्यूनतम माध्य में दूरी 'p' उपचारों की संख्या के समान होती है। यह दूरी कृपया प्रत्येक माध्यों में एक-एक करके घटती जाती है जैसे माना कि पाँच पंक्तियों के प्रत्येक माध्य X_3, X_4, X_1, X_5 व X_2 है। यहाँ X_3 व X_2 की दूरी $p=5$, X_4 व X_2 की दूरी $p=4$, X_1 व X_2 की दूरी $p=3$ या X_5 व X_2 की दूरी $p=3$ आदि है।

(5) सारणी में दिये अन्तरों की दूरी p के अनुसार न्यूनतम पराम तब ज्ञात कर उपचार माध्यों में अन्तर की साधकता के विषय में पराम दिये नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। इस विधि के प्रयोग को निम्न उदाहरण द्वारा दिखाया गया है।

(6) प्रायोगिक अभिकल्पना की भी है, इनकी बहुपराम परीक्षा काय विधि वही रहती है। केवल अन्तर दत्तता करना होता है कि उपचारों के लिए अभिकल्पना के अनुसार त्रुटि माध्य वर्ग-योग का प्रतिस्थापन करके न्यूनतम साधक पराम ज्ञात कर लिया जाता है।

उदाहरण 21.2 सांघातीय की पाँच प्रजातियों के युक्त माध्यों में अन्तर की साधकता परीक्षा, उदाहरण (21.3) में दिये गये तथा प्रसरण विभक्तियन की प्रयोग करके, इनकी बहुपराम विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

पहले माध्यों में अन्तर के लिए सारणी निम्न प्रकार तैयार कर सकते हैं :-

प्रजाति क्रम सख्या	माध्य	4	1	2	5	3
3	8.20	6.49	2.98	1.95	0.14	—
5	8.34	6.35	2.84	1.81	—	—
2	10.15	4.54	1.03	—	—	—
1	11.18	3.51	—	—	—	—
4	14.69	—	—	—	—	—

माना कि इन माध्यों में अन्तर की सांख्यिकता-परीक्षा 5 प्रतिशत सांख्यिकता स्तर पर करना है।

$$\begin{aligned} \text{माध्य की मानक त्रुटि } s_{\bar{X}} &= \sqrt{\frac{s_0^2}{r}} = \sqrt{\frac{3.18}{4}} \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

सारणी (परि० घ-15) डकन के न्यूनतम सांख्यिक परासों का परिवर्तन $\alpha = 0.5$ और त्रुटि स्व० को० 12 के लिए इस प्रकार कर सकते हैं —

$$D_{p-5} = 3.36 \times 0.89 = 2.99$$

$$D_{p-4} = 3.33 \times 0.89 = 2.96$$

$$D_{p-3} = 3.23 \times 0.89 = 2.87$$

$$D_{p-2} = 3.08 \times 0.89 = 2.74$$

उपचारा को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया और उपचार माध्यों में दूरी के अनुसार अन्तरा की डकन के बहुपरास माना से तुलना कर सी गई है। निम्न लेखाचित्रिय सारणी (graphical array) में निरर्थक अन्तरा व नीचे रखा खींच दी गई है।

प्रजाति सख्या	3	5	2	1	4
---------------	---	---	---	---	---

उपयुक्त रेखाओं से स्पष्ट है कि प्रजातियों V_3 व V_1 और V_3 व V_4 , V_5 व V_4 , V_2 व V_4 और V_1 व V_4 में माध्य अन्तर सांख्यिक है और अन्य युगल प्रजाति माध्यों में अन्तर निरर्थक है।

संरिक्तियकीय प्रतिरूप उपरगम

पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना, जिसस कि प्रत्येक प्रयोगगत एकका पर एक प्रेक्षण लिया गया हो, के लिए निम्न सांख्यिकीय प्रतिरूप दिया जाता है।

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + c_{ij} \quad (21.6)$$

$i=1, 2, \dots, K$
 $j=1, 2, \dots, r_i$

जबकि X_{ij} j वे एकक को। वां उपचार देने के पश्चात् प्राप्त प्रेक्षित मान है।

μ समस्त माध्य प्रदर्शित करता है।

τ_i i वे उपचार का वास्तविक प्रभाव है।

c_{ij} j वे एकक का, जिसके लिए i वां उपचार दिया गया है, बाह्य कारका के प्रभाव का प्रदर्शित करता है, इस पद को मुट्टि भी कहते हैं।

टिप्पणी यदि सब उपचारा के लिए समान पुनरावृत्ति मर्यादा 'r' हो तो
 $j=1, 2, 3, \dots, r$

प्रतिरूप (21.6) के आधार पर प्रसरण विश्लेषण करने में कुछ कल्पनाएँ की जाती हैं जो कि निम्न प्रकार हैं —

- (1) प्रेक्षण X_{ij} एक प्रणामान्य गमन का घन है।
- (2) प्रेक्षण X_{ij} में सम्बन्धित सभी प्रभाव माध्य (additive) हैं।
- (3) प्रेक्षण और प्रभावी कारक रैखिक रूप में (linearly) सम्बन्धित हैं।
- (4) μ का एक अक्षर माना गया है और सब τ_i व c_{ij} स्वतन्त्र हैं।
- (5) c_{ij} का बंटन प्रणामान्य है और इसका प्राचल $(0, \sigma_c^2)$ है।
- (6) τ_i का बंटन $N(0, \sigma_\tau^2)$ माना जाता है। साथ ही $\sum_i \tau_i = 0$

(7) यह भी माना गया है कि उपचारा के प्रसरण मजालीय हैं। यदि प्रसरण के मजालीय होने के विषय में शक्यता है तो पार्टिकल (Particle) परीक्षा या अथवा निर्मा परीक्षा द्वारा मजालीयता की पुष्टि कर लेना चाहिए।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप

यदि विश्लेषण करने का उद्देश्य केवल k उपचारा का माध्य प्रभाव जानना है तो हम सीमित हो पश्चात् जा भी परिणाम प्राप्त करने का वह इन उपचारा तक ही सीमित रहने का है। इन उपचारा के लिए प्रतिरूप का स्थिर प्रभाव प्रतिरूप कहते हैं। जैसे उपर पर निर्दिष्ट प्रेक्षण का प्रभाव जानना हो और किसी अन्य प्रेक्षण के प्रति कोई परिणाम न निकालना है या कुछ दवाइया का प्रभाव जानना है जब कि अन्य दवाइयों से कोई प्रयोग न है यादि। उपचारा के लिए जा भी सांख्यिकीय प्रतिरूप का चयन किया जाता है उसे स्थिर प्रभाव प्रतिरूप या प्रतिरूप I (Model I) कहते हैं। इस स्थिति में,

$$\sum_i \tau_i = 0 \quad \text{या} \quad \sum_i \tau_i = 0$$

जब कि $\tau_i = \tau$, ($i=1, 2, 3, \dots, k$) और $E(\tau_i) = \tau$

यादृच्छिक प्रभाव और प्रतिरूप

यदि प्रयोग में ऐसे उपचारों या कारकों का प्रभाव जानना हो जो स्वयं किसी समग्र के भाग के रूप में हों तो इन उपचारों के लिए दिये गये प्रतिरूप को यादृच्छिक प्रभाव प्रतिरूप या प्रसरण-सघटक प्रतिरूप (Component of variance model) या प्रतिरूप II (model II) कहते हैं। जैसे किन्हीं चूहों की जातियों में लक्षणों का अध्ययन करना हो तो प्रयोग में लिये गये चूहों की प्रजाति के यादृच्छिक प्रतिदर्श के रूप में माना जायेगा। इनके अध्ययन में जो भी लक्षण प्राप्त होंगे वह प्रजाति के अन्य चूहों के लिए वही नहीं होंगे। इसके अतिरिक्त एक प्रयोगशाला में काम करने वाले कुछ तकनीशनों (Technicians) की दक्षता या कुशलता ज्ञात करना हो तो इन अनेक में से कुछ तकनीशनों को समग्र के एक प्रतिदर्श के रूप में समझा जाता है। इनके द्वारा जो परिणाम प्राप्त होते हैं उन्हें इन तकनीशनों तक सीमित न रखकर, सम्पूर्ण समुदाय के लिए समझा जाता है, ऐसे उपचारों के हेतु प्रतिरूप को यादृच्छिक प्रभाव प्रतिरूप कहते हैं। इस प्रतिरूप से प्रत्येक उपचार τ , स्वतन्त्र रूप से $N(0, \sigma_{\tau}^2)$ वटित है तथा $E(\tau_i) = 0$

मिश्रित प्रतिरूप

किसी भी सांख्यिकीय प्रतिरूप में μ एक निश्चित प्रभाव और c एक यादृच्छिक प्रभाव है। इस प्रकार सभी प्रतिरूपों को मिश्रित प्रतिरूप कहा जा सकता है। किन्तु μ या c के आधार पर किसी भी प्रतिरूप के प्रकार का निर्णय नहीं किया जाता है। इनके अतिरिक्त यदि एक से अधिक कारकों या उपचारों वाले प्रतिरूप में कुछ प्रभाव निश्चित हो और कुछ प्रभाव यादृच्छिक हो तो ऐसे प्रतिरूप को मिश्रित प्रतिरूप कहते हैं। जैसे किसी चूहों की जातियों पर कुछ भोजनों का प्रभाव जानना हो तो यहाँ चूहों की जाति सम्बन्धी प्रभाव तो यादृच्छिक है और भोजनों के प्रभाव स्थिर प्रकार के हैं। अतः इस द्विधा वर्गीकृत प्रयोग के लिए सांख्यिकीय प्रतिरूप को मिश्रित प्रतिरूप कहा जाता है।

टिप्पणी किसी भी प्रतिरूप को यादृच्छिक, स्थिर या मिश्रित कहा जा सकता है क्योंकि यह प्रयोगकर्ता के ऊपर निर्भर करता है कि वह उपचारों या कारकों के प्रभाव किस रूप में जानना चाहता है। जैसे तकनीशनों की कुशलता सम्बन्धी प्रयोग में केवल उन्हीं तक परिणामों को सीमित रखा जाये जिन पर प्रयोग किया गया है तो तकनीशनों सम्बन्धी प्रभाव स्थिर प्रकार के हो जाते हैं और इस स्थिति में प्रतिरूप स्थिर प्रभाव प्रतिरूप कहा जायेगा। इसी प्रकार का विवेचन अन्य समस्याओं के लिए भी दिया जा सकता है। अतः किसी भी प्रतिरूप का प्रकार उपचारों या कारकों की परिभाषा तथा उनके क्षेत्र पर आधारित है। यही कारण है कि अधिकांशतः विश्लेषण स्थिर प्रभाव प्रतिरूप मानकर ही किये जाते हैं।

प्रतिरूप I व II की स्थिति में पूर्ण यादृच्छिक अभिकल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न रूप में दी जा सकती है :—

प्रतिरूप I : जब प्रति उपचार पुनरावृत्ति-संख्या असमान हो।

(सारणी 21.4)

विवरण शीट	स्व. द०	व० द०	मा० व० द०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० द०
उपचारों के बीच	$(k - 1)$	S_{TT}	$S_{TT}/k - 1 = T$	T/E	$\sigma_e^2 + \frac{\sum r_i r_i^2}{(k-1)}$
प्रयोग त्रुटि	$\sum_i r_i - k$ $= \sum_i (r_i - 1)$	S_{cc}	$S_{cc} / \sum_i (r_i - 1) = E$		σ_e^2
पूर्ण	$\sum_i r_i - 1$	$\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - CF$			

यदि प्रति उपचार पुनरावृत्ति संख्या समान हो अर्थात् $r_i = r$ हो तो सारणी (21.4) में, $\sum_i (r_i - 1) = k(r - 1)$ और $\sum_i r_i - 1 = (kr - 1)$ के समान हो जाता है।

प्रत्याशित मा० व० द० में पद $\sum_i r_i r_i^2 / k - 1 = r \sum_i r_i^2 / k - 1$

प्रतिरूप-II

(सारणी 21.5) जब प्रति उपचार पुनरावृत्ति-संख्या असमान हो

विवरण शीट	स्व. द०	व० द०	मा० व० द०	F-मान	प्रत्याशित मा० व० द०
उपचारों के बीच	$(k - 1)$	S_{TT}	$S_{TT}/k - 1 = T$	T/E	$\sigma_e^2 + r_0 \sigma_r^2$
प्रयोग त्रुटि	$\sum_i r_i - k$ $= \sum_i (r_i - 1)$	S_{cc}	$S_{cc} / \sum_i (r_i - 1) = E$		σ_e^2
पूर्ण	$\sum_i r_i - 1$	$\sum_i \sum_j X_{ij}^2 - CF$			

$$\text{जहाँ } r_0 = \frac{\sum_i r_i - \sum_i r_i^2 / \sum_i r_i}{(k - 1)} \quad \dots (21.7)$$

यदि सारणी (21.5) में सब उपचारों के लिए पुनरावृत्ति संख्या समान हो अर्थात् $r_i = r$ हो तो,

$$\sum_i (r_i - 1) = k(r - 1), \quad \sum_i r_i - 1 = (kr - 1)$$

और

$$r_0 = \frac{kr - kr^2 / kr}{(k - 1)} = r \quad \dots (21.7i)$$

ऊपर दी हुई सारणियों (21.4) व (21.5) से स्पष्ट है कि प्रसरण विश्लेषण दोनों प्रतिरूपों की स्थिति में वही रहता है। केवल उपर्युक्त मारणी में प्रत्याशित माध्य वर्ग योग में स्थिति के अनुसार परिवर्तन होता है। इसी अन्तर को प्रदर्शित करने के लिए उपर्युक्त सारणियाँ दी गई हैं। S_{TT} व S_{cc} आदि का परिवर्तन मारणी (21.3) के अनुसूप है।

पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

इस प्रकार के वर्गीकरण को समावेशी (nested) वर्गीकरण भी कहते हैं। कोई भी अध्ययन चाहे किसी प्रयोग पर आधारित हो प्रतिदर्शी अध्ययन कहलाना है क्योंकि प्रयोगगत एक-एक प्रतिचयन यूनिट के अनुसूप है। अनेक अध्ययनों में प्रत्येक प्रतिचयन एक-एक में ही उप-प्रतिचयन करना होता है या प्रत्येक प्रयोगगत एक-एक ही लक्षण के लिए कई प्रेक्षण लेने होते हैं। जैसे —

(1) क्षेत्र प्रयोगों में प्रायः पूर्ण प्रयोगगत भूखण्ड (plot) को उपज न लेकर, इसमें से कई पादों (quadrants) का यादृच्छिक रीति से प्रतिचयन करके, इनकी उपज (या अन्य किसी लक्षण) के प्रति माप ले लिये जाते हैं। इन प्रेक्षणों को प्रयोगगत एक-एक के प्रतिदर्श प्रेक्षण कहते हैं।

(2) एक क्षेत्र में स्थिति कीटानुषों पर किसी दवा का प्रभाव देखने या किन्हीं अन्य पदार्थों के कारण इनमें वृद्धि आदि देखने के हेतु प्रति उपचार के लिए कुछ कीटानुषों का चयन करके समूह बना लिए जाते हैं और इन समूहों का कीटों पर इच्छित माप ले लिए जाते हैं। एक समूह का प्रत्येक कीट एक उप-प्रतिचयन एक-एक के रूप में माना जाता है।

(3) किसी पंचट्टी द्वारा उत्पादित वस्तु को प्रायः कई तरह से प्रयोग करके इसकी क्षमता या शुद्धता जानने के लिए प्रेक्षण लिए जाते हैं। इन प्रेक्षणों को उप-प्रतिचयन प्रेक्षणों के रूप में प्रयोग करते हैं।

(4) यदि एक पौधे या पेड़ पर एक उपचार प्रयुक्त किया गया है तो इस पर लगी हुई सब पत्तियों या फलों पर किसी लक्षण के प्रति माप लेना लगभग असम्भव है। अतः इस पौधे या पेड़ से कुछ पत्तियों या फलों का यादृच्छिक रीति से चयन कर लिया जाता है और इन चयनकृत पत्तियों या फलों पर प्रेक्षण लिए जाते हैं अर्थात् उप-प्रतिचयन का प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार अनेक अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं और उप-प्रतिचयन का प्रयोग किसी भी अभिव्यक्तता की स्थिति में किया जा सकता है। इन उप-प्रतिचयन एक-एक में प्रसरण का अलग में परिवर्तन करना अत्यधिक उपयोगी है क्योंकि इसमें उप-प्रतिचयन एक-एक में विचरण का पता चल जाता है। उप-प्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार किया जाता है —

स्थिति (क) माना कि पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिव्यक्तता में k उपचार लिये गये हैं, प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति संख्या r है और प्रत्येक प्रयोगगत एक-एक से m प्रेक्षण लिये गये हैं।

इस अभिव्यक्तता के लिये साम्यिकीय प्रतिरूप है,

$$X_{ijk} = \mu + \tau_i + c_j + \eta_{ijk} \quad \dots (21.8)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, k$$

$$j=1, 2, 3, \dots, r$$

$$u=1, 2, 3, \dots, m$$

X_{iju} , τ_i व c_{ij} प्रतिष्प (21.6) के अनुसार हैं और η_{ju} के एक सत्रों में वा उपचार दिया गया है, धरें उप-प्रतिचयन युनिट का प्रभाव है। हमें (1, j, u) के प्रतिचयन एकक की त्रुटि भी कहते हैं। इस प्रतिष्प के प्रति भी यह माना गया है कि μ एक चर है और $c_{ij} \sim N(0, \sigma_c^2)$ व $\eta_{ju} \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ इस विशेष स्थिति में प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.6)के अनुसार कर सकते हैं। यहाँ परिकल्पना $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k$ की परिक्षुत परीक्षा की जाती है।

सारणी(21.6)में प्रतिचयन त्रुटि के लिए स्व० को०, व०य०, पूर्ण स्व० को० व व०य० में से उपचार व प्रयोग त्रुटि की स्व० को० व व०य० घटाकर प्राप्त करते हैं जंमा कि ऊपर सारणी में स्पष्ट दिखाया गया है।

σ_c^2 का सांख्यिक मान,

$$s_c^2 = \frac{E - S}{m} \quad \dots(21.9)$$

और i वें उपचार माध्य की मानक त्रुटि,

$$SE(\bar{X}_i) = \sqrt{\frac{E}{rm}} \quad \dots(21.10)$$

प्रायः E का मान S से कम होता है ($E < S$) धनः σ_c^2 का सांख्यिक s_c^2 ऋणात्मक हो जाता है जो कि एक असम्भव मान है। ऐसी स्थिति में σ_c^2 को शून्य मान लेते हैं तथाकि यह एक अभिनत (biased) सांख्यिक होता है। इस स्थिति में उपचारों की परीक्षा प्रतिचयन त्रुटि के विच्छेद करते हैं या E व S को जोड़कर त्रुटि मा० व०य० के रूप में प्रयोग करते हैं। कुछ व्यक्ति ऐसा मानते हैं कि यदि E, S के विच्छेद परीक्षा करते पर निरर्थक हो तो उपचार प्रभावों की परीक्षा $(E+S)$ या केवल S के विच्छेद करना चाहिए। $(E+S)$ सेन पर E व S की स्व० को० भी जोड़नी होगी है।

यदि प्रयोग में उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या तथा प्रत्येक प्रयोगगत एकक में प्रतिदर्शों प्रेषणा की संख्या समान न हों तो परिकल्पना $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k$ की उपर्युक्त विधि में परीक्षा करना असम्भव है। धनः प्रयोग की मात्रता बनाने समय यथा सम्भव r व m के मान समान करें हैं। किन्तु यथा करना असंभव प्रयोग के लिए सम्भव नहीं है। इस स्थिति में $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k$ की परीक्षा विभिन्न प्रकार के विश्लेषण द्वारा करते हैं।

विश्लेषण (ख) माना कि p_0 या c_{ij} के लिए सांख्यिकीय प्रतिष्प निम्न है, जिसमें k उपचार विद्यमान हैं। उपचार τ_i की पुनरावृत्ति संख्या r_i है और j वें एकक, सत्रों में m_j उपचार दिया गया है, तो m_{ij} उपप्रतिचयन एककों की संख्या है।

(सारणी 216) पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण के लिए प्रमरण विचलेपण सारणी

विवरण शीत	सं० वी०	व० व०	मा० व० व०	F-मान	प्रत्यासित मा० व० व०
उपचारों के बीच	$(k - 1)$	$\sum X_{i.}^2 / rm - \frac{G^2}{rkm} = S_{TT}$	$S_{TT} / k - 1 = T$	T/E	$\sigma_{\eta}^2 + m \sigma_{\epsilon}^2 + mr \sigma_{\tau}^2$
प्रयोग युक्ति	$k(r - 1)$	$\sum \left\{ \sum_i \frac{X_{ij}^2}{m} - \frac{X_{i.}^2}{rm} \right\} = S_{cc}$	$S_{cc} / r(k - 1) = E$		$\sigma_{\eta}^2 + m \sigma_{\epsilon}^2$
प्रतिचयन युक्ति	$rk(m - 1)$	$\sum_i \sum_j \left\{ \sum_u X_{iju}^2 - \frac{X_{ij.}^2}{m} \right\} = S_{XX}$	$S_{XX} / rk(m - 1) = S$		σ_{η}^2
पूर्ण	$krm - 1$	$\sum_u \sum_j \sum_i X_{iju}^2 - \frac{G^2}{rkm}$			

$$X_{iju} = \mu + r_i + c_j + \eta_{iju} \quad \dots(21.11)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, r_i$$

$$u = 1, 2, 3, \dots, m_{ij}$$

इस प्रकार की स्थिति समाज विज्ञान, पशु अनुवंशिकी (animal genetics) या वनस्पति विज्ञान आदि में प्रायः पाई जाती है क्योंकि इनमें एक कुल (family) घोर प्रत्येक कुल की कई-कई सन्तति या प्रभेद और प्रत्येक सन्तति या प्रभेद पर कई-कई प्रेक्षण लेने होते हैं जिनकी संख्या प्रायः समान नहीं होती है। इस प्रकार की समस्याओं का अध्ययन करने के लिए प्रतिरूप (21.11) का प्रयोग करके, परिव्ययन

$$H_0 : r_1 = r_2 = \dots = r_k$$

की परीक्षा प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.7) बनाकर की जा सकती है।

जबकि $n = \sum_i \sum_j m_{ij} =$ उपप्रतिषयन एकको की कुल संख्या

यहाँ

$$a_1 = \frac{n - \sum_i \left(\frac{\sum_j m_{ij}^2}{\sum_j m_{ij}} \right)}{\sum_i (r_i - 1)} \quad \dots(21.12)$$

$$a_2 = \frac{\sum_i \left(\frac{\sum_j m_{ij}^2}{\sum_j m_{ij}} \right) - \sum_i \sum_j m_{ij}^2/n}{(k-1)} \quad \dots(21.13)$$

यदि प्रतिरूप II का प्रयोग करें तो प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.7) के स्वरूप होगी। केवल उपचारों के प्रत्यागित मान में अन्तर हो जायेगा। इस स्थिति में प्रत्यागित उपचार मा० व० मा० $\sigma_{\eta}^2 + a_2 \sigma_c^2 + a_3 \sigma_r^2$ के समान होता है, जहाँ

$$a_3 = \frac{n - \sum_i \left(\frac{\sum_j m_{ij}^2}{\sum_j m_{ij}} \right)^2/n}{(k-1)} \quad \dots(21.14)$$

$H_0 : r_1 = r_2 = \dots = r_k$ की परीक्षा सारणी (21.7) द्वारा परिष्कृत नहीं होगी है क्योंकि $a_1 \neq a_2$ है। अतः जहाँ तक सम्भव हो अतमान पुनरावृत्ति तथा अतमान उपप्रतिषयन एकको की संख्या को प्रयोग में नहीं लेना चाहिये। यदि ऐसा करना आवश्यक हो तो यह ध्यान रखना चाहिये कि उपचारों के प्रति परीक्षा परिष्कृत नहीं है।

पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण की स्थिति में अथवा अभिव्यक्तियों के लिए विश्लेषण स्वरूप सारणी बनाकर कर सकते हैं। मास्पी में अभिव्यक्तियों के अनुसार विवरण खोजे जाते हैं जिनके लिए तदनुसार स्वतन्त्रता-कोटि तथा वर्ग योग आदि प्राप्त कर लिए जाते हैं।

(सारणी 21.7)

विषय का शीर्षक	स्वतंत्र को	दृश्य	मा. द. य.	F-मान	प्रत्याक्षित मा. द. य.
उपचारों के बीच	$(k-1)$	$\sum_i \frac{X_{i..}^2}{m_i} - \frac{G^2}{n} = S_{TT}$	$S_{TT}/k-1$ $= T$	T/E	$\sigma_\eta^2 + a_2\sigma_\epsilon^2 + \frac{\sum(\sum m_{ij})r_i}{(k-1)}$
प्रयोग दृष्टि	$\sum_i (r_i-1)$	$\sum_i \left\{ \sum_j \frac{X_{ij.}^2}{m_{ij}} - \frac{X_{i..}^2}{m_i} \right\} = S_{00}$	$S_{00}/\sum_i (r_i-1)$ $= E$		$\sigma_\eta^2 + a_1\sigma_\epsilon^2$
प्रतिचयन दृष्टि	$\sum_{ij} (m_{ij}-1)$	$\sum_{ij} \left\{ \sum_u \frac{X_{iju}^2}{m_{ij}} - \frac{X_{ij.}^2}{m_{ij}} \right\} = S_{xx}$	$S_{xx}/\sum_{ij} (m_{ij}-1)$		σ_η^2
पूर्णा	$(n-1)$	$\sum_{ij} \sum_u \frac{X_{iju}^2}{m_{ij}} - \frac{G^2}{n}$			

अप्राप्त मान

यदि एक तरफ वर्गीकरण में कोई मान सुप्त हो गया हो तो इसका आकलन करने की आवश्यकता नहीं होती है। इस प्रयोगगत एक को छोड़ दिया जाता है जैसे कि यह प्रयोग में सम्मिलित ही नहीं था। किसी भी प्रयोग में मान अप्राप्त होने की स्थिति अनेकों कारणों से उत्पन्न हो सकती है जैसे कीट या पशु सम्बन्धी प्रयोग में यह सम्भव है कि प्रयोग समाप्त होने से पूर्व ही कीट या पशु की मृत्यु हो जाये। क्षेत्र प्रयोगों में किसी भूलभ्रम की उपज को पशु द्वारा खा जाने या मेट कर देने के कारण या घाग लग जाने के कारण या कभी कभी किसी अन्य कारण से उपज ही न होने के कारण मान अप्राप्त हो जाते हैं, इसी प्रकार अन्य प्रयोगों में भी कुछ अन्य कारणों से अप्राप्त मान हो सकते हैं। पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिव्यक्तियों की स्थिति में इन अप्राप्त मान या मानों को छोड़ दिया जाता है और न्यास के प्रसरण विक्षेपण में स्वतन्त्रता कोर्षिट सेप प्रेक्षणों के तदनुसार ही होती है। सेप प्रेक्षणों का सामान्य रूप में प्रसरण विक्षेपण करने परिक्राम निम्नलिखित लिए जाते हैं।

द्विधा वर्गीकरण की स्थिति में प्रसरण विक्षेपण

किसी प्रयोग की योजना बनाने से पूर्व, प्रयोगगत एककों के विषय में जानना आवश्यक हो जाता है। इस विषय में अनभिज्ञता होने पर यह सम्भव है कि जो उपचारों के कारण अन्तर प्रतीत हो, वह वास्तव में उपचारों के कारण न होकर एककों में विद्यमान विचरण के कारण हो। ऐसी स्थिति में उपचारों के प्रति निर्णय असाध्य नहीं होते हैं। इससे यह संकेत मिलता है कि उपचार एक से एकको को दिये जाने चाहिये। अतः एककों में विचरण होने की स्थिति में इसका वर्गीकरण इस प्रकार कर दिया जाता है कि प्रत्येक वर्ग में एक ही संख्या हो और प्रत्येक उपचार एक वर्ग में एक बार अवश्य होता हो। इन वर्गों को ब्लॉक (block) या पुनरावृत्ति कहते हैं। जैसे :—

(1) क्षेत्र प्रयोगों में वर्गीकरण भूमि या मिट्टी की उर्वरता के आधार पर करना होता है।

(2) यह सामना जाता है कि एक ही फँट्टी द्वारा उत्पादित वस्तु या पदार्थ इतना या क्षमता या अन्य गुणों में एक समान होते हैं। अतः किसी वर्ग में एक फँट्टी द्वारा उत्पादित वस्तुओं सेना उचित है।

(3) पशु सम्बन्धी अध्ययनों में आयु, नस्ल या शारीरिक भार आदि के आधार पर सज्जकों की रचना की जाती है।

(4) सर्वेक्षण सम्बन्धी अध्ययनों में पारिवारिक आय, परिवार में सदस्यों की संख्या, स्थितियों के शिवाय स्तर, रहने के स्थान, आदि निम्न के आधार पर वर्गीकरण या शरीकरण किया जाता है।

इस प्रकार के उदाहरणों की कोई सीमा नहीं है। वहाँ केवल सपत्तियों की दृष्टि से वर्गीकरण के लिए कुछ स्थितियाँ दी गई हैं।

इस वर्गीकरण के अन्तर्गत सदैव दो कारकों के प्रति परिवर्तनाग्रो की परीक्षा करनी होती है। एक तो वर्गों के माध्यों की समानता के प्रति और दूसरी उपचारों के माध्यों की समानता के प्रति सांख्यिकीय परीक्षा करनी होती है। यही कारण है कि इन वर्गीकृत प्रयोगों को द्विधा वर्गीकरण माना जाता है। द्विधा वर्गीकरण के आधार पर रचित प्रयोग यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना या० ख० अ० (Randomized complete block design : RBD) कहलाते हैं।

टिप्पणी : अपूर्ण खण्डक अभिकल्पना (Incomplete block design) भी द्विधा वर्गीकरण पर आधारित होते हैं। या० व० अ० के लिए कुछ अन्य प्रतिबन्ध भी होते हैं।

एक यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना वह है जिसमें कि सजातीय प्रयोगगत एकाको का वर्गों या खण्डकों में विनिधान कर लिया जाता है। इस खण्डक में एकाको की सख्या, उपचारों की सख्या के समान होती है और प्रत्येक खण्डक में स्वतन्त्र और यादृच्छिकीकृत विधि से उपचारों का प्रयोगगत एकाको में विनिधान कर दिया जाता है। इस प्रकार वर्गीकरण द्वारा अर्थात् खण्डकों की रचना से एक और विचरण स्रोत को नियंत्रित कर लिया जाता है जिसे कि प्रयोग की दक्षता बढ़ जाती है। माना कि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में k उपचार हैं और पुनरावृत्ति सख्या (खण्डकों की सख्या) r है। इस प्रकार के प्रयोग को करने के पश्चात् प्रेक्षणों को सदैव निम्न सारणी के रूप में व्यवस्थित कर सकते हैं :—

सारणी (218)

उपचार	पुनरावृत्ति या खण्डक						योग	माध्य
	1	2	3 j		
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{1j}	X_{1r}	\bar{X}_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{2j}	X_{2r}	\bar{X}_2
3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{3j}	X_{3r}	\bar{X}_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}	X_{ij}	X_{ir}	\bar{X}_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	X_{k1}	X_{k2}	X_{k3}	X_{kj}	X_{kr}	\bar{X}_k
योग	X_1	X_2	X_3	X_j	X_r	$X_{..} = G$

पूर्ण प्रेक्षणों की सख्या = kr

उपर्युक्त सारणी में (i, j) वां प्रेक्षण X_{ij} कहलाता है अर्थात् i वां उपचार जो j वीं पुनरावृत्ति में प्रयोगगत एकाको को दिया गया है उमका किसी लक्षण के प्रति लिया गया मान X_{ij} है।

माना कि $X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$

जहाँ $i=1, 2, 3, \dots, k$

$j=1, 2, 3, \dots, r$.

$$\sum_{j=1}^r X_j = \sum_{i=1}^k X_i = G = X.$$

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना पर आधारित या द्विधा वर्गीकरण के अन्तर्गत किये गये अन्वेषण द्वारा प्राप्त न्यास वा प्रसरण विश्लेषण पूर्ण यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना वा एक तरफा वर्गीकरण के समतुल्य ही किया जाता है। इसके लिए केवल इतना अन्तर करना होता है कि प्रसरण विश्लेषण सारणी में एक विचरण स्रोत पुनरावृत्ति या खण्डको के कारण और बढ़ जाता है। दूसरे इम स्थिति में उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या सर्वत्र समान होती है।

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना के लिए रैखिक सांख्यिकीय प्रतिरूप जिसमें कि प्रत्येक एकक पर एक प्रेक्षण लिया गया हो निम्न हाता है —

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad (21.15)$$

जब कि $i=1, 2, 3 \dots, k$

$j=1, 2, 3, \dots, r$

प्रतिरूप I के लिए, $\sum \tau_i = \sum \beta_j = 0$ तथा $E(\tau_i) = \tau_i$, व $E(\beta_j) = \beta_j$

प्रतिरूप में μ समग्र माध्य है, τ_i , i वें उपचार वा वास्तविक प्रभाव है, β_j , j वें खण्डक वा वास्तविक प्रभाव है और e_{ij} , (i, j) वें एकक वा त्रुटि प्रभाव है, प्रत्येक e_{ij} स्वतन्त्र है और $N(0, \sigma^2)$ वटित है। यहाँ परिवर्तनाओं

$H_0: \tau_i = \tau_p$ को $H_1: \tau_i \neq \tau_p$ के विरुद्ध परीक्षा (प्रतिरूप I) में करनी होती है जबकि $i \neq p$ और $\sum \tau_i = 0$ । इसी प्रकार

$H_0: \beta_j = \beta_l$ को $H_1: \beta_j \neq \beta_l$ के विरुद्ध परीक्षा करनी होती है, जबकि $j \neq l$ और $\sum \beta_j = 0$ । न्यूनतम वर्ग विधि वा प्रयोग करके प्राचनों वा माकतन कर लिए जाता है और वर्ग योग ज्ञान कर लिये जाते हैं जिसकी गणितीय व्युत्पत्ति निम्न प्रकार है—

सांख्यिकीय प्रतिरूप (21.15) के विवर प्रभाव प्रतिरूप की स्थिति में आगन्तक तथा वर्ग-योग यहाँ ज्ञान किये गये हैं —

(21.15) के अनुसार,

$$e_{ij} = (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)$$

या $e_{ij}^2 = (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$

समस्त प्रेक्षणा के लिए योग लेन पर,

$$\sum_i \sum_j e_{ij}^2 = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

माना कि

$$Q = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j)^2$$

न्यूनतम वर्ग-विधि के अन्तर्गत $\sum_i \sum_j e_{ij}^2$ को न्यूनतम करना होता है। अतः Q का

μ, τ_i, β_j के सम्बन्ध में क्रमशः आंशिक अवकलन करके शून्य के समान रखने पर μ, τ_i, β_j के अवकलक ज्ञात हो जाते हैं।

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 2 \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j) = 0$$

$$\text{या } \sum_i \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j) = 0$$

$$\therefore -2kr \neq 0.$$

$$\sum_i \sum_j X_{ij} - \sum_i \sum_j \mu - r \sum_i \tau_i - k \sum_j \beta_j = 0$$

$$\therefore \sum_i \sum_j X_{ij} - kr \mu = 0$$

$$[\because \text{प्रतिरूप I के लिए } \sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = 0]$$

$$\therefore \mu = \sum_i \sum_j X_{ij} / kr$$

$$= \bar{X}$$

....(21.16)

इसी प्रकार

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau_i} = -2 \sum_j (X_{ij} - \mu - \tau_i - \beta_j) = 0$$

$$\text{या } \sum_j (X_{ij} - \bar{X} - \tau_i - \beta_j) = 0$$

$$\sum_j X_{ij} - \sum_j \bar{X} - \sum_j \tau_i = 0$$

$$X_{i.} - r \bar{X} - r \tau_i = 0$$

$$\text{या } \tau_i = \frac{X_{i.}}{r} - \bar{X}$$

$$= (\bar{X}_{i.} - \bar{X})$$

....(21.17)

$$\text{घोर } \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_i (X_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_j - \hat{\beta}_1) = 0$$

$$\text{या } \sum_i X_{ij} - \sum_i \bar{X} - \sum_i \hat{\beta}_1 = 0$$

$$X_{ij} - k \bar{X} - k \hat{\beta}_1 = 0$$

$$\therefore \hat{\beta}_1 = \frac{X_{ij}}{k} - \bar{X}$$

$$= (\bar{X}_j - \bar{X}) \quad \dots (21.18)$$

प्रसरण विश्लेषण मारणों (21.4) में दिये वर्ग योगों का इस प्रकार समझाया जा सकता है। पूर्ण प्रसरण का विभाजन करने निम्न रूप में लिया जा सकता है जिसमें कि सीधी घोर के व्यञ्जक क्रमशः अष्टक, उत्तरवार घोर युक्ति वर्ग योग को निरूपित करते हैं। युक्ति वर्ग योग सर्वदा पुनः वर्ग योग से अन्य वर्ग योगों के योग का अन्तर लेकर प्राप्त किया जा सकता है। अतः

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i (X_{ij} - \bar{X})^2 &= \sum_j \sum_i \{ (\bar{X}_j - \bar{X}) + (\bar{X}_i - \bar{X}) \\ &\quad + (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X}) \}^2 \\ &= \sum_j \sum_i (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + \sum_j \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \\ &\quad + \sum_j \sum_i (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X})^2 \quad \dots (21.19) \end{aligned}$$

यद्यपि सभी व्यंजक गुणनफल (cross product) पद शून्य के समान हैं।

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_i (X_{ij} - \bar{X})^2 &= k \sum_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + r \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 \\ &\quad + \sum_j \sum_i (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + \bar{X})^2 \\ &= \left(\sum_i \frac{X_{ij}^2}{k} - \frac{G^2}{kr} \right) + \left(\sum_i \frac{X_{ij}^2}{r} - \frac{G^2}{kr} \right) + \text{युक्ति वर्ग योग} \\ &\quad \dots (21.19.1) \end{aligned}$$

$$= \text{उत्तरवार वर्ग योग} + \text{उत्तरवार वर्ग योग} + \text{युक्ति वर्ग योग}$$

साध्य वर्ग योगों के प्रायश्चित्त मान

(21.15) मान पर स्पष्ट प्रभाव प्रतिष्ठा की स्थिति में,

$$X_{ij} = \mu + \tau_j + \beta_i + e_{ij}$$

जबकि $\sum_i r_i = \sum_j \beta_j = 0$ और $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2)$

प्रतिरूप को j के सम्बन्ध में जोड़कर r स भाग देन पर

$$\frac{1}{r} \sum_j X_{ij} = \mu + r_i + 0 + \frac{1}{r} \sum_j e_{ij}$$

$$\bar{X}_i = \mu + r_i + \frac{1}{r} e_i$$

$$= \mu + r_i + \bar{e}_i$$

(21 20)

इसी प्रकार प्रतिरूप को i के सम्बन्ध में जोड़कर, k स भाग देने पर

$$\bar{X}_j = \mu + \beta_j + \bar{e}_j$$

(21 21)

या i व j के सम्बन्ध में जोड़कर, kr स भाग देन पर,

$$\frac{1}{kr} \sum_i \sum_j X_{ij} = \mu + \frac{1}{kr} \sum_i \sum_j e_{ij}$$

या $\bar{X} = \mu + \bar{e}$

(21 22)

(1) त्रुटि वर्ग-योग का प्रत्याक्षित मान —

(21 19) द्वारा यह विदित है कि,

$$S_{EE} = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{ij} - \bar{X}_i + \bar{X})^2$$

X_{ij} , \bar{X}_{ij} , \bar{X}_i व \bar{X} के उपर्युक्त दिये मान रखने पर,

$$S_{EE} = \sum_i \sum_j (\mu + r_i + \beta_j + e_{ij} - \mu - \beta_j - \bar{e}_j - \mu - r_i - \bar{e}_i + \mu + \bar{e})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (e_{ij} - \bar{e}_j - \bar{e}_i + \bar{e})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (e_{ij}^2 + \bar{e}_j^2 + \bar{e}_i^2 + \bar{e}^2 - 2e_{ij} - \bar{e}_j - 2e_{ij}\bar{e}_i$$

$$+ 2e_{ij}\bar{e} + 2\bar{e}_j\bar{e}_i - 2\bar{e}_j\bar{e} - 2\bar{e}_i\bar{e})$$

$$= \sum_i \sum_j e_{ij}^2 + k \sum_j \bar{e}_j^2 + r \sum_i \bar{e}_i^2 + kr \bar{e}^2$$

$$- 2 \sum_j \bar{e}_j \sum_i e_{ij} - 2 \sum_i \bar{e}_i \sum_j e_{ij} + 2\bar{e} \sum_i \sum_j e_{ij}$$

$$+ 2 \sum_j \bar{e}_j \sum_i \bar{e}_i - 2k \bar{e} \sum_j \bar{e}_j - 2r \bar{e} \sum_i \bar{e}_i$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \sum_j c_{ij}^2 + k \sum_j \bar{c}_j^2 + r \sum_i \bar{c}_i^2 + kr \bar{c}^2 - 2k \sum_j \bar{c}_j^2 \\
 &\quad - 2r \sum_i \bar{c}_i^2 + 2kr \bar{c}^2 + 2kr \bar{c}^2 - 2kr \bar{c}^2 - 2kr \bar{c}^2 \\
 &= \sum_i \sum_j c_{ij}^2 - k \sum_j \bar{c}_j^2 - r \sum_i \bar{c}_i^2 + kr \bar{c}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(S_{EE}) &= \sum_i \sum_j E(c_{ij}^2) - k \sum_j E(\bar{c}_j^2) - r \sum_i E(\bar{c}_i^2) + kr E(\bar{c}^2) \\
 &= kr \sigma_e^2 - k \sigma_e^2 - r \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \\
 &= (r-1)(k-1) \sigma_e^2
 \end{aligned}$$

हम जानते हैं कि त्रुटि मा० व० य० = $\frac{1}{(r-1)(k-1)} S_{EE}$

∴ त्रुटि माध्य वर्ग-योग का प्रत्याशित मान

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{1}{(r-1)(k-1)} S_{EE} \right\} &= \frac{1}{(r-1)(k-1)} E(S_{EE}) \\
 &= \sigma_e^2 \qquad (19.23)
 \end{aligned}$$

(ii) उपचार माध्य वर्ग-योग का प्रत्याशित मान

(21.19) की सहायता से,

$$\text{उपचार व० य० } (S_{TT}) = \sum_i \sum_j (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

(21.20) से \bar{X}_i का (21.22) से \bar{X} व मानों का प्रतिस्थापन करने पर

$$S_{TT} = \sum_i \sum_j (\mu + \tau_i + \bar{c}_i - \mu - \bar{c})^2$$

$$= \sum_i \sum_j (\tau_i + \bar{c}_i - \bar{c})^2$$

$$S_{TT} = \sum_i \sum_j (\tau_i^2 + \bar{c}_i^2 + \bar{c}^2 + 2\tau_i \bar{c}_i - 2\tau_i \bar{c} - 2\bar{c} \bar{c}_i)$$

$$= \sum_i \sum_j \tau_i^2 + \sum_j \sum_i \bar{c}_i^2 + \sum_j \sum_i \bar{c}^2 - 2 \sum_j \sum_i \bar{c}_i \tau_i$$

$$[\because \sum_i \tau_i = 0]$$

$$S_{TT} = r \sum_i \tau_i^2 + r \sum_j \bar{c}_j^2 + kr \bar{c}^2 - 2kr \bar{c}^2$$

$$= r \sum_i \tau_i^2 + r \sum_j \bar{c}_j^2 - kr \bar{c}^2$$

$$E(S_{TT}) = E \left(r \sum_i \tau_i^2 + r \sum_j \bar{c}_j^2 - kr \bar{c}^2 \right)$$

$$= r \sum_i r_i^2 + r \sum_i E(\bar{c}_r^2) - kr E(\bar{c}^2)$$

अतः घट $E(\bar{c}_r^2)$ और $E(\bar{c}^2)$ ज्ञात करना है।

$$(\bar{c}_r^2) = \left(\frac{1}{r} \sum_j c_{ij} \right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j c_{ij}^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{j \neq j'} c_{ij} c_{ij'}$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j c_{ij}^2 \quad [\because \text{सब } c_{ij} \text{ स्वतन्त्र हैं और } N(0, \sigma_0^2) \text{ वित्त हैं।}]$$

$$E(\bar{c}_r^2) = \frac{1}{r^2} \sum_j E(c_{ij}^2)$$

$$= \frac{1}{r^2} \sum_j V(c_{ij})$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot r \sigma_0^2$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{r}$$

इसी प्रकार,

$$(\bar{c}^2) = \left(\frac{\sum_i \sum_j c_{ij}}{kr} \right)^2$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij}^2 / k^2 r^2 + \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j'} c_{ij} c_{i'j'}$$

$$\therefore E(\bar{c}^2) = E\left(\frac{1}{kr} \sum_i \sum_j c_{ij}\right)^2$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_i \sum_j E(c_{ij}^2) +$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} \sum_{i \neq i'} \sum_{j \neq j'} E(c_{ij} c_{i'j'})$$

$$= \frac{1}{k^2 r^2} kr \sigma_0^2 + 0$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{kr}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(S_{TT}) &= r \sum_1 r_i^2 + r \sum_1 \frac{\sigma_0^2}{r} - kr \frac{\sigma_0^2}{kr} \\ &= r \sum_1 r_i^2 + k \sigma_0^2 - \sigma_0^2 \\ &= r \sum_1 r_i^2 + (k-1) \sigma_0^2 \end{aligned}$$

उपचार मा० व० य० (T) = $\frac{1}{(k-1)} S_{TT}$

$$E(T) = \frac{1}{(k-1)} E(S_{TT})$$

$$= \frac{r}{k-1} \sum_1 r_i^2 + \sigma_0^2$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिक्रम II के धतगत

$$F(T) = r \sigma_T^2 + \sigma_0^2$$

(iii) खण्डक माध्य वग योग का प्रत्याशित मान (21.19) के द्वारा,

$$\text{खण्डक व० य० } (S_n) = \sum_1 \sum_j (\bar{X}_{1j} - \bar{X})^2$$

(21.21) व (21.22) का सहायता से

$$S_n = \sum_1 \sum_j (\mu + \beta_j + \bar{c}_j - \mu - \bar{c})^2$$

$$= k \sum_j \beta_j^2 + k \sum_j \bar{c}_j^2 - kr \bar{c}^2$$

जब $E(\bar{c}_j^2)$ ज्ञात करना है। $E(\bar{c}^2)$ का (ii) में ज्ञात किया जा चुका है।

$$E(\bar{c}_j^2) = E\left(\frac{1}{k} \sum_i c_{ij}\right)^2$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_1 E(c_{ij}^2) + \frac{1}{k^2} \sum_{i \neq i'} E(c_{ij} c_{i'j})$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_1 \sigma_e^2$$

$$= \sigma_e^2/k$$

$$\therefore E(S_n) = k \sum_j \beta_j^2 + k \sum_j E(\bar{e}_j^2) - kr E(\bar{e}^2)$$

$$= k \sum_j \beta_j^2 + k \sum_j \frac{\sigma_e^2}{k} - kr \frac{\sigma_e^2}{kr}$$

$$= k \sum_j \beta_j^2 + r \sigma_e^2 - \sigma_e^2$$

$$= k \sum_j \beta_j^2 + (r - 1) \sigma_e^2$$

$$\text{संशुद्धक मा० व० य० (B)} = \frac{1}{r-1} S_n$$

$$\therefore E(B) = E\left(\frac{S_n}{r-1}\right)$$

$$= \frac{1}{(r-1)} E(S_n)$$

$$= \frac{k}{r-1} \sum_j \beta_j^2 + \sigma_e^2$$

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिरूप II के अन्तर्गत.

$$E(B) = k \sigma_{\beta}^2 + \sigma_e^2$$

माहृच्छिक पूर्ण संशुद्धक अभिकल्पना के लिए संशुद्धकों के आकलित मान तथा प्रत्याशित माध्य वर्ग योग ज्ञात करने की विधि का उपर्युक्त वर्णन, पाठकों की विधि से अचरगत कराने तथा इन दोनों के तात्पर्य को बताने की दृष्टि से दिया गया है। उपर्युक्त वर्णन एक प्रयोग-गत एक्क पर एक प्रेक्षण लिए जान की स्थिति में दिया गया है। इसी विधि का अनुकरण करते हुए आकलन एवं प्रत्याशित माध्य वर्ग योग अन्य स्थितियों तथा विभिन्न अभिकल्पनाओं के लिए ज्ञात किये जा सकते हैं। इन सभी में परिवर्तन अभिकल्पना के लिए किये गये सांख्यिकीय प्रतिरूप के अनुरार करना होता है।

उपर्युक्त वर्ग मागों तथा प्रत्याशित माध्य वर्ग योगों का प्रयोग करके निम्न प्रसंग विस्तारण सारणी (219) सुगमता से तैयार की जा सकती है।

(सारणी 219) मा.सं.सं. के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण (i)	स्व. सं. (ii)	सं. सं. (iii)	मा. सं. सं. (iv)	F-मान (v)	प्रयोजित मा. सं. सं. (vi)
एकतर	$(r-1)$	$\frac{1}{k} \sum_j X_j^2 - \frac{G^2}{kr} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{r-1} = B$	$\frac{B}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{k}{r-1} \sum_j \beta_j^2 = \sigma_e^2 + \lambda \sigma_\beta^2$
द्वितर	$(k-1)$	$\frac{1}{r} \sum_i X_i^2 - \frac{G^2}{kr} = S_{TT}$	$\frac{S_{TT}}{k-1} = T$	$\frac{T}{s_e^2}$	$\sigma_e^2 + \frac{r}{k-1} \sum_i \tau_i^2 = \sigma_e^2 + k \sigma_\tau^2$
त्रयोदश	$(r-1)(k-1)$	$\sum_{ij} X_{ij}^2 - \frac{1}{k} \sum_j X_j^2 - \frac{1}{r} \sum_i X_i^2 + \frac{G^2}{kr} = S_{EE}$	$\frac{S_{EE}}{(r-1)(k-1)} = s_e^2$		σ_e^2
कुल	$kr-1$	$\sum_{ij} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{kr}$			

$$\text{एक उपचार माध्य की मानक त्रुटि } S.E = \sqrt{\frac{s_0^2}{r}}$$

दो उपचार माध्यों में अन्तर ($\bar{X}_1 - \bar{X}_p$) जबकि $t \neq p$, की मानक त्रुटि

$$S.E = s_0 \sqrt{\frac{2}{r}} = \sqrt{2 \frac{s_0^2}{r}}$$

s_0^2 , σ_0^2 का प्राकृतिक मान है।

σ_T^2 का भी प्राकृतिक मान ज्ञात जा सकता है। माना कि σ_T^2 का प्राकृतिक मान s_T^2 है जब कि

$$s_T^2 = \frac{T - s_0^2}{r}$$

यदि चाहें तो इसी प्रकार σ_0^2 का प्राकृतिक मान s_0^2 , सूत्र $\frac{B - E}{k}$ द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। किन्तु व्यवहार में केवल उपचारों में ही मुख्यता रुचि होने के कारण, s_0^2 का मान ज्ञात नहीं किया जाता है।

उदाहरण 21.3 सोयाबीन की पाँच प्रजातियों में अन्तर की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग का विन्यास यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिव्यक्ति था जिसमें की चार खण्डक थे। इस प्रयोग द्वारा प्रति भूखण्ड उपज (किलो० में) निम्न प्रकार थी —

(10×15 मी०) प्रति भूखण्ड सोयाबीन की उपज (किलो० में)

क्रम	मायोबीन प्रजाति	R_1	R_2	R_3	R_4	योग	माध्य
1	ब्राग (Bragg)	11 43	9 58	12 70	11 00	44 71	11.18
2	ली (Lee)	8 54	8 93	9 42	13 70	40 59	10.15
3	ली-68 (Lee-68)	6 01	6 56	7 95	12 30	32 82	8.20
4	जे०-3 (J-3)	15 00	15 99	14 82	12 97	58 78	14.69
5	पंजाब-1 (Punjab 1)	7 54	7 22	8 97	9 65	33 38	8.34
	योग	48 52	48 28	53 86	59 62	210 28	

उदाहरण (21.3) का 'याम थी वी० एन०' योगदान, राज कृषि महाविद्यालय, लखनऊ, के सौजन्य से प्राप्त हुआ।

$$\text{स० का०} = \frac{(210 \cdot 28)^2}{20} = 2210 \ 88$$

$$\begin{aligned} \text{प्रजाति व० य०} &= \frac{1}{3} (44 \ 71^2 + \dots + 33 \ 38^2) - \text{स० का०} \\ &= 2323 \ 25 - 2210 \ 88 \\ &= 112 \ 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{समूह व० य०} &= \frac{1}{3} (48 \ 52^2 + \dots + 59 \ 62^2) - \text{स० का०} \\ &= 2228 \ 18 - 2210 \ 88 \\ &= 17 \ 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पूर्व व० य०} &= (11 \ 43^2 + 8 \ 54^2 + \dots + 12 \ 97^2 + 9 \ 65^2) \\ &\quad - \text{स० का०} \\ &= 2378 \ 56 - 2210 \ 88 \\ &= 167 \ 68 \end{aligned}$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व० व०	व० य०	मा० व० य०	F-मात
समूह	3	17.30	5.76	$\frac{5.76}{3.18} = 1.81$
प्रजाति	4	112.37	28.09	$\frac{28.09}{3.18} = 8.83$
त्रुटि	12	38.01	3.18	
पूर्व	19	167.68		

सारणी (प-5 2) द्वारा $F_{05 \ 4 \ 19} = 3.49$ जो कि 1.81 से अधिक है अतः यहाँ $H_0 \ \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ को स्वीकार कर लिया जाता है अर्थात् अभिप्राय है कि समूहकों में सार्थक अंतर नहीं है।

इसी प्रकार सारणीबद्ध $F_{05 \ 4 \ 19} = 3.26$ जो कि 8.83 से कम है अतः

$$H_0 \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

को स्वीकार कर दिया जाता है। इसका अभिप्राय है कि सोयाबीन की प्रजातियों में सार्थक माध्य अंतर है। यह यह परीक्षा करना है कि इनमें से कौनसी प्रजातियाँ एक दूसरे में सार्थक रूप में भिन्न हैं। इस परीक्षा को इवन-बट्टपराम परीक्षा द्वारा किया जाना उपयुक्त है। इसकी उदाहरण (21 2) में इवन-बट्टपराम परीक्षा की विधि को स्पष्ट

करने के हेतु दिया जा चुका है। इन प्रजातियों के युगल माध्य अन्तरो में मार्यकता की परीक्षा के विषय में जानने के लिए उदाहरण (21 2) को पढ़िये।

यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में उपप्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

उपप्रतिचयन का विस्तृत वर्णन पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना के साथ दिया जा चुका है। यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना की स्थिति में भी वही कारण तर्क-संगत है। माना कि प्रत्येक प्रयोगगत एकक से m उपप्रतिचयन एककों का चयन किया गया है अर्थात् प्रत्येक प्रयोगगत एकक पर m प्रेक्षण लिए गये हैं तो साम्बिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{ij\mu} = \mu + \tau_i + \beta_j + \epsilon_{ij} + \eta_{\mu} \quad \dots (21 16)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, k$$

$$j=1, 2, 3, \dots, r$$

$$u=1, 2, 3, \dots, m$$

इस प्रतिरूप के प्रत्येक प्राचल से माप परिचित हैं अतः इनका पुनः वर्णन करना व्यर्थ है। प्रत्येक ϵ_{ij} स्वतन्त्र है और $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ बंटित है और $\eta_{\mu} \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ बंटित है।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप (प्रतिरूप I) की स्थिति में यह भी कल्पनाएँ की गई हैं कि

$$\sum_i \tau_i = \sum_j \beta_j = 0, \quad E(\beta_j) = \beta_j; \quad E(\tau_i) = \tau_i$$

यदि सब उपचारों का माध्य प्रभाव समान हो अर्थात् यदि

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k \quad \text{हो, तो} \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \dots = \tau_k = 0$$

होगा। इस प्रतिबन्ध के परिणाम स्वरूप इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपचारों के प्रभाव की समानता की परीक्षा करने में हमें परिवर्तनाओं,

$$H_0: \tau_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, k$$

या H_1 . इनमें से कम से कम एक τ_i शून्य नहीं है, में से एक को स्वीकार करना होता है।

(सारणी 21.10) प्रतिक्रम I, व्यापक प्रकरण विश्लेषण सारणी जबकि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक घटकत्वनामो मे m प्रेशण प्रति एकक लिये गए है ।

विषय क्षेत्र	स्वतंत्रता	बन्ध	सांख्यिक	F-मान	प्रत्याशित मानक
संख्या	$(r-1)$	$\frac{1}{km} \sum_j X_j^2 - \frac{G^2}{rkm} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{r-1} = B$	B/E	$\sigma_\eta^2 + m\sigma_\epsilon^2 + km \sum_j \frac{\beta_j^2}{r-1}$
उपचार	$(k-1)$	$\frac{1}{rm} \sum_i X_i^2 - \frac{G^2}{rkm} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{k-1} = T$	T/E	$\sigma_\eta^2 + m\sigma_\epsilon^2 + rm \sum_i \frac{T_i^2}{k-1}$
प्रमाण गुण	$(r-1)(k-1)$	$\frac{1}{m} \sum_{ij} X_{ij}^2 - \frac{1}{rm} \sum_i X_i^2 - \frac{1}{km} \sum_j X_j^2$ $-\frac{1}{km} \sum_j X_j^2 + \frac{G^2}{rkm} = S_{EE}$	$\frac{S_{EE}}{(r-1)(k-1)} = E$		$\sigma_\eta^2 + m\sigma_\epsilon^2$
प्रतिक्रम गुण	$kr(m-1)$	$\sum_{ij} \sum_u X_{iju}^2 - \frac{X_{ij}^2}{m} = S_{XX}$	$\frac{S_{XX}}{rk(m-1)} = S$		σ_η^2
गुण	$(rkm-1)$	$\sum_{ij} \sum_u X_{iju}^2 - \frac{G^2}{rkm}$			

$$\text{जबकि } \sum_i \frac{T_i^2}{k-1} = \sigma_T^2 \quad \text{और} \quad \sum_j \frac{\beta_j^2}{r-1} = \sigma_\beta^2$$

यहाँ σ_s^2 का प्राकृतिक मान,

$$s_s^2 = \frac{E - S}{m}$$

और σ_T^2 का प्राकृतिक मान,

$$s_T^2 = \frac{T - E}{rm}$$

उदाहरण 21.4 पाँच पोषक (Host) पौधों का लारवी (Larvae) की वृद्धि पर प्रभाव जानने के हेतु एक प्रयोग किया गया। प्रयोग को यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक प्रतिकल्पना में व्यवस्थित किया गया और तीन पुनरावृत्तियाँ ली गईं। प्रत्येक प्रयोगगत एकक से 10 लारवी का एक समूह लिया गया। तृतीय अन्तरूप (III instar) के शरीर की लम्बाई प्रति लारवा नापने पर अभ्याजित अनुसार थी :—

इस न्यास का प्रसरण विश्लेषण तथा परिणामों का विवेचन निम्न प्रकार कर सकते हैं :—

दिये गये न्यास में प्रत्येक उपचार के लिए प्रयोगगत एकक में 10 प्रेक्षण कीटों पर लिये गए हैं जिनको कि उपप्रतिचयन एककों के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। इस स्थिति में न्यास का प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं :

$$\text{सं० का०} = \frac{(1234\ 74)^2}{150} = 10163 \cdot 2370$$

पुनरावृत्तियों के योग,

$$R_1 = 411 \cdot 28, \quad R_2 = 412 \cdot 01, \quad R_3 = 411 \cdot 41$$

$$\begin{aligned} \text{पुनरावृत्ति व० य०} &= \frac{1}{3} \{ 411 \cdot 28^2 + 412 \cdot 01^2 + 411 \cdot 41^2 \} - \text{सं० का०} \\ &= 10163 \cdot 3332 - 10163 \cdot 2270 \\ &= \cdot 1062 \end{aligned}$$

उपचारों के योग

$$T_1 = 270 \cdot 10, \quad T_2 = 258 \cdot 30, \quad T_3 = 247 \cdot 90, \quad T_4 = 236 \cdot 30,$$

$$T_5 = 222 \cdot 10$$

$$\begin{aligned} \text{उपचार व० य०} &= \frac{1}{5} \{ 270 \cdot 10^2 + \dots + 222 \cdot 10^2 \} - \text{सं० का०} \\ &= 10210 \cdot 018 - 10163 \cdot 227 \\ &= 46 \cdot 553 \end{aligned}$$

लारली के शरीर की सम्बन्ध (मि० सी० में)

सुसम्बन्धि	भारती की षड् संख्या										सौर	मास्य	उपचार मास्य	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
सुसम्बन्धि (T ₁)	R ₁ 200	890	900	900	998	890	900	900	900	900	900	8978	898	
	R ₂ 910	900	898	896	900	900	900	910	900	900	900	9016	902	920
	R ₃ 900	910	910	890	900	900	900	900	900	900	900	9016	902	
	R ₁ 870	860	850	850	860	860	860	860	870	870	870	8610	861	
	R ₂ 860	850	870	870	870	870	860	870	870	870	870	8600	866	863
	R ₃ 870	870	850	860	850	860	860	860	870	860	860	8620	862	
	R ₁ 920	820	850	880	830	850	830	820	820	830	830	8350	835	
	R ₂ 810	810	820	820	820	830	830	820	830	820	820	8210	821	826
	R ₃ 830	840	840	820	830	820	810	810	810	820	820	8230	823	
	R ₁ 750	780	790	795	790	790	790	790	795	780	780	7850	785	
	R ₂ 800	810	790	795	795	785	790	790	790	790	790	7935	793	788
	R ₃ 795	795	795	780	780	780	795	795	795	780	780	7845	784	
	R ₁ 710	710	720	720	750	750	750	750	730	750	730	7340	734	
	R ₂ 720	750	750	750	730	730	730	750	770	760	740	7440	744	740
	R ₃ 730	750	750	750	730	740	730	750	750	750	740	7430	743	
												123470		

प्रयोगगत एवको के व० य०,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{10} \{ 89 \cdot 78^2 + 90 \cdot 16^2 + \dots + 74 \cdot 40^2 + 74 \cdot 30^2 \} - \text{स० का०} \\ &= 10210 - 018 - 10163 \cdot 227 \\ &= 46 \cdot 791 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रयोग त्रुटि} &= 46 \cdot 791 - 46 \cdot 553 - \cdot 0062 \\ &= 0 \cdot 2318 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पूर्ण व० य०} &= (9 \cdot 00^2 + 8 \cdot 90^2 + \dots + 7 \cdot 50^2 + 7 \cdot 50^2) - \text{स० का०} \\ &= 10245 \cdot 1787 - 10163 \cdot 2270 \\ &= 81 \cdot 9517 \end{aligned}$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
पुनरावृत्ति	2	1062	0531	
उपचार	4	46·553	11 638	44 69
प्रयोग त्रुटि	8	0·2318	0 0289	
प्रतिचयन त्रुटि	135	35 1607	0 2604	
पूर्ण	149	81 9517		

प्रयोग त्रुटि, प्रतिचयन त्रुटि में कम है अतः त्रुटि के रूप में प्रतिचयन त्रुटि का ही प्रयोग किया गया है। यदि चाहें तो इस स्थिति में दोनों त्रुटियों को जोड़कर भी त्रुटि वर्ग योग के रूप में प्रयोग कर सकते हैं।

सारणी (परि० घ-5.1) द्वारा $\alpha = .01$ व $(2, 8)$ स्व० को० के लिए F का मान 4.46 है जो कि F के परिकल्पित मान से बहुत कम है अतः उपचारों का सारणी की शरीर की लम्बाई पर अत्यधिक प्रभाव है।

मुगल उपचारों में सापेक्षता की परीक्षा डकन की बहुपरास परीक्षण या न्यूनतम सापेक्ष अन्तर की सहायता से कर सकते हैं। यहाँ न्यूनतम सापेक्ष अन्तर परीक्षा का ही प्रयोग किया गया है। यदि अधिक परिशुद्धि से परीक्षा करनी हो तो डकन की बहुपरास परीक्षा का ही प्रयोग करना चाहिए।

घन सूत्र (21.5.1) की सहायता से,

$$\begin{aligned} \text{सा० प्र०} &= \sqrt{\frac{2}{8 \cdot 10} \cdot 2604} \times 2 \cdot 306 \\ &= 01736 \times 2 \cdot 306 \\ &= 1318 \times 2 \cdot 306 \\ &= 3038 \end{aligned}$$

उपचार माध्यों को धक्करोही कम म रस दिया और जिन युग्म माध्यों में अन्तर 3038 से कम है उनके नीचे रेखा खींच दी। यह उपचार निरर्थक अन्तर को प्रदर्शित करते हैं।

9 00 8 63 8 26 7 88 7 40

सब ही युग्म माध्यों में अन्तर 3038 से अधिक है अतः प्रत्येक उपचार का प्रभाव एक-दूसरे से गार्थक रूप में भिन्न है।

यादृच्छिकीकृत पूर्ण सख्क अभिकल्पना में एक अप्राप्त मान हो तो प्रसरण विश्लेषण

किसी प्रयोग में लुप्त मान किसी भी कारण से हो सकता है। इन कारणों का पूर्णतया यादृच्छिकीकृत अभिकल्पना में अप्राप्त मान की स्थिति में पहले ही दिया जा चुका है। यह बात ध्यान देने योग्य है कि कभी कोई विधि नहीं है कि जिसके द्वारा अप्राप्त मान का ज्ञान किया जा सकता है। एक अप्राप्त मान का आकलन करने का उद्देश्य बस इतना ही है कि जो ग्याम विद्यमान है उसका द्वारा प्रयोग के विषय में अधिकतम सूचना प्राप्त हो जाए और प्रयोगगत त्रुटि कम से कम रहे। ऐसा करना एक कारण आवश्यक है कि एक या एक से अधिक प्रेक्षण अप्राप्त होने पर प्रयोग का पूर्णतया रद्द नहीं किया जा सकता है। अतः प्रयोगगत प्रेक्षणा का विश्लेषण करते समय पहले अप्राप्त मान का आकलन निम्न सूत्र में कर लेते हैं। इस आकलित मान का अप्राप्त मान के स्थान पर रखकर यादृच्छिकीकृत पूर्ण सख्क अभिकल्पना के लिए सामान्य रूप में प्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है, किन्तु विश्लेषण में एक परिवर्तन अवश्य करना होता है वह यह है कि कुल स्वतन्त्र गणनाओं में से एक (अप्राप्त प्रेक्षणा की संख्या के समान संख्या) घटा देते हैं जिसे परिणाम-स्वरूप प्रयोग त्रुटि की स्वतः तदनुसार स्वतन्त्र गणना कम हो जाती है।

गारणी (21.8) के अनुसार यदि y उपचार के लिए लुप्त मान y के सख्क में स्थित है तो उसका आकलित मान

$$\hat{X} = \frac{kT' + rB' - G}{(r-1)(k-1)} \quad \dots (21.17)$$

जब कि T' , r वें उपचार के लिए प्राप्त प्रेक्षणों का योग है और B' , j वें स्तम्भ में विद्यमान प्रेक्षणा का योग है अर्थात् यह उप स्तम्भ का योग है जिसमें कि अप्राप्त मान है और G' , प्रयोग में ज्ञान प्रेक्षणा का योग है जिनकी संख्या $(kr-1)$ है जब कि उपचारों की संख्या k है और r पुनरावृत्तियों की संख्या है। अप्राप्त मान के आकलित मान का प्रयोग करने से उपचार के योग का वास्तविक में कुछ अधिक हो जाता है। अतः इस योग योग में समायोजन करना होता है। यह समायोजन राशि है,

$$G_{\text{adj}} = \frac{(kT' + B' - G')^2}{k(k-1)(r-1)^2} \quad \dots (21.18)$$

$$= \frac{(B' - (k-1)\hat{X})^2}{k(k-1)} \quad \dots (21.18.1)$$

उपचार वर्ग योग में से, राशि C_{TT} को घटाकर शुद्ध उपचार वर्ग योग ज्ञात हो जाता है। इस सशोधन को न करने की स्थिति में कभी-कभी उपचारों में सार्थक अन्तर न होते हुए भी यह अन्तर सार्थक सिद्ध हो जाते हैं। क्योंकि अप्राप्त मान के भाक्तित मान को रखने पर उपचार वर्ग-योग में गुरुकारी अभिनति (upward bias) आ जाती है। अतः इस शुद्धि का अवश्य प्रयोग करना चाहिए।

अप्राप्त मान वाले उपचार के माध्य तथा अन्य किसी उपचार के माध्य में अन्तर को मानक त्रुटि SE' निम्न होती है

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{k}{r(r-1)(k-1)} \right\}} \quad \dots (21.19)$$

टिप्पणी . यदि एक से अधिक मान अप्राप्त हों तो उनका भाक्तितन करके या सहप्रसरण विश्लेषण (अध्याय 22) की सहायता से विश्लेषण किया जा सकता है। इन विधियों का समुचित विवरण जानने के लिए प्रयोगगत अभिकल्पनाओं व उनके विश्लेषण सम्बन्धी पुस्तक का अध्ययन करें। सहप्रसरण की सहायता से विश्लेषण विधि का संक्षिप्त विवरण अध्याय (23) में दिया गया है।

उदाहरण 21.5 . गेहूँ के 8 जीनोटाइप (genotype) में दृश्य-रूपी स्थिरता (phenotypic stability) की परीक्षा करने के हेतु एक प्रयोग किया गया इस प्रयोग का विन्यास माहच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में किया गया जिसमें चार पुनरावृत्तियाँ रखी गईं। किन्तु किसी दुर्घटना से इसमें एक प्रेक्षण मान सुप्त हो गया। प्रयोग में शेष प्राप्त मान निम्न सारणी के अनुसार थे —

प्रभावियाँ	पुनरावृत्तियाँ				योग	माध्य
	R_1	R_2	R_3	R_4		
V_1	63.30	74.20	70.10	56.20	268.80	67.20
V_2	84.30	86.95	77.00	\hat{X}	327.06	81.76
V_3	78.90	81.65	70.60	73.15	304.30	76.08
V_4	72.80	85.50	73.15	82.40	313.85	78.46
V_5	76.25	81.40	88.10	71.00	316.75	79.19
V_6	84.00	76.60	66.55	77.85	305.00	76.35
V_7	69.20	60.50	66.40	56.30	252.40	63.10
V_8	81.20	72.85	81.80	82.20	318.05	79.51
योग	614.95	619.65	593.70	499.10	2327.40	
माध्य	76.87	77.46	74.21	62.39	(577.91)	(2406.21)

\hat{X} -अप्राप्त मान (कोष्ठको में मान, प्राकृतिक मान रखने पर प्राप्त मान है)
(21.17) से अप्राप्त मान का प्राकृतिक मान,

$$\hat{X} = \frac{8 \times 248.25 + 4 \times 499.10 - 2327.40}{(4-1)(8.1)}$$

$$= \frac{1655.00}{21}$$

$$= 78.81$$

\hat{X} के मान को अप्राप्त मान में स्थान पर रखने पर,

$$V_2 \text{ का योग} = 327.06$$

$$\text{सं० वा०} = \frac{(2406.21)^2}{32}$$

$$= 180932.70$$

$$\text{समूहक व० व०} = \frac{1}{8} (614.95^2 + 619.65^2 + 593.70^2 + 577.91^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 181073.65 - 180932.70$$

$$= 140.95$$

$$\text{प्रजाति व० व०} = \frac{1}{8} (268.80^2 + \dots + 318.05^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 182134.78 - 180932.70$$

$$= 1202.08$$

प्रजाति वर्ग योग के लिए सूत्र (21.18.1) की सहायता से संगोचन राशि,

$$C_{11} = \frac{(499.10 - 7 \times 78.81)^2}{8 \times 7} = \frac{(52.57)^2}{56}$$

$$= 49.35$$

$$\text{घट: प्रजातियों का शुद्ध व० व०} = 1202.08 - 49.35$$

$$= 1152.73$$

$$\text{पूर्ण व० व०} = (68.30^2 + 84.30^2 + \dots + 56.30^2 + 82.20^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 183059.68 - 180932.70$$

$$= 2126.98$$

$$\text{शुद्ध व० व०} = 2126.98 - 140.95 - 1152.73$$

$$= 833.30$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण स्तंभ	स्व० वा०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
खण्डक	3	140 95	46 98	1.13
प्रजातियाँ	7	1152 73	164 68	3.95
प्रयोग त्रुटि	20	833 30	41.65	
पूर्णा	30	2126 98		

प्रजातियों के लिए F का परिवर्तित मान, $\alpha = 05$ और (7, 20) स्व० वा० के लिए F के सारणी (परि० घ-5 2) मान द्वारा प्राप्त मान 2.52 से अधिक है। अतः इससे सिद्ध होता है कि प्रजातियों में मार्भक अन्तर है। किन्हीं भी दो प्रजाति माध्यों में अन्तर की त्रुटि,

जिनके लिए अप्राप्त मान नहीं है

$$S_E = \sqrt{\frac{2 \times 41.65}{4}}$$

$$= 4.56$$

प्रजाति V_2 तथा अन्य किसी प्रजाति के माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि सूत्र (21.19) के द्वारा निम्न है —

$$S_{E'} = \sqrt{41.65 \left(\frac{2}{4} + \frac{8}{4 \times 3 \times 7} \right)}$$

$$= \sqrt{41.65 \times 6}$$

$$= \sqrt{249.9}$$

$$= 5.0$$

अतः S_E व $S_{E'}$ का प्रयोग करके युग्म प्रजाति माध्यों में अन्तर की सार्थकता परीक्षा प्राक्तिक अन्तर विधि द्वारा या डकन बहुपराम परीक्षा द्वारा कर सकते हैं। जिन युग्म माध्यों में V_2 की किसी अन्य प्रजाति से परीक्षा करनी हो तो $S_{E'}$ का प्रयोग करना चाहिए अन्यथा S_E का प्रयोग करना चाहिए। यहाँ माध्यों में परीक्षा करके नहीं दिखाई गई है क्योंकि पाठक पहले दी हुई विधि द्वारा परीक्षा स्वयं सुगमता से कर सकते हैं।

लैटिन-वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

यह द्विप्रतिबन्धी अभिकल्पना है पर्याप्त इसमें अनुसंधानकर्ता प्रयोगगत एकको पर दो प्रकार के प्रतिबन्धों को लेकर खण्डक बनाता है। ये खण्डक एक लक्षण के अनुसार परीक्षा की ओर और दूसरे लक्षण के अनुसार स्वयं की ओर सजातीयँ होते हैं। प्रत्येक पंक्ति व

स्तम्भ एक पूर्ण तण्डक (पुनरावृत्ति) होता है। इस प्रयोग अभिकल्पना में प्रत्येक उपचार हर एक पक्ति व हर एक स्तम्भ में एक ही बार आता है अर्थात् प्रत्येक पक्ति व स्तम्भ एक पूर्ण पुनरावृत्ति है। इस प्रकार यही उपचारों पर, स्तम्भ व पक्ति की घोर निये गए लक्षणों के पढ़ने वाले प्रभाव का नियन्त्रण हा जाता है। साथ ही इन लक्षणों में अन्तर के प्रति परिवर्तनाओं की भी परीक्षा कर ली जाती है। सैटिन-वर्ग अभिकल्पना में पक्तियों, स्तम्भों व उपचारों की सख्या सदैव समान होती है। यदि यह सख्या r है तो हम सैटिन-वर्ग का $(r \times r)$ क्रम का कहते हैं। इस अभिकल्पना को कृषि, जैव विज्ञान व औद्योगिक प्रयोगों के लिए प्रायः उपयुक्त समझा जाता है। जैसे —

यदि किसी कृषि म दा दिशाओं में उर्वरता परिवर्तन होनी हा तो इस क्षेत्र को इन दिशाओं के अनुसार ताबिक पक्ति व स्तम्भ तण्डक में विभाजित कर दिया जाता है और फिर प्रत्येक तण्डक को उपचारा की सख्या के समान भूखण्डों में विभाजित कर देते हैं और प्रत्येक भूखण्ड को नियमानुसार एक उपचार निर्दिष्ट कर दिया जाता है।

इसी प्रकार यदि जैव प्रयोग में यदि कुछ भोज्यों (feeds) का गायों के दूध उत्पादन पर प्रभाव देखना है तो इन बातों की ओर ध्यान देना आवश्यक है। गाय की दूध उत्पादन-क्षमता उसकी नस्ल व स्तन्यस्रवण (lactation) पर अधिक निर्भर करती है। अतः भोज्य का प्रभाव जानने के लिए यह आवश्यक है कि इन दो कारकों को नियन्त्रित किया जाये। इसने लिए एक ही नस्ल की गाय एक तण्डक में पक्ति की घोर व एक ही स्तन्यस्रवण की गाय एक तण्डक में स्तम्भ की घोर ले ली जाती है। प्रत्येक तण्डक में पक्ति की घोर अलग-अलग नस्ल की गाय व स्तम्भ की घोर अलग-अलग स्तन्यस्रवण की गाय ली जाती हैं। इस प्रकार यही दूध के उत्पादन सम्बन्धी भोज्यों में अन्तर, नस्लों में अन्तर व स्तन्य-स्रवणों में अन्तर के प्रति परिवर्तनाओं की परीक्षा इस प्रयोग में प्राप्त न्याय के प्रसरण विश्लेषण के द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं। सैटिन-वर्ग विन्यास-रूप निम्न प्रकार के होते हैं.—

(4×4) क्रम के सैटिन-वर्ग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है —

	स्तम्भ			
	B	C	D	A
पक्ति	D	A	B	C
	C	D	A	B
	A	B	C	D

(5×5) क्रम के सैटिन-वर्ग का विन्यास इस प्रकार का होता है :—

	स्तम्भ				
	A	B	C	D	E
	C	D	E	A	B
पक्ति	D	E	A	B	C
	B	C	D	E	A
	E	A	B	C	D

एक प्रेक्षण प्रति प्रयोगगत एकक की स्थिति में $(r \times r)$ क्रम के सेंटिन-वर्गों के लिए एक घात सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है :—

$$X_{ijl} = \mu + T_i + \beta_j + \rho_l + e_{ijl} \quad \dots (21.20)$$

जहाँ $i, j, l = 1, 2, 3, \dots, r$

प्रतिरूप (21.20) में ρ_l , l वीं पक्ति के प्रभाव को निरूपित करता है।

μ , T_i , β_j व e_{ijl} क्रमशः समग्र माध्य, i वें उपचार के प्रभाव, j वें स्तम्भ के प्रभाव व प्रति एकक त्रुटि को निरूपित करते हैं। प्रत्येक e_{ijl} स्वतन्त्र है और $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित है।

स्थिर प्रभाव प्रतिरूप (प्रतिरूप 1) की स्थिति में,

$$\sum_i T_i = \sum_j \beta_j = \sum_l \rho_l = 0, \quad E(T_i) = T_i; \quad E(\beta_j) = \beta_j; \quad E(\rho_l) = \rho_l$$

सेंटिन-वर्ग अभिकल्पना के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी में यादृच्छिकीकृत स्तंभ अभिकल्पना की संश्लेषण एक विचरण स्रोत घोर बढ़ जाता है क्योंकि पूर्ण विधि सगमग नहीं रहती है।

माना कि सेंटिन-वर्गों में प्रेक्षणों के लिए l वीं पक्ति का योग R_j , j वें स्तम्भ का योग C_i , i वें उपचार का योग T_i और कुल प्रेक्षणों का योग G है तो $(r \times r)$ क्रम के सेंटिन-वर्गों के लिए व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी (21.11) है।

$$\text{जबकि: } \sum_l \frac{\rho_l^2}{r-1} = \sigma_\rho^2; \quad \sum_j \frac{\beta_j^2}{r-1} = \sigma_\beta^2; \quad \sum_i \frac{T_i^2}{r-1} = \sigma_T^2$$

अतः पक्ति, स्तम्भ व उपचार के प्रत्याशित मा० ब० य० क्रमशः

$$(\sigma_e^2 + r \sigma_\rho^2), (\sigma_e^2 + r \sigma_\beta^2) \text{ व } (\sigma_e^2 + r \sigma_T^2)$$

के रूप में लिख सकते हैं।

उदाहरण 21.6 : जई (Oats) की चार प्रजातियों की तुलना के हेतु भूमि के क्षेत्र को 16 भूखण्डों में विभाजित करके 4×4 सेंटिन-वर्गों अभिकल्पना का प्रयोग किया गया जिससे मिट्टी की उर्वरता का पता चल सके। भूखण्डों की उपज पाँचों में निम्न पायी गई जबकि प्रकार A, B, C, D प्रजातियों को प्रदर्शित करते हैं। प्रजातियों के प्रभाव में समानता के प्रति परिकल्पना की परीक्षा कीजिए। क्या सेंटिन-वर्गों का प्रयोग करना उपयुक्त है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(सारणी 2I.II) $(r \times r)$ त्रिकोण-रूप के लिए प्रसरण विश्लेषण सारणी

विशेष क्षेत्र	स्व-कोण	ब. ब.	ब. ब. व.	F-मान	प्रयोजित ब. व. व.
वर्षिक	$(r-1)$	$\frac{1}{r} \sum_j R_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = R_{rr}$	$\frac{R_{rr}}{r-1} = R$	$\frac{R}{s_0^2}$	$r_0^2 + \frac{r}{r-1} \sum_j P_j^2$
साम्य	$(r-1)$	$\frac{1}{r} \sum_j C_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = C_{rr}$	$\frac{C_{rr}}{r-1} = C$	$\frac{C}{s_0^2}$	$r_0^2 + \frac{r}{r-1} \sum_j B_j^2$
अपचार	$(r-1)$	$\frac{1}{r} \sum_i T_i^2 - \frac{G^2}{r^2} = S_{rr}$	$\frac{S_{rr}}{(r-1)} = S$	$\frac{S}{s_0^2}$	$r_0^2 + \frac{r}{r-1} \sum_i T_i^2$
प्रयोग त्रुटि	$(r-1)(r-2)$	फलक द्वारा $= E_{rr}$	$\frac{E_{rr}}{(r-1)(r-2)} = s_0^2$		r_0^2
कुल	(r^2-1)	$\sum_{i,j} X_{ij}^2 - \frac{G^2}{r^2}$			

याग

	C	D	B	A	
	47	40	50	57	194
	B	A	C	D	
	49	53	37	29	168
	D	C	A	B	
	28	34	46	37	145
	A	B	D	C	
	44	44	25	30	147
याग	172	171	158	153	654

(आर्० सीए० आर०, 1966)

प्रजातियाँ के प्रभाव में अंतर तथा रटिन वगैरे का उपयुक्तता या परीक्षा के लिए प्रसरण विश्लेषण निम्न प्रकार कर सकते हैं —

$$\text{स० का०} = \frac{(654)^2}{16} = 26732.25$$

$$\text{उपचार याग } A=204, B=180, C=148, D=122$$

$$\begin{aligned} \text{पक्ति व० य०} &= \frac{1}{4} (194^2 + 168^2 + 145^2 + 147^2) - \text{स० का०} \\ &= 27123.50 - 26732.25 \\ &= 391.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्तम्भ व० य०} &= \frac{1}{4} (172^2 + 171^2 + 158^2 + 153^2) - \text{स० का०} \\ &= 26799.50 - 26732.25 \\ &= 67.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उपचार व० य०} &= \frac{1}{4} (204^2 + 180^2 + 148^2 + 122^2) - \text{स० का०} \\ &= 27701.00 - 26732.25 \\ &= 968.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पूण व० य०} &= (47^2 + 49^2 + 37^2 + 30^2) - \text{स० का०} \\ &= 28168.00 - 26732.25 \\ &= 1435.75 \end{aligned}$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण श्रेण	सं. वं०	स. य.	मा. स. य.	F-मान
वृत्ति	3	391.25	130.42	91.84
रतम्भ	3	67.25	22.42	15.78
उपचार	3	968.75	322.92	227.40
श्रुति	6	8.50	1.42	
पूर्णा	15	1435.75		

$\alpha = 01$ और $(3,6)$ स्तं० की० के लिए F का सारणी (परि० प-52) द्वारा प्राप्त मान 9.78 है। वृत्ति रतम्भ व उपचार के लिए परिलिखित F मान सारणीबद्ध मान से अधिक है अतः इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि वृत्तियों में सार्थक अन्तर है और इसी प्रकार रतम्भों में सार्थक अन्तर है। यह सार्थक अन्तर होने का अभिप्राय है कि मिट्टी की उर्वरता में द्विमुनी विचरण था। अतः सेटिन-बगों अभिलक्षणा का प्रयोग करने से उपचारों में अन्तर की परीक्षा में परिशुद्धि की वृद्धि हुई है। उपचारों में भी अत्यधिक सार्थक अन्तर है जिसका अभिप्राय है कि जई की प्रजातियाँ एक-दूसरे में सार्थक रूप में भिन्न हैं। इन प्रजातियों में से कौनसी प्रजातियाँ एक दूसरे में सार्थक रूप में भिन्न हैं इसकी परीक्षा न्यूनतम सार्थक अन्तर की सहायता से निम्न प्रकार कर सकते हैं। प्रजातियों की माध्य उपज $A=51, B=45, C=37, D=30.5$

$$\begin{aligned} \text{न्यून. सा. घ.} &= \sqrt{\frac{2s_0^2}{r}} \pm (05)(6) \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 8.5}{4}} \times 2.447 \\ &= \sqrt{4.25} \times 2.447 \\ &= 2.06 \times 2.447 \\ &= 5.04 \end{aligned}$$

A	B	C	D
51	45	37	30.5

किन्हीं दो प्रजातियों की माध्य उपज में अन्तर न्यून. सा. घ. से अधिक है अतः सब प्रजातियाँ सार्थक रूप में एक-दूसरे में भिन्न हैं।

एक अप्राप्त मान

यदि सेटिन-बगों अभिलक्षणा की स्थिति में प्रयोग करने समय किसी कारण से एक

प्रेक्षण मान लुप्त हो गया हो तो इसका आकलन करना होता है। इस आकलित मान को अप्राप्त प्रेक्षण के स्थान पर प्रतिस्थापित करके सामान्य रूप में प्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है। इस विश्लेषण सारणी में केवल इतना परिवर्तन करना होता है कि पूर्ण स्वतन्त्र कोटि को एक कम कर दिया जाता है जिसके परिणामस्वरूप प्रयोग त्रुटि की भी स्वतन्त्रता कोटि एक कम हो जाती है। अप्राप्त मान का आकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जा सकता है :

$$X = \frac{r(R' + C' + T') - 2G'}{(r-1)(r-2)} \quad \dots (21.21)$$

जबकि सूत्र (21.21) में R' व C' क्रमशः उस पक्ति व स्तम्भ में प्रेक्षणों का योग है जिसमें अप्राप्त मान घटित होता है, T' उस उपचार के लिए प्रेक्षणों का योग है जिसका मान अप्राप्त है। G' कुल विद्यमान प्रेक्षणों का योग है। जैसा कि यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में अप्राप्त मान का आकलित मान प्रतिस्थापित करने के पश्चात् परिकलित उपचार वर्ग योग में सशोधन करना होता है वैसे ही लेटिन-वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में सशोधन राशि निम्न होती है —

$$C_{TT} = \left\{ \frac{(r-1)T' + R' + C' - G'}{(r-1)(r-2)} \right\}^2 \quad \dots (21.22)$$

राशि C_{TT} को परिकलित उपचार वर्ग योग में से घटाकर शुद्ध उपचार वर्ग योग प्राप्त हो जाता है।

अप्राप्त मान वाले उपचार माध्य और अन्य किसी उपचार माध्य में अन्तर की मानक त्रुटि निम्न होती है —

$$SE' = \sqrt{s_e^2 \left\{ \frac{2}{r} + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \right\}} \quad \dots (21.23)$$

उदाहरण 21.7 : एक (4×4) लेटिन वर्ग अभिकल्पना का विन्यास तथा उपचारों के तदनुसार गेहूँ की उपज (क्विंटल प्रति हैक्टर) निम्न प्रकार थी। प्रसार A, B, C, D, उपचारों को, स्तम्भ गेहूँ की किस्मों को और पक्तियाँ खादों को प्रदर्शित करती हैं। प्रति भूखण्ड की उपज लेते समय, एक भूखण्ड की उपज लिखने से रह गई।

	स्तम्भ				योग
	A-42	B-38	C-50	D-46	176
	C-46	D-42	A-42	B-42	172
पक्ति	D-46	C-*	B-42	A-46	134
	B-38	A-54	D-38	C-46	176
योग	172	134	172	180	658

एक अप्राप्त मान का आकलित एवं ग्यास का प्रसरण विक्षेपण निम्न प्रकार कर सकते हैं :-

$$C' = 46 + 50 + 46$$

$$C' = 142$$

सूत्र (21 21) के द्वारा अप्राप्त मान का आकलित मान,

$$\hat{X} = \frac{4(134 + 134 + 142) - 2 \times 658}{(4 - 1)(4 - 2)}$$

$$\hat{X} = \frac{1640 - 1316}{6}$$

$$= \frac{324}{6} = 54$$

इस मान को अप्राप्त मान के स्थान पर रखने पर निम्न प्रेक्षण सारणी प्राप्त होती है -

				योग
A - 42	B-38	C-50	D-46	176
C - 46	D-42	A-42	B-42	172
D - 46	(C - 54)	B-42	A-46	188
B - 38	A-54	D-38	C-46	176
172	188	172	180	712

उपचार वर्ग योग के लिए सशोधन राशि, सूत्र (21 22) के अनुसार निम्न है -

$$C_{TT} = \left\{ \frac{3 \times 142 + 134 + 134 - 658}{3 \times 2} \right\}^2$$

$$= 3600$$

उपचार-योग,

$$A = 184, B = 160, C = 196, D = 172$$

$$\text{सं० का०} = \frac{(712)^2}{16} = 31684.00$$

$$\text{रक्षक सं०} = \frac{1}{3} (172^2 + 188^2 + 172^2 + 180^2) - \text{सं० का०} = 31728.00 - 31684.00 = 44.00$$

$$\begin{aligned} \text{पक्ति व० य०} &= \frac{1}{4}(176^2 + 712^2 + 188^2 + 176^2) - \text{स० का०} \\ &= 31720 \text{ 00} - 31684 \text{ 00} \\ &= 36 \text{ 00} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उपचार व० य०} &= 31864 \text{ 00} - 31684 \text{ 00} \\ &= 180 \text{ 00} \end{aligned}$$

$$\text{मशोघित उपचार व० य०} = 180 \text{ 00} - 36 \text{ 00} = 144 \text{ 00}$$

$$\begin{aligned} \text{पूर्ण व० य०} &= (42^2 + 46^2 + \dots + 46^2 + 46^2) - \text{स० का०} \\ &= 32064 \text{ 00} - 31684 \text{ 00} \\ &= 380 \text{ 00} \end{aligned}$$

अतः प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न है :—

विचरण स्रोत	स्व० को०	व० य०	मा० व० य०	F-मान
पक्ति	3	36 00	12 00	
स्तम्भ	3	44 00	14 67	
उपचार	3	180 00	60 00	2.50
		(144 00)	(48 00)	(2 00)
त्रुटि	5	120 00	24 00	
पूर्ण	14	380 00		

टिप्पणी उपर्युक्त सारणी में मशोघित उपचार व० य०, मा० व० य० व F-मान कोष्ठकों में दिखाये गये हैं। $\alpha = 0.5$ तथा (3,5) स्व० को० के लिए F का मारणीबद्ध मान 5.41 पक्ति, स्तम्भ तथा उपचार तीनों के लिए परिकल्पित F-मान, मारणीबद्ध F-मान से कम है अतः इसने यह निष्कर्ष निकलता है कि विभिन्न उपचारों के प्रति समानता की परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है।

उपचार माध्यों में अन्तर निरर्थक होने के कारण इनके युग्म माध्यों में अन्तर की सार्थकता की परीक्षा करने की आवश्यकता नहीं है।

ग्रीसीय-लैटिन वर्ग अभिकल्पना की स्थिति में प्रसरण-विश्लेषण

यह लैटिन-वर्ग अभिकल्पना का उन्नत रूप है जिसमें कि प्रयोगगत एककों में विद्यमान एक और विचरण स्रोत को नियन्त्रित करते हैं क्योंकि प्रारम्भ में इस अभिकल्पना की रचना ग्रीक व लैटिन अक्षरों को प्रयोग करने की गई थी। इसी कारण इनका नाम ग्रीकीय-लैटिन-वर्ग अभिकल्पना पड़ा। इस अभिकल्पना के विभाग को विशेषता यह है कि प्रत्येक ग्रीक व लैटिन अक्षर प्रत्येक पक्ति व प्रत्येक स्तम्भ में केवल एक बार आता है और इनके अतिरिक्त प्रत्येक लैटिन अक्षर, ग्रीक अक्षर के साथ एक बार ही आता है। इन प्रकार

प्रसरण विश्लेषण सारणी में पक्ति, स्तम्भ व सेंटिन घटकों (उपचारों) के प्रतिरिक्त शीर्ष घटकों, जो कि एक कार्य को निरूपित करते हैं, के कारण विपरण घोर बड़ जाता है। प्रसरण विश्लेषण सामान्य रूप में ही होता है। इस प्रकार की अभिकल्पना का प्रारूप निम्न प्रकार का होता है।

(5 × 5)		कम का शीर्षीय सेंटिन-बर्ग		
A_α	B_β	C_γ	D_δ	E_θ
C_θ	D_α	E_β	A_γ	B_δ
D_β	E_γ	A_δ	B_θ	C_α
E_δ	A_θ	B_α	C_β	D_γ
B_γ	C_δ	D_θ	E_α	A_β

टिप्पणी (1) अन्य किसी भी कम का शीर्षीय-सेंटिन वर्गों की रचना इसी प्रकार की होती है।

(2) (5 × 5) कम का केवल एक ही शीर्षीय वर्ग सम्भव नहीं है। तथापि अन्य वर्गों की रचना परस्पर गार्थिक सेंटिन वर्गों (Mutually Orthogonal Latin Square) की महत्ता से की जा सकती है। इसका वर्णन जानने के लिए पुस्तक 'The Design and Analysis of Experiments' by Kempthorne O को पढ़ें।

(3) इस अभिकल्पना में सेंटिन घटक या शीर्ष घटक में से किसी को भी उपचार मान सकते हैं।

जब कि $L_{m, m}$ वें शीर्ष घटक के लिए प्राप्त प्रेशनों का योग है। अन्य सभी संकेत सेंटिन वर्ग अभिकल्पना के समुह है। $\sigma_p^2, \sigma_B^2, \sigma_L^2, \sigma_T^2$ क्रमशः पक्ति, स्तम्भ शीर्ष घटक व उपचारों के लिए प्राप्त माध्य वर्ग योग है। शीर्षीय-सेंटिन वर्गों के प्रसरण-विश्लेषण में यह बात ध्यान देने के योग्य है कि प्रयोग बूटि की स्थापना-समस्या $(t - 1)$ $(t - 3)$ के समान है। जब (5 × 5) न कम कम के वर्गों की स्थिति में बूटि की स्थापना समस्या समाप्त रहती है।

बहु-उपादानोम प्रयोगों का प्रसरण विश्लेषण

यदि एक प्रयोग के माइक्रोजन व फासफोरस भागों की विभिन्न मात्राओं का एक ही एक समुह प्रभाव न के उतर पर देगता ही तो बहु-उपादानोम प्रयोग सम्भव उपजुत है। इसी प्रकार किसी अन्य प्रयोग में दो या दो से अधिक कारकों के प्रभाव तथा एक की

सारणी 21.12 $(r \times r)$ ताल के प्रौद्योगिक-वर्द्धित वर्गों की स्थिति में प्रत्यक्ष विभक्तियुक्त सारणी

विवरण श्रेणी	सं० को०	स० य०	मा० य० य०	F-मान	प्रस्तावित मा० य० य०
वर्द्धित	$(r-1)$	$\sum_j R_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = R_{rr}$	$R \frac{r}{r-1} = R$	R/E	$\sigma_r^2 + r\sigma_\rho^2$
साम्य	$(r-1)$	$\sum_j C_j^2 - \frac{G^2}{r^2} = C_{rr}$	$C \frac{r}{r-1} = C$	C/E	$\sigma_c^2 + r\sigma_\beta^2$
प्रौद्योगिक-वर्द्धित	$(r-1)$	$\sum_m L_m^2 - \frac{G^2}{r^2} = L_{rr}$	$L \frac{r}{r-1} = L$	L/E	$\sigma_l^2 + r\sigma_L^2$
वर्द्धित-वर्द्धित	$(r-1)$	$\sum_i T_i^2 - \frac{G^2}{r^2} = T_{rr}$	$T \frac{r}{r-1} = T$	T/E	$\sigma_t^2 + r\sigma_T^2$
प्रयोग श्रुति	$(r-1)(r-3)$	अंतर प्रत्यक्ष $= E_{rr}$	$E \frac{r}{(r-1)(r-3)} = E$		σ_e^2
पूर्व	$r^2 - 1$	$\sum_{i,j,l,m} X_{ijlm}^2 - \frac{G^2}{r^2}$			

उपस्थिति में अन्य के प्रभाव में परिवर्तन जानने के लिए बहु-उपादानीय प्रयोग प्रत्यक्ष उपयोगी हैं।

एक उपचारों का समूह जो दो या दो में अधिक स्तरों (levels) के मध्यों (combinations) को निरूपित करता है उसे बहु-उपादानीय विन्यास (factorial arrangement) कहते हैं। इन मध्यों को उपचारों के रूप में उपयोग किया जाता है। इन विन्यासों में अभिव्यक्ति जैव माहौलिकीय पूर्ण संवर्धन अभिव्यक्ति, लैटिन वर्ग अभिव्यक्ति या अन्य किसी अभिव्यक्ति में उपचारों के स्थान पर प्रयोग किया जाता है।

बहु-उपादानीय प्रयोग प्रत्यक्ष उपयोगी हैं क्योंकि इसमें इनकार (factors) के प्रभाव एक साथ ही जात किये जा सकते हैं। बहु-उपादानीय प्रयोगों में उपचारों तथा प्रयोग परिस्थितियों के साथ सम्भव मध्यों को प्रयोग करने, उपचारों के मुख्य प्रभावों (main effects) एक-एक-दूसरे से परस्पर-क्रिया प्रभावों (interaction effects) का प्राप्ति एक साथ ही किया जा सकता है।

इन प्रयोगों में मुख्य प्रभाव (main effect) में अभिव्यक्ति किसी उपचार के एक स्तर पर इसके अन्य स्तर या स्तरों की अपेक्षा माध्य प्रभाव के समान होता है जबकि अन्य कारकों या उपचारों का स्तर स्थिर हो।

किन्हीं दो कारकों (उपचारों) में परस्पर-क्रिया (interaction) किसी एक कारक के विभिन्न स्तरों द्वारा किसी अन्य कारक के विभिन्न स्तरों की उपस्थिति में एक-सा प्रभाव प्रदर्शित करने की सम्भ्यता का प्रतीक है अर्थात् किसी एक कारक के विभिन्न स्तरों का प्रभाव (प्रभावी क्षमता) किसी अन्य कारक के विभिन्न स्तरों के कारण परिवर्तित हो जाता है। यह कारकों में इन परिवर्तनों प्रभाव को परस्पर-क्रिया कहते हैं।

उपादानीय प्रयोग धारणियों के हेतु प्राथमिक उपयोगी सिद्ध हुए हैं क्योंकि इन प्रयोगों की सहायता में यह पता लगाया जाता है कि किन उपचारों के मुख्य प्रभाव मापक हैं और किन उपचारों में परस्पर-क्रिया है या नहीं है। यदि उपचारों में परस्पर-क्रिया है तो यह कारकों का बौद्धिक मध्य है कि जिसके द्वारा सर्वोत्तम परिणाम प्राप्त होते हैं। जैसे खाद सम्बन्धी प्रयोगों में यह ज्ञात करना हो कि नाइट्रोजन (N), फास्फोरस (P) व पोटैश (K) की किन्हीं-किन्हीं मात्रा क्षेत्र में लगाई जाये कि सबसे अधिक उपज हो। यह सर्वोत्तम मध्य उन्हीं स्तरों के पराम में होता है जिसमें उपचारों या कारकों की परीक्षा की गई है।

यसु सम्बन्धी प्रयोगों में उन कारकों का ज्ञान की विधि जिन या मध्य प्रादि में परस्पर-क्रिया हो जाना जा सकता है। इसी प्रकार माध्य प्रयोगों में प्रोटीन व कार्बोहाइड्रेट (Proteins and Carbohydrates) के स्तरों में परस्पर-क्रिया व विशिष्ट सम्बन्धी प्रयोगों में प्रयोग विधियों व विचारधरियों की प्राप्ति में परस्पर-क्रिया प्रादि के विषय में जानकारी प्राप्त करने में बहु-उपादानीय प्रयोग सहायक हैं।

किसी प्रयोग में यदि n कारक (उपचार) होंगे तब n स्तरों के प्रयोगों के p स्तर, t स्तरों p^n बहु-उपादानीय प्रयोग कहते हैं। यदि प्रयोग कारक के स्तर समान

p, q, r, \dots हो तो इसे $p \times q \times r \times \dots$ बहु-उपादानीय प्रयोग कहते हैं। इन प्रयोगों का प्रमरण विश्लेषण देने से पूर्व अवन-यद्धति (notations) तथा मुख्य प्रभाव व परस्पर-क्रिया प्रभाव वंपम्य (contrast) के रूप में प्रदर्शित करने के विषय में बताना आवश्यक प्रतीत होता है।

किमी कारक के प्रभाव बड़े अक्षरों A, B, C, \dots द्वारा और कारको को छोटे अक्षरों a, b, c, \dots आदि में क्रमशः निरूपित करते हैं। इन अक्षरों के अनुलग्न कारकों के स्तर को प्रदर्शित करते हैं जैसे A_p, B_p, C_k, \dots या a_p, b_p, c_k, \dots आदि। इन बड़े अक्षरों का गुणन AB या ABC दो कारको या तीन कारको की परस्पर-क्रिया को निरूपित करता है। इन्हें क्रमशः प्रथम व द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया कहते हैं। सचय a, b, c, \dots a के i वें, b के j वें तथा c के k वें स्तर के सचय को निरूपित करता है। इस सचय को सुगमता की दृष्टि से ijk के द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं। इस स्थिति में यह स्वयं मान लिया जाता है कि सचय-अनुलग्न क्रमशः a, b व c से सलग्न है।

किसी प्रयोग में मुख्य प्रभाव व परस्परक्रिया प्रभाव ज्ञात करने तथा उनकी सार्थकता-परीक्षा करने के हेतु वंपम्य (contrasts) अत्यन्त उपयोगी हैं। अतः इनका जानना हितकर है। यदि किसी प्रयोग में k उपचार लिये गये हैं और प्रत्येक उपचार की समान पुनरावृत्ति मध्या 'r' है तो कोई भी रैखिक फलन,

$$Z_p = l_{p1} T_1 + l_{p2} T_2 + \dots + l_{pk} T_k \quad \dots (21.24)$$

एक वंपम्य कहलाता है यदि,

$$l_{p1} + l_{p2} + \dots + l_{pk} = 0$$

अर्थात्,

$$\sum_{i=1}^k l_{pi} = 0$$

हो। वंपम्य Z_p के कारण वर्ग योग, जो कि उपचार वर्ग योग का एक अंशक है, निम्न होता है:—

$$\frac{Z_p^2}{r(l_{p1}^2 + l_{p2}^2 + \dots + l_{pk}^2)} \quad \dots (21.25)$$

प्रत्येक वंपम्य की स्व. को. 1 होती है।

माना कि Z_q कोई अन्य वंपम्य है तो,

$$Z_q = l_{q1} T_1 + l_{q2} T_2 + \dots + l_{qk} T_k$$

जबकि $\sum_{i=1}^k l_{qi} = 0$

Z_p व Z_q लम्बकोणीय कहलाने है यदि,

$$l_{p1} l_{q1} + l_{p2} l_{q2} + \dots + l_{pk} l_{qk} = 0 \quad (21.26)$$

$$\text{अर्थात् } \sum_{i=1}^k l_{pi} l_{qi} = 0$$

इन सम्बन्धीय वैषम्यों की अधिकतम संख्या $(k - 1)$ हो सकती है।

जैसे यदि T_1, T_2, T_3 तीन उपचार हैं और प्रत्येक की 3 पुनरावृत्ति संख्या है। माना कि इनके द्वारा कुल प्रेषण मान, $T_1 = 40$, $T_2 = 15$ व $T_3 = 20$ है तो दो सम्बन्धीय वैषम्य निम्न हो सकते हैं -

$$Z_1 = T_1 - 2 T_2 + T_3, \quad \text{यहाँ } Z_1 = 40 - 2 \times 15 + 20$$

$$Z_2 = T_1 - T_3, \quad \text{और } Z_2 = 40 - 20$$

और इनके द्वारा सघटक वर्ग योग है,

$$S^2_1 = \frac{(40 - 2 \times 15 + 20)^2}{3(1 + 4 + 1)} = \frac{30 \times 30}{3 \times 6} \\ = 50.00$$

$$S^2_2 = \frac{(40 - 20)^2}{3(1 + 1)} = \frac{20 \times 20}{6} = 66.67$$

दसों प्रकार यदि प्रत्येक उपचार की पुनरावृत्ति-संख्या समान न होकर, भिन्न हों तो, वैषम्य को निम्न प्रकार दिया जा सकता है। इस स्थिति में k उपचारों का रैखिक फलन, जबकि उपचार T_i की पुनरावृत्ति संख्या r_i ($i = 1, 2, 3, \dots, r$) है

$$Z_p = l_{p1} T_1 + l_{p2} T_2 + \dots + l_{pk} T_k \quad \dots (21.27)$$

वैषम्य कहलाता है यदि,

$$r_1 l_{p1} + r_2 l_{p2} + \dots + r_k l_{pk} = 0$$

$$\text{या } \sum_i r_i l_{pi} = 0$$

और इस वैषम्य के कारण सघटक वर्ग योग,

$$= \frac{Z_p^2}{(r_1 l_{p1}^2 + r_2 l_{p2}^2 + \dots + r_k l_{pk}^2)} \quad \dots (21.28)$$

माना Z_q कोई अन्य वैषम्य है जहाँ

$$Z_q = l_{q1} T_1 + l_{q2} T_2 + \dots + l_{qk} T_k \quad \dots (21.29)$$

Z_p और Z_q सम्बन्धीय कहलाते हैं यदि

$$r_1 l_{p1} l_{q1} + r_2 l_{p2} l_{q2} + \dots + r_k l_{pk} l_{qk} = 0 \quad \dots (21.30)$$

वैषम्य के विषय में उपर्युक्त जानकारी की सहायता में मुख्य प्रभावों तथा परस्पर-क्रियाओं को वैषम्यों के रूप में निम्न प्रकार दे सकते हैं :—

माना एक 2^2 प्रयोग को किया गया है जिसका अभिप्राय है कि प्रयोग में दो कारक (A और B) हैं और दोनों कारकों के दो स्तर हैं जो कि माना 0,1 हैं। इस प्रकार कारकों के चार सचय a_1b_1, a_1b_0, a_0b_1 व a_0b_0 सम्भव हैं। मुख्य प्रभाव A और B तथा परस्परक्रिया AB को निम्न रूप में दिया जा सकता है —

$$\begin{aligned} A &= (a-1)(b+1) = (a_1-a_0)(b_1+b_0) \\ &= ab-b+a-1 \equiv a_1b_1-a_0b_1+a_1b_0-a_0b_0 \\ &= b(a-1) + 1(a-1) = (a_1-a_0)b_1 + (a_1-a_0)b_0 \end{aligned}$$

$$\text{पर्याप्त } ab = a_1b_1, b = a_0b_1, a = a_1b_0, 1 = a_0b_0$$

वैषम्य A को देखने में पता चलता है कि यह a के 1 स्तर का, a के 0 स्तर की अपेक्षा प्रभाव बनाना है जबकि b का स्तर a के दोनों स्तरों के लिए समान रहता है।

$$\text{उपचार A का माध्य प्रभाव} = \frac{1}{2r} (a_1b_1 - a_0b_1 + a_1b_0 - a_0b_0)$$

जब कि r पुनरावृत्ति-संख्या है।

$$\begin{aligned} \text{इसी प्रकार } B &= (a+1)(b-1) = (a_1+a_0)(b_1-b_0) \\ &= ab-a+b-1 = (a_1b_1 - a_1b_0 + a_0b_1 - a_0b_0) \\ &= (b-1)a + (b-1)1 = (b_1-b_0)a_1 + (b_1-b_0)a_0 \end{aligned}$$

पहले की भाँति B का माध्य प्रभाव वैषम्य के मान का $2r$ में भाग देने पर प्राप्त हो जाता है।

परस्परक्रिया AB के लिए वैषम्य निम्न होता है —

$$\begin{aligned} AB &= (a-1)(b-1) = (a_1-a_0)(b_1-b_0) \\ &= ab-a-b+1 = a_1b_1 - a_1b_0 - a_0b_1 + a_0b_0 \\ &= (b-1)a - 1(b-1) = (b_1-b_0)a_1 - (b_1-b_0)a_0 \end{aligned}$$

AB का माध्य प्रभाव, वैषम्य के मान को $2r$ में भाग देने पर प्राप्त हो जाता है।

(2) इसी प्रकार 2^n प्रयोग के किसी भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया प्रभाव ज्ञान करने के लिए वैषम्य बना सकते हैं। वैषम्य का मान सचयों के प्रेषित मान वैषम्य में रखकर ज्ञान करते हैं जिसे कि $2^{n-1}r$ में भाग देने पर माध्य मान ज्ञात हो जाता है। किसी भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया प्रभाव के कारण वर्ग योग वैषम्य मान के वर्ग को $2^n r$ में भाग देने पर ज्ञान हो जाता है। इन माध्य प्रभावों तथा वर्ग योगों को बिना वैषम्य के भी ज्ञात कर सकते हैं जिनका वर्णन बाद में दिया गया है।

सांख्यिकीय प्रतिरूप

यदि प्रयोग में दो कारक A व B लिए गये हैं, जिसमें A के p स्तर हैं और B के q

स्तर हैं और प्रयोग का वि-यास माहच्छिदीकृत पूर्ण सखक अभिकल्पना में किया गया है जिसमें पुनरावृत्ति संख्या r है तो सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \rho_k + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \quad \dots (21.31)$$

$i=0,1,2,\dots,(p-1)$
 $j=0,1,2,\dots,(q-1)$
 $k=1,2,\dots,r$

जबकि प्रतिरूप (21.31) में μ वास्तविक माध्य प्रभाव है। α, β वास्तविक मुख्य प्रभाव हैं और $(\alpha\beta)$ वास्तविक परस्परक्रिया है। ρ_k k वीं पुनरावृत्ति का वास्तविक प्रभाव है। सब e_{ijk} एक-दूसरे से स्वतन्त्र हैं और $e_{ijk} \sim N(0, \sigma_e^2)$

इसी प्रकार यदि तीन कारक हैं जिनके क्रम p, q व m हैं। माना संघट्टों को माहच्छिदीकृत पूर्ण सखक अभिकल्पना में रखा गया है और इसमें r सखक हैं तो सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न होता है —

$$X_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_l + \rho_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{il} + (\beta\gamma)_{jl} + (\alpha\beta\gamma)_{ijl} + e_{ijkl} \quad \dots (21.32)$$

$i=0,1,2,3,\dots,(p-1)$
 $j=0,1,2,\dots,(q-1)$
 $l=0,1,2,\dots,(m-1)$
 $k=1,2,3,\dots,r$

जबकि μ वास्तविक माध्य प्रभाव है। α, β, γ तीन कारकों A, B, C के क्रमशः वास्तविक मुख्य प्रभाव हैं और $(\alpha\beta), (\alpha\gamma)$ व $(\beta\gamma)$ प्रथम क्रम की और $(\alpha\beta\gamma)$ द्वितीय क्रम की परस्परक्रियाओं के वास्तविक प्रभाव हैं।

e_{ijkl} प्रयोग त्रुटि है जो कि एक-दूसरे से स्वतन्त्र है व $N(0, \sigma_e^2)$ बंटित है। इन प्रतिरूपों के लिए न्यूनतम वर्ग-विधि का प्रयोग करके, प्राप्ति के पारस्पर तथा वर्ग योग ज्ञात कर सकते हैं। प्रसरण विश्लेषण सारणी निम्न रूप में दी जा सकती है। प्रसरण विश्लेषण की सहायता से यहाँ परिकल्पनाओं की परीक्षा करते हैं कि

(i) A या B या C के मुख्य प्रभाव सार्थक हैं या नहीं।

(ii) परस्पर, बिना AB, AC, BC सार्थक है या नहीं अर्थात् प्रथम क्रम की परस्पर-क्रियाओं की सार्थकता-परीक्षा की जाती है।

(iii) परस्परक्रिया ABC सार्थक है या नहीं अर्थात् द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया की सार्थकता की परीक्षा की जाती है।

प्रतिरूप (21.31) के लिए मुख्य प्रभाव A व B के वर्ग योग व परस्परक्रिया AB के कारण वर्ग योग निम्न सूत्रों की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। यह सूत्र न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं —

दो तारखों के लिए व्यापक प्रसारण-सारणी जबकि प्रयोग विद्यमान माट्रिक्स-प्रकार पूर्ण पण्डक प्रतिफलता से है ।
सारणी (21.13) (प्रतिष्ठान I)

विशेष धारा	र-को	क-को	सा-स-स-स	I-मान	प्रयोग मा-स-स-स
प्रसारण	(r-1)	R_{XX}	$R_{XX}/r-1 = R'$	$R' / s_{r,2} = F_R$	$\sigma_s^2 + \frac{pq}{r-1} \sum_k \rho_k^2$
व्यवहार	(pq-1)	T_{XX}	$T_{XX}/(pq-1) = T'$	$T' / s_{p,2} = F_T$	
A	(p-1)	A_{XX}	$A_{XX}/p-1 = A'$	$A' / s_{p,2} = \Gamma_A$	$\sigma_s^2 + \frac{rq}{p-1} \sum_i \alpha_i^2$
B	(q-1)	B_{XX}	$B_{XX}/q-1 = B'$	$B' / s_{q,2} = \Gamma_B$	$\sigma_s^2 + \frac{rp}{q-1} \sum_j \beta_j^2$
A x B	(p-1)(q-1)	$(AB)_{XX}$	$\frac{(AB)_{XX}}{(p-1)(q-1)} = (AB)'$	$(AB)' / s_{p,2} = F_{AB}$	$\sigma_s^2 + \frac{r}{(p-1)(q-1)} \sum_i \sum_j (\alpha\beta)_{ij}^2$
प्रयोग त्रुटि	(r-1)(pq-1)	E_{XX}	$\frac{E_{XX}}{(r-1)(pq-1)} = s_{s,2}$		σ_s^2
कुल	rpq-1	S_{XX}			

नीचे आरेखों के लिए व्यापक प्रसरण-विरलेपण मापनों अब तक कि मान यादृच्छिकीकृत रूप खण्डक प्रतिकल्पना में है।
 मापनों (21.14) (संक्षिप्त 1)

विरलेपण नाम	संख्या	मापक	F-मान
प्रसरण	(r-1)	$R_{XX} = R'$	$K' / s_p^2 = F_R$
उपचार B	(pqm-1) (q-1)	$T_{XX} = T'$ $B_{XX} = B'$	$T' / s_p^2 = F_T$ $B' / s_p^2 = F_B$
A X B	(p-1)(q-1)	$(AB)_{XX} = (AB)'$	$\frac{(AB)'}{s_p^2} = F_{AB}$
C	(m-1)	$C_{XX} = C'$	$\frac{C'}{s_p^2} = F_C$
A X C	(p-1)(m-1)	$(AC)_{XX} = (AC)'$	$\frac{(AC)'}{s_p^2} = F_{AC}$
B X C	(q-1)(m-1)	$(BC)_{XX} = (BC)'$	$\frac{(BC)'}{s_p^2} = F_{BC}$
A X B X C	(p-1)(q-1)(m-1)	$(ABC)_{XX} = (ABC)'$	$\frac{(ABC)'}{s_p^2} = F_{ABC}$
प्रयोग त्रुटि	(r-1)(pqm-1)	$E_{XX} = s_p^2$	
कुल	(rpqm-1)		

$$व०य० (A) = \left(\frac{1}{qr} \sum_j X_{.j}^2 - \frac{X^2 \dots}{pqr} \right)$$

$$व०य० (B) = \left(\frac{1}{pr} \sum_1 X_{i.}^2 - \frac{X^2 \dots}{pqr} \right)$$

$$व०य० (AB) = \left(\frac{1}{r} \sum_1 \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X^2 \dots}{pqr} \right) - व०य० A - व०य० B$$

प्रतिरूप (21.32) के लिए मुख्य प्रभाव व प्रथम क्रम की परस्परक्रियाओं के लिए वर्ग योग ऊपर की भांति सूत्रों से प्राप्त कर सकते हैं। इन सूत्रों में आवश्यकानुसार अनुक्रमों तथा भाजक (Divisor) में अन्तर करना होता है। तीन बारकों की परस्परक्रिया के लिए व० य० निम्न सूत्र की सहायता से प्राप्त कर सकते हैं —

$$व०य० ABC = \left(\frac{1}{r} \sum_1 \sum_j \sum_l X_{ijl}^2 - \frac{X^2 \dots}{pqm} \right) - \{ व०य० A \\ + व०य० B + व०य० C + व०य० (AB) \\ + व०य० (AC) + व०य० (BC) \}$$

उपर्युक्त सूत्रों की सहायता से वर्ग योग निकाल कर व्यापक अंतरण सारणी तैयार कर ली जाती है और विभिन्न निराकरण योग्य परिकल्पनाओं के विषय में नियमानुसार निर्णय कर लिया जाता है। मुख्य प्रभाव व परस्परक्रियाओं के वर्ग योग द्विक व त्रिकुली सारणी बनाकर इन सूत्रों का प्रयोग करने सीधे परिकल्पित कर लिए जाते हैं जैसा कि माधिन (solved) उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा।

टिप्पणी (1) उपर्युक्त सारणियों में यह बात ध्यान देना योग्य है कि मुख्य प्रभावों व परस्पर-क्रियाओं की स्वातन्त्र्य मर्यादा का योग व वर्ग योगों का योग क्रमशः उपचारों की स्व० व० व व० य० के समान होता है।

(2) यदि आवश्यकता हो तो प्रतिरूप II के लिए भी नियमानुसार मा० व० य० दिये जा सकते हैं।

(3) 2^० उपादानिय प्रयोगों की स्थिति में p, q, m आदि के मान 2 के समान होते हैं।

(4) सारणी (21.14) में प्रत्याशित मा० व० य० नहीं दिये गये हैं। यदि आवश्यकता हो तो सारणी (21.13) के समरूप सूत्र पाठक स्वयं लिख सकते हैं।

उदाहरण 21.8. मक्का की उब्ज पर खरपतवार का प्रभाव तथा इतको दूर करने के लिए एक घासपातनाशी (Herbicide) का प्रभाव जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग में खरपतवार (W) की चार जातियाँ, प्रत्येक के लिए बीज बोने की पाँच मात्राओं (S) का प्रयोग किया गया और घासपातनाशी (H) के दो स्तर लिये गये। इस प्रयोग का दार्ष्टिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिव्यक्ति में व्यवस्थित किया गया जिनमें कि चार पुनरा-

वृत्तियों को लिया गया। माना कि चरपतवार की जातियाँ W_1, W_2, W_3, W_4 हैं और बीज बोन की मात्राएँ S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 हैं तथा दो स्तरो पर घासपातनामी H_0 व H_1 द्वारा निरूपित किया गया है तो इनके 40 सच्यों के अनुसार चार घुनरावृत्तियाँ में प्रयोग द्वारा प्राप्त मक्का की उपज नीचे सारणी में दी गई है।

मक्का की उपज (क्विटल प्रति हेक्टर)

क्रम	उपचार सच्य	R_1	R_2	R_3	R_4	योग	माध्य
1	$S_1 W_1 H_0$	33.0	11.4	22.6	15.8	82.8	20.70
2	$S_1 W_1 H_1$	33.8	22.6	13.4	18.3	88.1	22.02
3	$S_1 W_2 H_0$	8.5	12.0	7.4	10.8	38.7	9.67
4	$S_1 W_2 H_1$	21.0	11.2	7.0	9.8	49.0	12.25
5	$S_1 W_3 H_0$	36.4	11.6	14.7	9.8	72.5	18.12
6	$S_1 W_3 H_1$	28.8	38.0	18.0	8.8	93.6	23.40
7	$S_1 W_4 H_0$	6.0	24.6	5.8	5.6	42.0	10.50
8	$S_1 W_4 H_1$	13.5	13.4	31.9	9.0	67.8	16.95
9	$S_2 W_1 H_0$	16.5	32.4	33.0	28.4	110.3	27.57
10	$S_2 W_1 H_1$	33.4	30.4	13.6	39.0	116.4	29.10
11	$S_2 W_2 H_0$	25.0	35.8	30.8	8.0	99.6	24.90
12	$S_2 W_2 H_1$	13.4	20.8	11.8	20.4	66.4	16.60
13	$S_2 W_3 H_0$	18.8	18.0	17.0	12.0	65.8	16.45
14	$S_2 W_3 H_1$	32.8	25.0	15.0	15.7	88.5	22.12
15	$S_2 W_4 H_0$	26.7	30.6	13.8	24.5	95.6	23.90
16	$S_2 W_4 H_1$	12.0	23.4	33.4	16.4	85.2	21.30
17	$S_3 W_1 H_0$	12.8	18.0	18.8	18.2	67.8	16.95
18	$S_3 W_1 H_1$	25.9	31.0	32.4	24.5	113.8	28.45
19	$S_3 W_2 H_0$	17.6	23.2	20.6	13.5	74.9	18.72
20	$S_3 W_2 H_1$	15.4	28.4	11.0	18.4	73.2	18.30
21	$S_3 W_3 H_0$	21.2	14.4	30.2	20.8	86.6	21.65
22	$S_3 W_3 H_1$	20.0	20.8	15.6	14.0	70.4	17.60
23	$S_3 W_4 H_0$	24.6	31.6	8.0	15.0	79.2	19.80

24.	$S_3 W_4 H_1$	14.6	26.2	28.6	32.2	101.6	25.40
25.	$S_4 W_1 H_0$	28.7	30.0	26.0	7.4	92.1	23.02
26.	$S_4 W_1 H_1$	24.0	28.2	14.6	18.4	85.2	21.30
27.	$S_3 W_2 H_0$	23.6	37.5	16.0	18.0	95.1	23.77
28.	$S_4 W_2 H_1$	34.8	22.2	26.8	20.8	104.6	26.15
29.	$S_4 W_2 H_0$	32.6	26.2	24.7	11.1	74.6	23.65
30.	$S_4 W_3 H_1$	22.8	34.0	20.2	13.7	90.7	22.67
31.	$S_4 W_4 H_0$	20.2	20.4	6.8	12.0	59.4	14.85
32.	$S_4 W_4 H_1$	23.8	41.7	24.6	10.6	100.7	25.17
33.	$S_5 W_1 H_0$	31.2	33.8	26.6	28.0	11.96	29.90
34.	$S_5 W_1 H_1$	29.5	16.4	30.4	17.4	93.7	23.42
35.	$S_5 W_2 H_0$	38.4	14.6	15.6	14.4	83.0	20.75
36.	$S_5 W_2 H_1$	20.6	20.4	10.6	13.0	64.6	16.15
37.	$S_5 W_3 H_0$	21.0	31.6	13.0	14.0	79.6	19.90
38.	$S_5 W_3 H_1$	15.0	20.2	14.2	20.0	69.4	17.35
39.	$S_5 W_4 H_0$	22.0	22.8	12.4	23.8	81.0	20.25
40.	$S_5 W_4 H_1$	37.4	24.0	31.4	21.4	114.2	28.55

योग

937.3 978.8 768.3 672.9 3359.3

उपरोक्त बहु-उपादानीय प्रयोग के न्यास का प्रसरण विश्लेषण तथा प्राप्त परिणामों का निर्वचन निम्न प्रकार कर सकते हैं.—

सबसे पहले दो हुई विधि के अनुसार निम्न मापदंडों का परिवर्तन किया।

$$1. \text{ स० का०} = \frac{(3357.2)^2}{160} = 70442.44$$

$$2. \text{ पूर्ण व०य०} = (33.0^2 + 33.8^2 + \dots + 23.8^2 + 21.4^2) - \text{स० का०}$$

$$= 82023.59 - 70442.44$$

$$= 11581.15$$

$$3. \text{ पुनरावृत्ति व०य०} = \frac{1}{40} (937.3^2 + 978.8^2 + 968.3^2 + 672.9^2) - \text{स० का०}$$

$$= 71991.50 - 70442.44$$

$$= 1549.06$$

$$4 \text{ उपचार द० द०} = \frac{1}{4} (82 \cdot 8^2 + 88 \cdot 1^2 + \dots + 81 \cdot 0^2 + 114 \cdot 2^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 74134 \cdot 34 - 70442 \cdot 44$$

$$= 3691 \cdot 90$$

$$5 \text{ घुटि द० द०} = 11581 - 1549 \cdot 06 - 3691 \cdot 90$$

$$= 6340 \cdot 19$$

अब उपचार वर्ग योग के सघटकों के वर्ग योग अर्थात् मुख्य प्रभाओं एवं परस्परत्रियाओं के लिए वर्ग योग निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं —

पहले निम्न सारणी की रचना की—

(S × W) सारणी

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	योग	माध्य
W ₁	170.9	226.7	181.6	177.3	213.3	969.8	24.24
W ₂	87.7	166.0	148.1	199.7	147.6	749.1	18.72
W ₃	166.1	154.3	157.0	185.3	149.0	811.7	20.30
W ₄	109.8	180.8	180.8	160.1	195.2	826.7	20.60
योग	534.5	727.8	667.5	722.4	705.1	3357.3	
माध्य	16.70	22.74	20.86	22.57	22.3		

6. बीज बोने की मात्राओं (S) के कारण,

$$\text{द० द०} = \frac{1}{5} (534 \cdot 5^2 + 727 \cdot 8^2 + 667 \cdot 5^2 + 722 \cdot 4^2 + 705 \cdot 1^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 71249 \cdot 0 - 70442 \cdot 4$$

$$= 806 \cdot 6$$

7. खरपतवार जातियों (W) के कारण

$$\text{द० द०} = \frac{1}{4} (969 \cdot 8^2 + 749 \cdot 1^2 + 811 \cdot 7^2 + 826 \cdot 7^2) - \text{सं० वा०}$$

$$= 71098 \cdot 8 - 70442 \cdot 4$$

$$= 556 \cdot 4$$

8 परस्पर त्रिया S × W के कारण,

$$\text{द० द०} = \frac{1}{8} (170 \cdot 9^2 + 87 \cdot 7^2 + \dots + 195 \cdot 2^2) - \text{सं० वा०}$$

$$\text{—द० द० (S) — द० द० (W)}$$

$$= 72888 \cdot 6 - 70442 \cdot 4 - 806 \cdot 6 - 556 \cdot 4$$

$$= 1083 \cdot 2$$

(S×H) सारणी

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	योग	माध्य
H ₀	236 0	371 3	308·5	341 2	363 2	1620 2	20 2
H ₁	298 5	356 5	359 0	381 2	341 9	1737 1	21·7
योग	534 5	727 8	667·5	722·4	705 1	3357·3	

9 घामपातनाशी (H) के कारण,

$$\begin{aligned} \text{व०य०} &= \frac{1}{80} (1620^2 + 1737^2) - \text{स०का०} \\ &= 70532 05 - 70442 40 \\ &= 89 6 \end{aligned}$$

10 परस्परक्रिया S×H के कारण

$$\begin{aligned} \text{व०य०} &= \frac{1}{8} (236 0^2 + 298 \cdot 5^2 + \dots + 363 \cdot 2^2 + 341 9^2) - \text{स०का०} \\ &\quad - \text{व०य० (S)} - \text{व०य० (H)} \\ &= 71521 76 - 70442 \cdot 4 - 806 \cdot 6 - 89 \cdot 6 \\ &= 183 \cdot 3 \end{aligned}$$

(W×H) सारणी

	W ₁	W ₂	W ₃	W ₄	योग
H ₀	472 6	391 3	399 1	357·2	1620 2
H ₁	497 2	357 8	412 6	469 5	1737 1
योग	969 8	749 1	811 7	826·7	3357 3

परस्परक्रिया (W×H) के कारण,

$$\begin{aligned} \text{व०य०} &= \frac{1}{8} (472 \cdot 6^2 + 497 2^2 + \dots + 357 \cdot 2^2 + 469 5^2) \\ &\quad - \text{स० का०} - \text{व०य० (W)} - \text{व०य० (H)} \\ &= 71461 8 - 70442 \cdot 4 - 556 4 - 89 6 \\ &= 373 4 \end{aligned}$$

परस्परक्रिया S×W×H के कारण,

$$\begin{aligned} \text{व०य०} &= \text{उपचार व०य०} - (S \vdash W \vdash H \vdash S \times W + S \times H + W \times H) \text{ व०य०} \\ &= 3691 \cdot 9 - (806 6 + 556 \cdot 4 + 89 \cdot 6 + 1083 2 + 183 3 + 373 4) \\ &= 599 \cdot 4 \end{aligned}$$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

विचरण स्रोत	स्व. की०	ध०य०	मा०ध०य०	F-मान	F-के सारणीयक मान जब $\alpha = .05$
पुनरावृत्ति	3	1549.35	516.35	9.53*	2.68
उपचार	39	3691.90	94.66	1.75*	1.50
S	4	806.6	201.65	3.72*	2.45
W	3	556.4	185.5	3.42*	2.68
S×W	12	1083.2	90.27	1.67	1.83
H	1	89.6	89.6	1.65	3.92
S×H	4	183.3	45.82	0.84	2.45
W×H	3	373.4	124.47	2.30	2.68
S×W×H	12	599.4	49.2	0.91	1.83
प्रयोग त्रुटि	117	6340.19	54.18		
पूर्णा	158	11581.15			

उपर्युक्त सारणी में जिन परिकल्पित F मानों पर तारक चिह्न (*) बना है वह अपने तदनुसार कारकों में 5% सार्थकता स्तर पर सार्थक अन्तर को प्रदर्शित करते हैं। स्पष्टतः पुनरावृत्तियों व उपचारों में सार्थक अन्तर सिद्ध होता है। उपचारों के समूहों में से केवल मुख्य प्रभाव S व W सार्थक हैं जिसका अभिप्राय है कि बीज बोने की दोष मात्राओं का उपत्र पर प्रभाव सार्थक रूप में एक-दूसरे से भिन्न है। इसी प्रकार खरपतवार की चार जातियाँ भी सार्थक रूप में एक-दूसरे से भिन्न हैं। विभिन्न मुख्य प्रभावों तथा परस्पर क्रियाओं की मानक त्रुटि निम्न प्रकार मान कर सकते हैं —

$$\begin{aligned}
 \text{S के माध्य की मानक त्रुटि} &= \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा० ध० य०}}{r \times q \times m}} \\
 &= \sqrt{\frac{54.18}{4 \times 4 \times 2}} \\
 &= 1.3011
 \end{aligned}$$

$$\text{W के माध्य की मानक त्रुटि} = \sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा० ध० य०}}{r \times p \times m}}$$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 5 \times 2}}$$

$$= 1.1638$$

S × W के माध्य की मानक त्रुटि = $\sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा.व.व.०}}{r \times H}}$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 2}}$$

$$= 2.6024$$

H के माध्य की मानक त्रुटि = $\sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा.व.व.०}}{r \times q}}$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 4 \times 5}}$$

$$= 0.8229$$

W × H के माध्य की मानक त्रुटि = $\sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा.व.व.०}}{r \times p}}$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 5}}$$

$$= 1.6459$$

S × H के माध्य की मानक त्रुटि = $\sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा.व.व.०}}{r \times q}}$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4 \times 4}}$$

$$= 1.8401$$

S × W × H के माध्य की मानक त्रुटि = $\sqrt{\frac{\text{त्रुटि मा.व.व.०}}{r}}$

$$= \sqrt{\frac{5418}{4}}$$

$$= 3.6803$$

धम तब ही हुई विधि द्वारा किसी भी बहुउपादायीय प्रयोग का प्रसारण विधेयण कर सकते हैं। विद्युत् 2^o बहुउपादायीय प्रयोग का प्रसारण विधेयण करने की वेदता में एक प्रति मुगम विधि दी है जिसे वेदंग विधि कहते हैं। यह विधि निम्न प्रकार है—

वेदता विधि—इस विधि का प्रयोग उपचारों के मुख्य प्रभाव तथा उनके कारण वर्ण-योग ज्ञात करने के लिए निम्न प्रकार कर सकते हैं—

(1) कारणों के संबंधों को जग में लिग दिया। यही यह ध्यान रखा जायिते कि उपचार के लिए अंतर लिगने के सुरत बाद दृग्वा विद्ये धरार के संबंध देना आवश्यक है।

(2) संबंधों को लिगने के पश्चात् धमते रतम्भ में उपचार योगों को लिग दिया जाता है।

(3) धम तीतरे रतम्भ में संबंधों के लिग दिये गये मुगत भागों का प्रारम्भ के जग में जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार धम रतम्भ में उपर की धापी संख्याएँ ज्ञान हो जाती हैं। रतम्भ कापी संख्याएँ क्रमिक मुगत के रूपसे पाए गे गे रहता गत रहता गत रहता गत होती हैं।

(4) क्रिया 3 को फिर से करने समय रतम्भ संवाद कर लिया जाता है। यदि प्रयोग के न कारण है तो इस क्रिया को दोहराकर न रतम्भ संवाद करते होते हैं।

(5) अतितम रतम्भ में पहली संख्या को छोड़कर धम संख्याएँ उपचारों के पूर्ण प्रभाव को लिखित करती हैं। इन संख्याओं को 2^o 2^o से भाग करने उपचारों के माध्य प्रभाव ज्ञात कर दिये जाते हैं जबकि न गुतरावृत्तियों की संख्या है।

(6) अतितम रतम्भ की पहली संख्या सर्वत्र मुग प्रेशकों के योग के समान होती है। इसका अर्थ करने 2^o 2^o से भाग देते पर संशोधन कारण ज्ञान हो जाता है। हमने बाद की संख्याओं का जगम वर्ण करने 2^o 2^o से भाग देते पर तदनुसार उपचारों के वर्ण योग ज्ञात हो जाते हैं। इस गम योगों का प्रसारण विधेयण सारणी में प्रयोग करने, सार्धकता परीक्षा सामग्य रूप में कर ही जाती है।

परिचसन में त्रुटि की जाँच

(i) विगम धीर गम जगतात्मा के उपचारों का योग अतितम अतितम करने परिचसन के लिए दी गई गारणी में प्रत्येक रतम्भ के नीचे रण दिया जाता है।

(ii) प्रत्येक रतम्भ का योग ज्ञान करने सबसे नीचे रण दिया जाता है।

(iii) उपचार योगों के धमने रतम्भ में उपर में मुग की धापी संख्याओं के योग ज्ञात करने इन धापी संख्याओं के नीचे रण दिये जाते हैं।

(iv) जाँच के लिए देखिये कि लिगने रतम्भ का योग, धमने रतम्भ के उपर में मुग की धापी संख्याओं के योग के समान है।

(v) मुगरी जाँच यह है कि तब रतम्भ धीर हमने लिगने रतम्भ के योग में अन्तर, लिगने रतम्भ की गम धीर विगम जग को संख्या का योग के अन्तर के समान होना है। उपर्युक्त विधि का प्रयोग निम्न उपकरण में किया गया है—

उदाहरण 21.9 : मक्का की दो प्रजातियों, गंग-5 (Ganga-5) और बस्ती (Basti) पर फासफोरस व पोटैश की दो-दो मात्राओं का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। फासफोरस की मात्राएँ 0 और 45 किलो० प्रति एकड़ और पोटैश की मात्राएँ 0 और 30 किलो० प्रति एकड़ ली गईं। मक्का की दोनों प्रजातियों (0, 1) तथा फासफोरस के दो स्तरों (0, 1) व पोटैश के दोनों स्तरों (0, 1) के आठ सचयों को यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में नियोजित किया गया। प्रयोग में चार पुनरावृत्तियाँ ली गईं। मक्का की उपज प्रति भूखण्ड (10 मी० × 15 मी०) निम्न सारणी में दी गई है—

उपचार सचय (VPK)	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	योग
(1)	4.58	2.69	4.02	3.40	14.69
k	3.59	3.57	4.00	3.26	14.42
k	4.08	3.62	3.42	4.23	15.35
pk	2.50	4.05	4.30	2.78	13.63
v	1.82	4.08	3.60	2.06	11.56
vk	4.27	4.57	4.60	4.24	17.68
vp	2.79	4.42	3.60	1.50	12.31
vpk	3.15	3.94	4.51	2.20	13.80
	26.78	30.94	32.05	23.67	113.44

इन प्रयोग के न्याय का प्रमरण-विश्लेषण येट्स-विधि द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं। अतः उपचार सचयों के माध्य प्रभाव एवं वर्ग-योग ज्ञात करने के लिए निम्न सारणी तैयार की गई—

उपचार सचय	उपचार योग	(i)	(ii)	(iii)	उपचार माध्य	सपटका के वर्ग-योग
(1)	14.69	29.11	58.04	113.44	3.54	402.14
k	14.42	28.98	55.35	5.62	0.35	0.987
p	15.35	29.24	-1.99	-3.26	-0.20	0.332
pk	13.63	26.11	7.61	-6.08	-0.39	1.155
योग		113.44	119.06	109.72		
v	11.56	-0.27	-0.13	-2.74	-0.77	0.235
vk	17.68	-1.72	-3.13	9.60	0.60	2.880
vk	12.31	6.12	-1.45	-3.00	-0.19	0.281
vpk	13.80	1.49	-4.63	-3.18	-0.20	0.361

विषम क्रम-संख्याओं

के सचयों का योग 53.91 64.20 54.52 104.44

सम क्रम-संख्याओं

के सचयों का योग 59.53 54.86 55.20 5.96

कुल योग 113.44 119.06 109.72 110.40

सामान्य विधि के अनुसार,

$$\begin{aligned} \text{पुनरावृत्ति व० घ०} &= \frac{1}{8} \{ 26\ 78^2 + 30\ 94^2 + 32\ 05^2 + 23\ 67^2 \} - \text{म० वा०} \\ &= 407\ 64 - 402\ 14 \\ &= 5\ 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उपचार व० घ०} &= \frac{1}{2} \{ 16\ 69^2 + \dots + 13\ 80^2 \} - \text{म० वा०} \\ &= 408\ 33 - 402\ 14 \\ &= 6\ 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पूर्ण व० घ०} &= \{ 4\ 58^2 + 3\ 59^2 + \dots + 1\ 50^2 + 2\ 20^2 \} - \text{म० वा०} \\ &= 424\ 98 - 402\ 14 \\ &= 22\ 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{शुद्धि व० घ०} &= 22\ 84 - 6\ 19 - 5\ 50 \\ &= 11\ 15 \end{aligned}$$

अतः प्रसरण विश्लेषण सारणी है,

विवरण श्रेण	स्व० श्रे०	व० घ०	मा० व० घ०	F-मात्र
पुनरावृत्ति	3	5 50	1 83	3 45
उपचार	7	6 19	0 88	1 66
शुद्धि	21	11 15	0 53	1 66
पूर्ण	31	22 84		

$\alpha = 05$ व (3, 21) स्व० वा० के लिए F का सारणी (परि० प-52) द्वारा प्राप्त मात = 3 07 और $\alpha = 05$ व (7, 21) स्व० श्रे० के लिए F का सारणीमूल मात = 2 50 F के परिवर्तित मानों की सारणीमूल तदनुसार F मातों से तुलना करने पर विदित होता है। पुनरावृत्तियों में सांख्यिक अन्तर है किन्तु उपचारों में अन्तर निरर्थक है। अतः उपचार संघटनों की सांख्यिकता की अलग अलग परीक्षा करने की आवश्यकता नहीं है।

$$\begin{aligned} \text{एक उपचार माध्य की मानक शुद्धि} &= \sqrt{\frac{s_p^2}{2n^2 \cdot r}} \\ &= \sqrt{\frac{0\ 53}{2 \times 4}} \\ &= 0\ 257 \end{aligned}$$

प्रत्येक मुख्य प्रभाव व परस्परक्रिया की सापेक्षता-परीक्षा इनके लिए F -मान ज्ञात करके, $\alpha = .05$ सां. स्तर व $(1, 21)$ स्व. को. के लिए मारपीबद्ध F_{α} से तुलना करके सामान्य रूप में कर सकते हैं।

बहु-उपादानीय प्रयोग में उपप्रतिचयन की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

अब तक जो उपादानीय प्रयोग सम्बन्धी प्रसरण विश्लेषण दिया गया उन सब में प्रति प्रयोगगत एकक में एक ही प्रेक्षण लिया गया था। किन्तु अनेकों प्रयोगों में एक एकक से कई उपप्रतिचयन एकको का चयन कर लिया जाता है। इस स्थिति में प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.10) की महत्ता से किया जा सकता है। यहाँ उस सारणी से यह भिन्नता होती है कि विचरण श्रोत के स्तम्भों में उपचारों को मुख्य प्रभाव व परस्पर क्रियाओं में विपाटित करना होता है। इतना ही नहीं प्रायः प्रत्येक प्रतिचयन एका पर कई-कई प्रेक्षण लेने होते हैं। ऐसी स्थिति में माना कि प्रति प्रयोगगत एकक से 'n' प्रतिचयन एककों का चयन किया गया है और प्रति प्रतिचयन पर u प्रेक्षण लिए गये हैं। $p \times q$ उपादानीय प्रयोग के लिए जिसमें यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिव्यक्तता का प्रयोग किया गया है, दृष्टव्य पृ० 581 प्रसरण विश्लेषण सारणी (21.15)।

यदि प्रयोगगत एकक से प्रतिचयन नहीं किया गया हो तो $n=1$ होगा और उक्त सारणी में $n=1$ रख देने से इन स्थिति के लिए प्रसरण सारणी का प्रारूप ज्ञात हो जाता है। यदि एक प्रेक्षण प्रति प्रतिचयन भूनिट लिया गया हो तो $u=1$ होता है। u का मान 1 रख देने पर उक्त सारणी प्राप्त हो जाती है। यदि $n=1$, $u=1$ हो तो स्पष्टतया सारणी (21.15) और (21.13) एक समान हो जाती है। वर्ग योगों को सामान्य ढंग से परिवर्तित किया जा सकता है।

तीन या तीन से अधिक कारक होने की स्थिति में व्यापक प्रसरण सारणी पहले की भाँति बना सकते हैं। इस सारणी में विचरण श्रोत के स्तम्भ में मुख्य प्रभाव तथा परस्पर-क्रियाओं की तदनुसार सख्या बढ़ जाती है। इन्हीं के अनुसार स्वातन्त्र्य कोटि तथा अन्य मा.ों में परिवर्तन करना होता है।

व्यवहार में बहुत अधिक कारक या कारकों के अधिक स्तर लेना उचित नहीं है क्योंकि इस स्थिति में सधियों की सख्या अत्यधिक बढ़ जाती है और इनका प्रयोग में प्रबन्ध करना कठिन हो जाता है। इसके अतिरिक्त उच्चतर क्रम की परस्परक्रियाओं की सापेक्षता-परीक्षा के पश्चात् निर्वचन करना भी कठिन है। यदि किसी प्रयोग में अनेक कारक लेना आवश्यक हो तो इस स्थिति में तृतीय या अधिक क्रम की परस्परक्रियाओं की सापेक्षता-परीक्षा अलग से नहीं करते हैं तथापि इन्हें प्रयोग त्रुटि में सम्मिलित कर लिया जाता है।

एक पुनरावृत्ति की स्थिति में प्रसरण विश्लेषण

यदि कारकों की सख्या अधिक हो (अर्थात् चार या चार से अधिक हो) और प्रत्येक कारक के कई स्तर हो तो सधियों की सख्या इतनी अधिक हो जाती है कि प्रयोग विन्यास में एक से अधिक पुनरावृत्ति लेनी सम्भव नहीं होती है। इनके कई कारण हो सकते हैं।

विषय नाम	सं. शं०	सं. शं०	सं. शं०	F-मूल	प्रयोजित सां. शं०
सुतरासुतरा	(r-1)	R _{xx}	$\frac{R_{xx}}{r-1} = R'$	$R'/s_e^2 = F$	$\sigma^2 + \frac{npq}{(r-1)k} \sum \rho_k^2$
उपरपर	(pq-1)	T _{xx}	$\frac{T_{xx}}{pq-1} = T'$	$T'/s_e^2 = F_T$	
A	(n-1)	A _{xx}	$\frac{A_{xx}}{n-1} = A'$	$A'/s_e^2 = F_A$	$\sigma^2 + \frac{rpnu}{p-1} \sum \alpha_i^2$
B	(q-1)	B _{xx}	$\frac{B_{xx}}{q-1} = B'$	$B'/s_e^2 = F_B$	$\sigma^2 + \frac{rpnu}{q-1} \sum \beta_j^2$
A x B	(p-1)(q-1)	(AB) _{xx}	$\frac{(AB)_{xx}}{(p-1)(q-1)} = (AB)'$	$(AB)'/s_e^2 = F_{AB}$	$\sigma^2 + \frac{rpnu}{(p-1)(q-1)} \sum \alpha_i \beta_j$
प्रयोग सुटि	(r-1)(pq-1)	E _{xx}	$E_{xx} / (r-1)(pq-1) = E'$		$\sigma_u^2 + n\sigma_\eta^2 + nu\sigma_e^2 = \sigma^2$
प्रतिषेधन सुटि	rpq(n-1)	S _{xx}	$S_{xx} / rpq(n-1) = S'$		$\sigma_u^2 + n\sigma_\eta^2$
प्रतिषेधन सुटि	rpqn(u-1)	O _{xx}	$O_{xx} / rpqn(u-1) = O'$		σ_u^2
सुमं	rpqnu-1				

सूत्र (21 8) का मूल सं. शं० दे० वर्ग, इति महत्त्वार्थ, उपरपर के सीमन्त के प्रत्य सुमं ।

एक तो यह कि प्रयोगगत सामग्री एक से अधिक पुनरावृत्ति के लिए उपलब्ध न हो। दूसरे प्रयोग का संचालन दुष्कर हो जाय। तीसरे यह कि कई पुनरावृत्तियों के प्रेक्षण लेने के लिए समय नहीं हो। इस प्रकार की समस्या रसायन शास्त्र तथा मृदा विज्ञान (Soil Science), सम्बन्धी प्रयोगों में प्रायः उत्पन्न होती है क्योंकि प्रत्येक रसायनिक विश्लेषण पर्याप्त समय लेता है। कभी-कभी ऐसी कठिनाई क्षेत्र प्रयोगों में भी सामने आती है अतः इन प्रयोगों में केवल एक ही पुनरावृत्ति लेना है और उच्च क्रम की परस्परक्रियाओं की प्रयोग त्रुटि के स्थान पर प्रयोग कर लिया जाता है। उच्च क्रम की परस्परक्रिया में तृतीय क्रम या इससे अधिक क्रम की परस्परक्रियाएँ ली जाती हैं। यदि द्वितीय क्रम की परस्परक्रिया में रुचि न हो अर्थात् प्रयोग की दृष्टि में यह महत्त्वपूर्ण न हो तो इसे भी प्रयोग त्रुटि में सम्मिलित कर सकते हैं।

पूर्ण संकरण

बहु-उपादानोंय प्रयोगों में सचयों की संख्या अत्यधिक हो जाने पर यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना में पुनरावृत्ति (खण्डक) की सजातीयता बनाए रखना असम्भव हो जाता है। पुनरावृत्ति की सजातीयता के लिए यह आवश्यक है कि उचित आकार के खण्डक का गठन किया जाय। खण्डक का आकार बृहत् होने की स्थिति में या तो संकरण का प्रयोग करके आकार को घटाते हैं या अन्य किसी अभिकल्पना का चयन करना होता है।

संकरण से अभिप्राय एक पुनरावृत्ति (पूर्ण खण्डक) को दो या दो से अधिक खण्डकों में विभाजित करना है जिसमें कि प्रत्येक खण्डक स्वयं में सजातीय होता है। इस खण्डक को असम्पूर्ण ब्लॉक (Incomplete blocks) कहते हैं क्योंकि एक खण्डक में कुछ उपचार सचय विद्यमान होने हैं और कुछ विद्यमान नहीं होते हैं। इस प्रकार प्रयोग त्रुटि कम हो जाती है जिसके परिणामस्वरूप संकरणित (Confounded) उपचार सचय को छोड़कर अन्य उपचारों की परीक्षा अधिक परिशुद्धि से होती है। इसका कारण यह है कि जो भी उपचार सचय असम्पूर्ण ब्लॉकों की रचना में प्रयोग किये जाते हैं उनके प्रति सूचना असम्पूर्ण ब्लॉकों में अंतर के साथ मिश्रित हो जाती है जिसको कि पृथक् नहीं किया जा सकता है। अतः जिस उपचार का संकरण किया गया होता है, उसे संकरण विश्लेषण सारणी में प्रयोग त्रुटि के साथ जोड़ देने हैं अर्थात् इस उपचार के सघटक को विचरण स्रोत के स्तम्भ में पलंग से नहीं दिखाया जाता है। अतः इसके प्रति सावधानता की परीक्षा नहीं करनी होती है। संकरण करते समय यह सावधानी बर्तनी चाहिये कि केवल उसी उपचार-सघटक (बैपम्य) का संकरण किया जाये जो महत्त्वपूर्ण न हो या जो सबसे कम महत्त्व का हो। व्यवहार में अधिकशत उच्चतर क्रम की परस्परक्रिया या परस्परक्रियाओं की संकरण हेतु लिया जाता है। इस प्रकार यदि एक ही उपचार सचय का सब पुनरावृत्तियों में संकरण करते हैं तो इस संकरण क्रिया को पूर्ण संकरण (complete confounding) कहते हैं।

संकरण अभिकल्पना के लिए व्यापक संकरण सारणी बहु-उपादानोंय प्रयोगों की भांति

तयार की जाती है। यहाँ सकारणित प्रभाव (मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया) की स्वातंत्र्य बोटि तथा बग योग को प्रयोग वृत्ति के साथ जोड़ दिया जाता है। सकारण का प्रयोग अनेक अभिवल्यनाभा म किया जा सकता है जैसे यादृच्छिकीकृत पूण लण्डक अभिवल्यना संटिन बग अभिवल्यना घादि। अथापक प्रसरण विश्लेषण सारणी उत अभिवल्यना के घाघार पर ही तयार की जाती है जिसका प्रयाग किया गया है। अयवहार म घाधिकतर यादृच्छिकीकृत पूण लण्डक अभिवल्यना का ही प्रयोग होता है। इन सबके लिए प्रसरण विश्लेषण सारणीय यहाँ अत्रम नहीं की गई हैं कयाकि यह अनु उपादानीय प्रयोगों के अनुरूप है। माता एक 2³ बहु उपादानीय प्रयाग म यदि परस्परक्रिया ABC का सकारण किया गया है जिसम प्रति पुनरावृत्ति म दो अतम्पूण अत्रम हैं यदि प्रयोग का विद्यात यादृच्छिकीकृत पूण लण्डक अभिवल्यना म किया गया है ता प्रसरण विश्लेषण सारणी की लत्ररेखा निम्न होती है —

विशरण लोण	लत्रा को०
लण्डक (अलाषात)	(2r - 1)
पुनरावृत्ति	(r - 1)
पुनरावृत्तियो म अलाषात	r
A	1
B	1
A × B	1
C	1
A × C	1
B × C	1
प्रयोग वृत्ति	6 (r - 1)
पूण	(8 r - 1)

अत्रमुक्त सारणी के लिए ब० घ० मा० ब० घ० तथा F-मान सामान्य रूप मे जात करके मुख्य प्रभास तथा परस्परक्रियाओं की सामयता की परीक्षा की जा सकती है।

घाशिक सकारण

प्रथम ऐसी स्थिति उत्पन्न होती है कि कितनी भी उपचार के समूह को महूरकपूर्ण नहीं समझा जा सकता है। साथ ही सब उपचार संभवता का एक लण्डक म रहता सामानीयता की दृष्टि से अनुचित समझा जाता है तो ऐसी स्थिति मे घाशिक संकरण एक उचित विधि है। घाशिक सकारण के अन्तर्गत प्रदेह पुनरावृत्ति में विभिन्न उपचार प्रभाव का सकारण

किया जाता है। यह उपचार प्रभाव वह होते हैं जिनमें भ्रम्य की प्रवेक्षा कम रहि होती है। प्रायः यह उपचार प्रभाव उच्च श्रम की परस्पर-त्रिगणें होती हैं। इन प्रकार की सकरण क्रिया को प्राथमिक सकरण कहते हैं। इन प्रयोग विन्यास द्वारा मकरणित उपचार के प्रभाव को उन पुनरावृत्तियों की सहायता से ज्ञान किया जाता है जिनमें कि इन उपचार प्रभाव का सकरण नहीं किया गया है। इन प्रकार के उपचार जिनका कि सकरण नहीं किया गया है प्राथमिक परिमुद्ध से भाकलित किये जाते हैं और इनकी परीक्षा मकरणित उपचारों की प्रवेक्षा प्राथमिक परिमुद्ध होती है। जैसे 23 प्रयोग के लिए एक माटृच्छिन्नीकृत पूर्ण खण्डक अभिकल्पना की स्थिति में जिसमें कि तीन पुनरावृत्तियाँ ली गई हैं और इनमें श्रमश उपचार प्रभाव AB, BC व AC का सकरण किया गया है, प्रसरण विश्लेषण-सारणी की रूपरेखा निम्न होती है —

विचरण सात	स्व० सं०
खण्डक	5
पुनरावृत्ति	2
पुनरावृत्तियों के खण्डक	3
A	1
B	1
C	1
AB	1
BAC	1
BC	1
ABC	1
प्रयोग त्रुटि	11
पूर्ण	23

इस स्थिति में सकरणित उपचार प्रभावों के वर्ग-योग उन पुनरावृत्तियों से परिकलित किये जाते हैं जिनमें इनका सकरण नहीं किया गया है और भ्रम्य वर्ग-योग किया गया है और भ्रम्य वर्ग-योग सामान्य रूप में परिकलित किये जाते हैं। शेष सारणी की व्यापक रूप से पूर्ण करके परिणाम प्राप्त कर लिए जाते हैं। इसी प्रकार की प्रसरण विश्लेषण सारणियाँ भ्रम्य अभिकल्पनाओं के लिए नियमानुसार बनाई जा सकती हैं।

द्विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना

यह भी एक प्रकार की बहु-उपदानिय अभिकल्पना है जिनमें एक कारक के मुख्य प्रभाव का मुख्य क्षेत्रों के साथ सकरण है। यहाँ मुख्य क्षेत्र से अभिप्राय एक प्रयोगगत एकक से है जो आकार में बड़ी है। प्रायः प्रयोगों में कुछ ऐसे उपचार होते हैं कि जिनके लिए छोटी

प्रयोगगत एकाको का सेना उचित नहीं है अर्थात् इन उपचारों को छोटे एकाको पर ठीक प्रकार से प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है। जैसे सिंचाई की कुछ ऐसी कार्य प्रणाली है जिनके लिए वृहत् भूतलक्ष्यों की आवश्यकता होती है, तापक्रम सम्बन्धी अनुसंधानों में सम्पूर्ण पोधा घर (Green house) को एक ही तापक्रम पर रक्ता जा सकता है। सेंकने की भट्टी (Baking oven) हिमीकरण यूनिट (freezing unit) आदि सम्बन्धी प्रयोगों में वृहत् प्रयोगगत यूनिटों की आवश्यकता होती है।

इस अभिकल्पना में दो या दो से अधिक भारकों या उपचारों का विभिन्न स्तरों पर होना आवश्यक है। इन उपचारों में से एक उपचार को उसके भिन्न भिन्न स्तरों पर एक पुनरावृत्ति के मुख्य क्षेत्रों में यादृच्छिक रीति से नियत कर दिया जाता है फिर प्रत्येक मुख्य क्षेत्र को दूसरे उपचारों के स्तरों के समान सख्या में उपक्षेत्रों में विभाजित कर दिया जाता है और इन उपक्षेत्रों में दूसरे उपचार को विभिन्न स्तरों पर यादृच्छिकी विधि से निर्दिष्ट कर दिया जाता है। यादृच्छिकीकरण की क्रिया को प्रत्येक क्षेत्र में स्वतन्त्र रूप से किया जाता है। यदि प्रयोग में कोई तीसरा शोधन विभिन्न स्तरों पर हो तो उपक्षेत्र को इस तीसरे उपचार के स्तरों की सख्या के अनुसार विभाजित कर दिया जाता है। इन क्षेत्रों को उप उपक्षेत्र कहते हैं। तीसरे उपचार को अपने विभिन्न स्तरों पर इन उप उपक्षेत्रों में यादृच्छिक रीति से निर्दिष्ट कर दिया जाता है और इस यादृच्छिकीकरण की क्रिया को प्रत्येक उपक्षेत्र में स्वतन्त्र रूप से किया जाता है। इस बात को इस प्रकार भी कह सकते हैं कि तीसरे उपचार के लिए प्रत्येक उपक्षेत्र को मुख्य क्षेत्र के रूप में समझा जा सकता है। इस प्रकार संज्ञात्मक दृष्टि से कितने ही उपचारों को विभिन्न स्तरों पर लिया जा सकता है पर इनकी सख्या अधिक हो जाने पर प्रयोग को सुचारु रूप से संचालन करना लगभग असम्भव हो जाता है अतः अधिकांश तीन से अधिक उपचारों को नहीं लेते हैं। प्रयोग में आवश्यकतानुसार पुनरावृत्तियों की सख्या से ली जाती है।

माना एक प्रयोग में दो कारक A व B हैं जिनके स्तर क्रमशः 3 व 4 हैं। A को मुख्य क्षेत्र में और B को उपक्षेत्र में लिया गया है। माना प्रयोग में 3 पुनरावृत्तियाँ हैं तो प्रयोग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है —

पुनरावृत्ति 1			पुनरावृत्ति 2			पुनरावृत्ति 3		
a ₁	a ₀	a ₂	a ₀	a ₂	a ₁	a ₀	a ₁	a ₂
b ₁	b ₂	b ₀	b ₂	b ₁	b ₂	b ₀	b ₁	b ₂
b ₂	b ₀	b ₂	b ₁	b ₂	b ₂	b ₂	b ₂	b ₁
b ₂	b ₁	b ₂	b ₀	b ₂	b ₀	b ₂	b ₂	b ₀
b ₀	b ₂	b ₁	b ₂	b ₀	b ₁	b ₁	b ₀	b ₂

यदि प्रयोग में तीन कारकों A, B व C को सम्मिलित किया गया है जिनके स्तर क्रमशः 3, 4 व 2 हैं तो प्रयोग का विन्यास निम्न प्रकार का होता है। माना कि यहाँ प्रयोग में केवल दो पुनरावृत्तियाँ ली गई हैं —

पुनरावृत्ति 1			पुनरावृत्ति 2		
a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2
$c_1 b_1 c_n$	$c_n b_2 c_1$	$c_1 b_0 c_n$	$c_1 b_0 c_n$	$c_n b_2 c_1$	$c_n b_1 c_1$
$c_n b_0 c_1$	$c_1 b_0 c_n$	$c_0 b_2 c_1$	$c_0 b_2 c_1$	$c_0 b_1 c_1$	$c_1 b_2 c_0$
$c_n b_2 c_1$	$c_1 b_1 c_0$	$c_n b_1 c_1$	$c_1 b_1 c_n$	$c_1 b_0 c_n$	$c_n b_1 c_1$
$c_1 b_2 c_0$	$c_1 b_3 c_0$	$c_0 b_3 c_1$	$c_1 b_3 c_0$	$c_0 b_3 c_1$	$c_1 b_0 c_0$

इसी प्रकार का विन्यास किन्हीं अन्य उपचार सख्याओं और उनके स्तरों के अनुसार दिया जा सकता है।

विपारित क्षेत्र अभिकल्पना में सभी उपचारों के मुख्य प्रभाव या परस्परक्रियाओं की तुलना समान सूक्ष्मता (Precision) से नहीं होती है। वह उपचार जो मुख्य क्षेत्र को निर्दिष्ट किया जाता है उनके द्वारा कम सूचना प्राप्त होती है अर्थात् उपक्षेत्र में दिये गये उपचार या परस्परक्रिया की अपेक्षा मुख्य क्षेत्र उपचार प्रभावों की कम सूक्ष्मता से परीक्षा होती है। इस कारण उन उपचारों जिससे लिए बड़े आकार के प्रयोगगत एककों की आवश्यकता हो या जिन उपचार में कम रचि हो मुख्य क्षेत्र में नियंत्रित करना चाहिये। उपक्षेत्र में दिये गये उपचार की अपेक्षा, उप-उपक्षेत्र में दिये उपचार के प्रति अधिक सूचना प्राप्त होती है तथा परिणाम अधिक परिशुद्ध होते हैं। यही त्रुटि चलना रहना है। इस तथ्य की पुष्टि प्रसरण-विरलेपण सारणी में प्रयोग त्रुटियों को देखने से भी होती है। मुख्य क्षेत्र के लिए प्रयोग-त्रुटि की स्वातन्त्र्य-सरया, उपक्षेत्र के लिए दो गई प्रयोग त्रुटि की स्वातन्त्र्य-सख्या से सदैव कम होती है। इसी प्रकार उपक्षेत्र के लिए प्रयोग त्रुटि की स्व० को०, उप-उपक्षेत्र के लिए प्रयोग त्रुटि की स्व० को० से कम होती है। इस अभिकल्पना के लिए सारित्रीय प्रतिरूप व व्यापक प्रसरण विरलेपण सारणी की रूपरेखा निम्न होती है —

सांख्यिकीय प्रतिरूप

माना कि उपक्षेत्र अभिकल्पना में दो कारक (उपचार) A और B हैं जिनके स्तर क्रमशः p और q हैं। माना कि उपचार A को मुख्य क्षेत्र में और उपचार B को उपक्षेत्र में दिया गया है। प्रयोग में पुनरावृत्ति-सरया r है तो प्रतिरूप निम्न होता है :—

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_k + \epsilon_k + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \eta_{ijk} \quad \dots (21.33)$$

$$i=1, 2, 3, \dots, p$$

$$j=1, 2, 3, \dots, q$$

$$k=1, 2, 3, \dots, r$$

$$\text{और } \epsilon_k \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad \eta_{ijk} = N(0, \sigma_\eta^2)$$

उत्पुक्त विधातित क्षेत्र अभिलखला के लिए प्रसरण विशलेषण शारणी
(प्रतिकल्प I)

सारणी 21 16

विशरण क्षेत्र	ख० व०	प्र० व० व०	F-मात्र	प्रयुक्तित मा० व० व०
मुख्यक्षेत्र				
वृत्तगणित	$(r-1)$	R_{xx}	$\frac{R'_{xx}}{(r-1)} = R'$	$\sigma_s^2 + q\sigma^2 \eta + \frac{pp}{r-1} \sum_k \rho_k^2$
A	$(p-1)$	A_{xx}	$\frac{A_{xx}}{(p-1)} = A'$	$\sigma_s^2 + q\sigma^2 \eta + \frac{rb}{p-1} \sum \alpha^2$
वृत्त (a)	$(r-1)(p-1)$	$(E_s)_{xx}$	$\frac{(E_s)_{xx}}{(r-1)(p-1)} = E'_s$	$\sigma_s^2 + q\sigma^2 \eta$
वसंक्षेत्र				
B	$(q-1)$	B_{xx}	$\frac{B_{xx}}{q-1} = B'$	$\sigma^2 \eta + \frac{rp}{q-1} \sum \beta^2$
A X B	$(p-1)(q-1)$	$(AB)_{xx}$	$\frac{(AB)_{xx}}{(p-1)(q-1)} = (AB)'$	$\sigma^2 \eta + \frac{r}{(p-1)(q-1)} \sum_{i,1} (\alpha\beta)_i^2$
वृत्त (b)	$p(r-1)(q-1)$	$(E_b)_{xx}$	$\frac{(E_b)_{xx}}{p(r-1)(q-1)} = E'_b$	$\sigma^2 \eta$
ग्रह	$rpq-1$	$\sum_{i,j,k} X_{ijk}^2$	$\frac{G^2}{rpq}$	

प्रतिरूप (21.33) में ρ_k , k वीं पुनरावृत्तियों का वास्तविक प्रभाव है c_k मुख्य क्षेत्रों के लिए प्रयोग त्रुटि है और η_{jk} उपक्षेत्रों के लिए प्रयोग त्रुटि है। μ व्यापक माध्य है।

α , β_j , $(\alpha\beta)_{ij}$ क्रमशः मुख्य प्रभाव A व B और परस्परक्रिया A B के वास्तविक प्रभाव हैं।

इन प्रसरण विरलेपण के हेतु, बर्ग योग सामान्य विधि से ज्ञात किये जा सकते हैं जिसकी विधि बहुउपादानोय प्रयोगों के साथ पहले ही दी जा चुकी है।

यदि प्रयोगों में तीन या तीन से अधिक उपचार हों तो उपर्युक्त सांख्यिकीय प्रतिरूप को विस्तारित किया जा सकता है।

युगत माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि

(1) मुख्य क्षेत्र उपचार के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि

$$s - d = \sqrt{\frac{2E'_s}{rq}} \quad \dots (21.34)$$

(2) उपक्षेत्र उपचार के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि,

$$s - d = \sqrt{\frac{2E'_s}{rp}} \quad \dots (21.35)$$

(3) परस्पर क्रिया के दो स्तरों में माध्य अन्तर की मानक त्रुटि,

$$s - d = \sqrt{\frac{2(AB)'}{rp}} \quad \dots (21.36)$$

(4) a के दो माध्यों के अन्तर की मानक त्रुटि जबकि b का स्तर वही हो,

$$s - d = \sqrt{\frac{2\{(q-1)E_b + E_s\}}{rq}} \quad \dots (21.37)$$

उपर्युक्त मानक त्रुटियों के प्रति सूत्रों में अवन पद्धति सारणी (21.16) के अनुसार है। इसी प्रकार के मानक त्रुटि के प्रति सूत्र उप-उपक्षेत्र के लिए भी दिये जा सकते हैं। इन सूत्रों में केवल भाजक में अन्तर करना होता है। इनके प्रतिरिक्त उपचारों में अन्तरों की संख्या बढ़ जाती है।

उदाहरण 21.9 : मक्का की पाँच प्रजातियों में अन्तर तथा प्रत्येक पर नाइट्रोजन के चार स्तरों का प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया। प्रयोग का विन्यास विनाटिन क्षेत्र अभिकल्पना में किया गया जिसमें तीन पुनरावृत्तियाँ थीं। मक्का की प्रजातियों की मुख्य क्षेत्र में तथा नाइट्रोजन की मात्राओं को उपक्षेत्र में दिया गया। प्रत्येक उपक्षेत्र का आकार 10मी० × 1.5मी० रखा गया है, इस प्रयोग द्वारा प्राप्त मक्का की ऊर्ज किलो-ग्राम प्रति मूकण्ड निम्न थी :—

मक्का के दानो की उपज (बिसोप्राम प्रति भूखण्ड)

मक्का की प्रजाति	साइटोजन का स्तर (किलो० प्रति हेक्टर)	योग			माध्य	
		R_1	R_2	R_3		
V_1	0	4.25	12.24	10.88	27.37	9.12
	60	6.25	4.59	7.24	18.08	6.03
	120	7.04	10.24	4.91	22.19	7.40
	180	6.65	9.61	6.66	22.92	7.64
V_2	0	10.84	9.01	7.81	27.66	9.22
	60	16.45	11.27	8.65	36.37	12.12
	120	10.76	7.14	6.44	24.34	8.11
	180	6.42	7.85	8.48	22.75	7.58
V_3	0	4.60	5.76	3.76	14.12	4.77
	60	7.27	8.32	3.16	18.75	6.25
	120	9.08	11.40	8.73	29.21	9.74
	180	10.88	9.63	7.40	27.91	9.30
V_4	0	6.31	5.30	6.93	18.54	6.18
	60	5.64	7.16	6.92	19.72	6.57
	120	6.33	7.68	6.99	21.00	7.00
	180	2.59	3.61	2.27	8.47	2.82
V_5	0	2.46	2.28	3.74	8.48	0.83
	60	6.32	7.01	10.35	23.68	7.89
	120	5.69	6.85	5.96	18.50	6.17
	180	6.96	7.22	10.47	24.65	8.22
योग		142.76	154.17	137.75	434.71	

इस प्रयोग के ग्यास का विश्लेषण एवं प्राप्त परिणामों का निर्वचन निम्न प्रकार कर सकते हैं। प्रसरण विश्लेषण के हेतु निम्न सहायकों का परिचय दिया ---

मुख्य क्षेत्र के लिए चर्च योग निम्न सारणी बनाकर सुगमता से जात कर सकते हैं ---

	R_1	R_2	R_3	योग
V_1	24.19	36.68	29.69	90.56
V_2	44.47	35.27	31.38	111.12
V_3	31.83	35.11	23.05	89.99
V_4	20.87	23.75	23.11	67.73
V_5	21.43	23.36	30.52	75.31
योग	142.79	154.17	137.75	434.71

$$\text{सं. का०} = \frac{(43471)^2}{60}$$

$$= 314954$$

$$\text{पुनरावृत्ति व०य०} = \frac{1}{20} (14279^2 + 15417^2 + 13775^2) - \text{सं. का०}$$

$$= 315662 - 314954$$

$$= 708$$

$$\text{V के कारण व०य०} = \frac{1}{12} (9056^2 + 11112^2 + 8999^2$$

$$+ 6773^2 + 7531^2) - \text{सं. का०}$$

$$= 324215 - 314954$$

$$= 9261$$

$$\text{मुख्य क्षेत्र योग } V_1R_1 = 425 + 625 + 704 + 665 = 2419, \dots, \dots,$$

$$V_5R_3 = 374 + 1035 + 596 + 1047 = 3052$$

$$\text{मुख्य क्षेत्र पूर्ण व०य०} = \frac{1}{4} (2419^2 + 4447^2 + \dots + 2311^2 + 3052^2) - \text{सं. का०}$$

$$= 331640 - 314954$$

$$= 16686$$

$$\text{त्रुटि (a)} = 16686 - 9261 - 708$$

$$= 6716$$

$$N_0 = 9617, N_{60} = 11660, N_{120} = 11524, N_{180} = 10670$$

$$\text{N के कारण व०य०} = \frac{1}{15} (9617^2 + 11660^2 + 11524^2 + 10670^2) - \text{सं. का०}$$

$$= 316729 - 314954$$

$$= 1775$$

$$= \frac{1}{3} (2737^2 + 1808^2 + \dots + 1850^2 + 2465^2) - \text{सं. का०}$$

$$= 336654 - 314954$$

$$= 21700$$

$$V \times N \text{ व०य०} = \text{उपचार व०य०} - N \text{ व०य०} - V \text{ व०य०}$$

$$= 217.00 - 92.61 - 17.75$$

$$= 106.64$$

$$\text{पूर्ण व.य.} = (4.25^2 + 6.25^2 + 5.96^2 + 10.47^2) - \text{सं.वा.}$$

$$= 3594.53 - 3149.54$$

$$= 444.99$$

व्यापक प्रसरण-विश्लेषण सारणी

विवरण	स्व. शी.	व.य.	मा.व.य.	F-मान	सारणीकृत 5%- F-मान
मुख्य क्षेत्र					
पुनरावृत्ति	2	7.08	3.54	0.42	4.46
V	4	92.61	23.15	2.75	3.84
त्रुटि (a)	8	67.16	8.39		
उपक्षेत्र					
N	3	17.75	5.92	1.15	2.92
V × N	12	106.64	8.89	1.74	2.09
त्रुटि	30	153.75	5.12		
पूर्णा	59	444.99			

उपर्युक्त सारणी के अन्तिम स्तम्भ में दिये F के सारणी (परि० पृ०-52) द्वारा प्राप्त मानों से तदनुसार परिवर्तित F-मानों की तुलना करने पर जात होता है कि कोई भी मुख्य प्रभाव या परस्परक्रिया सांकेतिक नहीं है।

$$\begin{aligned} V \text{ के माध्य की मानक त्रुटि} &= \sqrt{\frac{E_a}{r \times q}} \\ &= \sqrt{\frac{8.39}{3 \times 4}} \\ &= 0.8161 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N \text{ के माध्य की मानक त्रुटि} &= \sqrt{\frac{E_b}{r \times p}} \\ &= \sqrt{\frac{5.12}{3 \times 5}} \\ &= 0.5842 \end{aligned}$$

N के माध्य की किसी एक प्रजाति के लिए मानक त्रुटि

$$= \sqrt{\frac{E_b}{r}} = \sqrt{\frac{512}{3}} = 13063$$

एक प्रजाति की, N के किसी एक स्तर पर मानक त्रुटि,

$$= \sqrt{\frac{(q-1) E_b + E_s}{r \times q}} = \sqrt{\frac{3 \times 512 + 839}{3 \times 4}} = 14068$$

विपाटित खण्डक या पट्टी क्षेत्र अभिकल्पना

कभी-कभी प्रयोग में लिए गये दो उपचार ऐसे होते हैं कि उनमें से किसी एक को भी लघु प्रयोग एकाई में प्रयुक्त करना सम्भव नहीं होता है या उन दोनों उपचारों के मुख्य प्रभाव का परिशुद्धि से आकलन करने या उनके प्रति परिकल्पनाओं की परिशुद्धि से परीक्षा करने का उद्देश्य नहीं होता है। किन्तु इन उपचारों की परस्परक्रिया में अभिरुचि होती है अर्थात् उपचार A तथा B के उन स्तरों को जानना होता है कि जिनका सम्मिलित रूप में प्रभाव सर्वोत्तम हो। जैसे दो कारक जुताई व अन्तरण (ploughing and spacing) हो या जुताई व पुहार करने वाले (spraying) उपचार आदि के लिए विपाटित खण्डक अभिकल्पना उपयुक्त है।

विपाटित खण्डक अभिकल्पना में खण्डक एक दूसरे के परस्पर लांबिक पट्टियों (मुख्य क्षेत्रों) में दोनों उपचारों के स्तरों के अनुसार विभाजित होते हैं। एक ओर की पट्टियों में एक उपचार और दूसरी ओर की पट्टियों में दूसरे उपचार को यादृच्छिकीकृत रीति से नियत कर दिया जाता है। इस प्रकार आवश्यकता अनुसार पुनरावृत्तियों का गठन कर लिया जाता है। माना कि दो उपचार A तथा B हैं। माना कि A के तीन स्तर और B के चार स्तर हैं तथा दो पुनरावृत्तियों को लिया गया है तो प्रयोग विन्यास का रूप निम्न होता है।

		पुनरावृत्ति 1				पुनरावृत्ति 2			
		b ₂	b ₃	b ₀	b ₁	b ₁	b ₀	b ₃	b ₂
a ₀									
a ₂									
a ₁									

माना कि सामान्य रूप में A के P स्तर हैं और B के q स्तर हैं तथा प्रयोग में r

पुनरावृत्तियाँ ली गई हैं। तो व्यापक प्रसरण विश्लेषण सारणी की रूपरेखा निम्न होती है—

(सारणी 21 17)

विचरण स्रोत	स्व० को०
पुनरावृत्ति	$(r - 1)$
A	$(p - 1)$
श्रुटि (a)	$(r - 1)(p - 1)$
B	$(q - 1)$
श्रुटि (b) श्रुटि	$(r - 1)(q - 1)$
A × B	$(p - 1)(q - 1)$
श्रुटि (c)	$(r - 1)(p - 1)(q - 1)$
पूर्ण	$(rpq - 1)$

चिसी भी विपाटित लघुडक अभिकल्पना की स्थिति में वर्ग योग सामान्य रूप में परि-
कलित किये जाते हैं। इसका विश्लेषण विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना जैसा ही है परत उसके
लिए उदाहरण अलग से नहीं दिया गया है।

विपाटित लघुडक अभिकल्पना में संकरण

यदा-कदा ऐसी स्थिति उत्पन्न होती है कि उपक्षेत्र में दिये जाने वाले चारक बहु-
उपादायी होते हैं और इन सचयों की संख्या बृहत् होती है। यदि इन सब उपक्षेत्र उपचारों
(मचयों) को एक ही मुख्य क्षेत्र में निर्दिष्ट कर दिया जाये तो मुख्य क्षेत्र की सञ्चालनीयता
बनाए रखना सम्भव नहीं होता है। परत प्रत्येक मुख्य क्षेत्र को लघुडकों में विभाजित कर
दिया जाता है और संकरण का प्रयोग करते उपक्षेत्र उपचारों को इन लघुडकों में
नियमानुसार यादृच्छिक रीति से नियत कर दिया जाता है। इस अभिकल्पना का प्रसरण-
विश्लेषण तथा परिकल्पना परीक्षा सामान्य रूप में की जाती है। इसके विश्लेषण में
केवल इतना अन्तर करना होता है कि प्रसरण-विश्लेषण सारणी में उपक्षेत्र के प्रति विचरण
स्रोत में संकरणित उपचार प्रभाव को श्रुटि में सम्मिलित कर दिया जाता है।

प्रश्नावली

1. किसी प्रयोगगत अभिकल्पना के सांख्यिकीय प्रतिरूप में व्यापक रूप में समझते हैं।
2. 'सांख्यिकीय प्रतिरूप प्रसरण-विश्लेषण का मूल आधार है', इस तथ्य का विश्लेषण
कीजिए।

3. प्रसरण विश्लेषण विन-विन कल्पनाओं पर आधारित है ? प्रसरण विश्लेषण का मूल सिद्धान्त बताइए ।
4. चार व्यक्तियों ने एक पूर्ण पदार्थ के प्रलग-प्रलग प्रतिदर्श खपन किये और इन प्रतिदर्शों में नमी की प्रतिशत मात्रा निम्न प्रकार थी :—

प्रतिदर्श	नमी की प्रतिशत मात्रा			
1.	9.3	10.5	11.0	12.5
2.	7.7	9.6	3.5	
3.	12.5	13.4	18.0	17.4
4.	11.4	9.6		

उपर्युक्त न्याम का प्रसरण-विश्लेषण करके विभिन्न प्रतिदर्शों में माध्य नमी की प्रतिशत मात्रा की समानता की परीक्षा कीजिए ।

5. निम्न सारणी में गेहूँ की उपज (बुघाल प्रति एकड़) दी गई है जो कि प्रयोगगत भूखण्डों पर आधारित है, जिनमें एक खाद की चार मात्राएँ लगाई गई थीं । प्रत्येक खाद की मात्रा को क्षेत्र के पाँच खण्डों में यादृच्छिकीकृत रीति से प्रयुक्त किया गया था :—

खण्ड संख्या	उपचार (खाद की मात्रा)			
	1	2	3	4
1.	21	24	34	40
2.	25	33	26	47
3.	31	34	38	39
4.	17	39	32	41
5.	26	35	35	33

प्रसरण विश्लेषण कीजिए और परिणामों को दीजिए ।

(बम्बई, 1970)

6. निम्न सारणी में गेहूँ की उपज (क्विटन प्रति एकड़) पाँच खाद उपचारों के लिए दी गई है । प्रयोग का विन्यास लैटिन वर्ग है ।

पंक्ति	संख्या					
1	(C) 13 8	(A) 8 4	(E) 20 8	(B) 9 6	(D) 16 5	
2	(B) 13 4	(E) 17 5	(D) 18 4	(C) 10 2	(A) 9 8	
3	(A) 12 4	(C) 15 2	(B) 13 4	(D) 15 6	(E) 15 2	
4	(E) 17 8	(D) 16 6	(C) 12 8	(A) 6 8	(B) 15 8	
5.	(D) 13 0	(B) 18 0	(A) 10 4	(E) 18 4	(C) 14 0	

(a) उपर्युक्त नाम का प्रसरण विश्लेषण कीजिए और उपचारों की मायवृत्ता परीक्षा कीजिए।

(b) शुद्ध उपचार माध्यों की परीक्षा करने के लिये उपयुक्त गरीभा भाग कीजिए।

7. मक्का की तीन प्रजातियों पर फासफोरस (P) के चार स्तरों और पोटैश (K) के दो स्तरों के संयोजों का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग किया गया। प्रयोग को विपाटित क्षेत्र अभिव्यक्तता में व्यवस्थित किया गया।

प्रजातियों को V_1, V_2, V_3 से और फासफोरस की मात्राओं 0, 15, 30, 45 किलो० प्रति हेक्टर को P_0, P_1, P_2, P_3 और पोटैश की मात्राओं 0 व 50 किलो० प्रति हेक्टर को K_0 व K_1 द्वारा सूचित किया गया है। प्रजातियों को मुख्य क्षेत्रों में और उपचार संयोजों को उपक्षेत्रों में प्रयुक्त किया गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त 100 ग्राम मुद्दे में दाना की मात्रा निम्न प्रकार थी।—

पुनरावृत्ति 1

प्रजाति	(PK) उपचार संयोज तथा मुद्दे में दानों की मात्रा										
$V_2(31)$	69 1	(01) 66 5	(20) 70 8	(10) 65 9	(30) 69 7	(00) 61 5					
						(11) 60 3	(21) 66 6				
$V_1(10)$	50 8	(11) 53 4	(21) 47 4	(20) 53 2	(01) 48 1	(31) 55 0					
						(00) 51 7	(30) 53 4				
$V_3(00)$	47 5	(11) 52 2	(21) 59 2	(31) 61 9	(30) 61 9	(10) 61 6					
						(01) 51 6	(20) 62 2				

पुनरावृत्ति 2

प्रजाति				
V_3	(01) 55 1	(31) 56 9	(20) 56 7	(30) 60 7
	(10) 52 2	(00) 53 9	(21) 59 9	(11) 57 8
V_2	(00) 60 5	(01) 61 3	(30) 68 2	(11) 69 6
	(31) 74 5	(10) 69 6	(20) 63 2	(21) 66 4
V_1	(21) 58 1	(11) 57 1	(00) 48 4	(01) 53 5
	(20) 77 7	(30) 57 5	(31) 61 4	(10) 58 8

- (i) उपर्युक्त विपाटित क्षेत्र अभिवृत्तना का प्रमरण विश्लेषण कीजिए और निष्कर्ष निकालिए ।
 (ii) फाक्तोरस व पोटास के मुख्य प्रभावों एवं परस्पर-क्रियाओं की मायंकता की परीक्षा कीजिए ।

8 एक $3 \times 2 \times 2$ बहु-उपादानीय प्रयोग को यादृच्छिकीकृत पूर्ण खण्डक अभिवृत्तना में व्यवस्थित किया गया । हमने तीन पुनरावृत्तियाँ का प्रयोग किया गया ।
 तीन उपचारों A, B, C के सचया के लिए प्रेक्षण (किता० में) निम्न प्रकार थे :—

उपचार सचया			पुनरावृत्ति		
			R_1	R_2	R_3
0	0	0	8 8	9 0	9 3
0	0	1	12 7	10 5	10 4
0	1	0	7 4	11 9	11 8
0	1	1	8 6	16 9	13 1
1	0	0	20 6	9 1	15 0
1	0	1	12 2	12 6	16 4
1	1	0	15 8	16 2	20 0
1	1	1	25 2	13 5	20 6
2	0	0	5 9	15 0	10 5
2	0	1	12 5	17 4	20 5
2	1	0	5 9 0	18 2	17 6
2	1	1	5 5	9 7 5	18 4

उपर्युक्त न्याम का प्रसरण-विश्लेषण कीजिए तथा मुख्य प्रभावों व परस्पर-क्रियाओं की मायंकता की परीक्षा कीजिए ।

- 9 निम्न यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिवृत्तना में एक अप्राप्त मान होने की स्थिति में प्रमरण विश्लेषण कीजिए ।

उपचार	पुनरावृत्ति			
	R_1	R_2	R_3	R_4
1	2 10	1 7 5	3 4 5	0 5 7
2	2 5 5	1 7 2	2 2 3	2 4 0
3	2 6 0	1 3 3	2 6 0	2 2 0
4	6 0 0	1 1 7	*	1 9 3
5	3 3 5	1 3 0	1 7 3	1 7 7
6	2 2 3	2 3 3	2 7 5	2 7 0
7	1 6 0	1 8 0	3 1 0	2 0 5

* लुप्तमान

10. एक बटु-उपादानीय प्रयोग में तीन कारक (A, B, C) लिये गये जिनके स्तर क्रमशः (2 × 3 × 4) थे। प्रयोग में दो पुनरावृत्तियाँ ली गईं। इस प्रयोग में प्राप्त प्रेक्षणों से निम्न वर्ग-योग परिकल्पित किये गये —

विवरण स्त्रोत	ब० य०
पुनरावृत्ति	13 १4
A	53 55
B	5·26
C	4·27
AB	8 27
AC	23 99
BC	25·43
ABC	6 85
पूर्ण	453 99

उपर्युक्त आंशिक परिकल्पनों की सहायता से पूर्ण प्रसरण-विश्लेषण सारणी बनाइये और यथासम्भव परिणाम निवासकर उनका निवेदन कीजिये।

11. प्रसरण-विश्लेषण से वैषम्य की उपयोगिता पर टिप्पणी लिखिये।



यदि किसी न्यास से यह सबित मिले कि उसके विषय में प्रसरण-विश्लेषण, 1-परीक्षा, कोई वर्ग-परीक्षा या किसी अन्य परीक्षा के लिए जो अनिधारणाएँ की गई हैं वे सत्य नहीं हैं तो ऐसे न्यास के लिए इन परीक्षाओं का उपयोग उचित नहीं है। इस स्थिति में या ता अप्राचल परीक्षाओं का उपयोग कर सकते हैं या न्यास का रूपान्तरण इस प्रकार कर दिया जाता है कि रूपान्तरित न्यास प्रसरण-विश्लेषण या परीक्षाओं के प्रति ली गई अनिधारणाओं का पालन करने लगे। जैसे माहुरिद्धरीकृत पूर्ण खण्डक अनिक्त्वना का गणितीय प्रतिरूप

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + e_{ij}$$

है। इस प्रतिरूप के प्रति यह अनिधारणाएँ की गई हैं कि संघटक (μ, β_i, τ_j व e_{ij}) योग्य (Additive) हैं और श्रुति e_{ij} स्वतन्त्र हैं और $N(0, \sigma_e^2)$ है। यदि किसी न्यास से ऐसा सबित मिले कि संघटक गुणतात्मक (Multiplicative) है अर्थात् $Y = \mu \beta_i \tau_j e_{ij}$ है तो ऐसी स्थिति में सामान्य प्रसरण-विश्लेषण नहीं किया जा सकता है। किन्तु यदि इन प्रतिरूप का लघुगणक में रूपान्तरण कर दिया जाये तो संघटक योग्य एवं समविचाली (homoscedastic) हो जाते हैं। इस स्थिति में

$$\log Y_{ij} = \log \mu + \log \beta_i + \log \tau_j + \log e_{ij}$$

अतः प्रेक्षणों का लघुगणक लेकर प्रसरण विश्लेषण करना उपयुक्त है। केवल लघुगणक रूपान्तरण ही नहीं, अनेक अन्य रूपान्तरण जैसे वर्गमूल, प्रतिलोम रूपान्तरण आदि विभिन्न स्थितियों में उपयुक्त हैं। कुछ मुख्य रूपान्तरणों का वर्णन यहाँ दिया गया है।

यह ध्यान रहे कि माथकता-परीक्षा रूपान्तरित न्यास के आधार पर ही की जाती है। किन्तु यदि माध्य, प्रसरण आदि का आकलन करना हो तो मूल प्रेक्षणों द्वारा ही किया जाता है अन्यथा रूपान्तरण के पश्चात् इनकी माप-इकाई में परिवर्तन हो जाता है जो कि आकलन के हेतु स्वीकृत नहीं है। रूपान्तरण उचित है या नहीं? इनकी पुष्टि करने के हेतु प्रतिदर्श प्रेक्षणों को प्रसामान्य प्रायिकता आक पेपर¹ पर आलेखित कर लिया जाता है और इन बिन्दुओं को निज़ादर वक्र के रूप तथा विषमता के विषय में पता कर लिया जाता है।

यदि श्रुति e_{ij} का बंटन विषम अर्थात् अप्रसामान्य हो तो F तथा t परीक्षाओं द्वारा बहुत से परिणाम सार्थक निरूढ होते हैं जबकि वे वास्तव में सार्थक नहीं होते हैं। इनके अनिश्चित उपचार (Treatment) माध्य जो प्रेक्षणों द्वारा परिकल्पित किया जाता है वह समग्र में या उपचार माध्य का परिशुद्ध आकलक नहीं होता है। यह भी देखा गया है कि

१. एक विशेष प्रकार का आक पेपर जो कि वक्र को एक विकृत ऊर्ध्वांश मापन (distorted vertical scale) के द्वारा एक सरल रेखा के ताल देता है प्रसामान्य आलेखन आक पेपर बहुरूप है।

यदि चर वा बटन प्रथमामान्य हो तो प्रसरण व माध्य में परस्पर सम्बन्ध होता है जैसे द्विपद बटन के माध्य np व प्रसरण $npq = np(1-p)$, में सम्बन्ध है या प्वासो बटन के माध्य व प्रसरण समान होते हैं आदि। अतः यदि उपचार या पुनरावृत्ति (replication) के प्रभाव बृहत् हो तो प्रसरण अतमान होने की सम्भावना होती है। ऐसी स्थिति में रूपान्तरण द्वारा प्रसरणों को स्थिर करना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है। रूपान्तरण इस प्रकार का होना चाहिये कि जिससे प्रसरण लगभग पूर्णतया माध्य से स्वतन्त्र हो जाये।

बार्टलेट (Bartlett) ने एक घाटन रूपान्तरण के हेतु निम्न आवश्यकताओं पर बल दिया।

- (1) रूपान्तरित चर वा प्रसरण, माध्य में परिवर्तनों से प्रभावित नहीं होना चाहिए अर्थात् प्रसरण व माध्य सर्वत्र स्वतन्त्र रहने चाहिये।
- (2) रूपान्तरित चर वा बटन प्रथमामान्य होना चाहिये।
- (3) रूपान्तरण के पश्चात् चर वा माध्य, समग्र माध्य का एक प्रच्छा भावतक होना चाहिए।
- (4) रूपान्तरण के उपरान्त, सपटनों के वास्तविक प्रभाव रैखिक एवं योग्य होना चाहिए।

उपर्युक्त आवश्यकताओं में अतिरिक्त प्रायः निम्न गुणों की भी आवश्यकता होती है—

- (क) किसी अभिवलन में त्रुटियाँ e_j स्वतन्त्र एवं प्रथमामान्य वित्त होनी चाहिए।
- (ख) प्रेरणों वा प्रसरण स्थिर होना चाहिए। यदि स्थिर न भी हो तो विचरण की पद्धति ज्ञात होनी चाहिए।

कुछ मुख्य रूपान्तरण निम्न प्रकार हैं

यहाँ केवल रूपान्तरणों का ही वर्णन किया गया है। किसी भी घाटन के प्रसरण विरूपण करने की विधियाँ अध्याय (21) में दी गई हैं।

सघुणनकीय रूपान्तरण

इस प्रकार का रूपान्तरण तभी उचित है जबकि चरों के प्रसरण व माध्य में घनारमक सहसम्बन्ध हो अर्थात् मानक विचलन माध्य के समानुपाती हो। व्यावहारिक दृष्टि से यह कहे कि यदि माध्य बृहत् हो और मानक विचलन भी बृहत् हो तो सघुणन रूपान्तरण करना चाहिए। माना कि $\sigma = c\mu$ या $\sigma^2 = c^2\mu^2$ हो तब सन्निकट रूपान्तरण ज्ञात करने के

लिए पहले $\int \frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}}$ ज्ञात करते हैं। जबकि $\phi(x)$ प्रसरण σ^2 का फलन है अतः इस स्थिति में $\phi(x) = c^2x^2$ और

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2x^2}} = \frac{1}{c} \log x \quad \dots (22.1)$$

अतः (22.1) के अनुसार सघुणन रूपान्तरण उचित है।

यह रूपान्तरण उम स्थिति में भी करना चाहिए जब सपटनों के प्रभाव घुणनारमक हो अर्थात् इस रूपान्तरण द्वारा पुनरावृत्ति प्रभाव योग्य प्रभावी में परिवर्तित हो जाते हैं।

यदि चर जिसका लघुगणक रूपान्तरण करना हो और उसके मानों में एक भी मान शून्य हो तो लघुगणक रूपान्तरण में समस्या उत्पन्न हो जाती है क्योंकि $\log 0 = -\infty$ है। अतः इस स्थिति में X के स्थान पर $(x+1)$ का लघुगणक रूपान्तरण किया जाता है अर्थात् रूपान्तरित चर $Y = \log_e (x+1)$ हो जाता है और उत्पन्न समस्या का निवारण हो जाता है।

यदि विचर मान केवल दशमलव में ही हो तो ऐसी स्थिति में 10,100 या अन्य 10 की बृहत् घात से मानों को गुणा करके लघुगणक लेना चाहिए। इस प्रकार लघुगणकीय मानों को लिखने में सुविधा हो जाती है।

वर्गमूल रूपान्तरण

वर्गमूल रूपान्तरण इसी स्थिति में उचित है कि न्यास प्वासो बटन का पालन करता हो। इस प्रकार के न्यास का सुगमता से पता चल जाता है यदि न्यास किसी विरल घटना की गणना पर आधारित हो जैसे एक उत्पाद (product) में दोषपूर्ण वस्तुओं की संख्या, एक पेठ की पत्ती पर कीटों की संख्या या विमान दुर्घटनाओं की संख्या आदि। इन सब ही घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता बहुत कम है अतः यह घटनाएँ प्वासो बटन का पालन करती हैं। इस बटन में,

$$\sigma^2 = \mu \quad \text{अतः } \phi(x) = x \text{ और}$$

$$\int \frac{dx}{\phi(x)} = \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \quad \dots (22.2)$$

इससे स्पष्ट है कि वर्गमूल बटन उपर्युक्त प्रकार की स्थितियों में उपयुक्त है। चर का रूपान्तरण करते समय स्थिरांक 2 का प्रयोग करने की कोई आवश्यकता नहीं है क्योंकि चर से गुणा करने का बटन के रूप पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। बार्टलैट ने बताया कि यदि संख्याएँ 0 से 10 के बीच में हों तो \sqrt{x} की अपेक्षा $\sqrt{x + \frac{1}{4}}$ एक अच्छा रूपान्तरण है। कर्टिस (Curtiss) ने बताया कि यदि संख्याएँ 15 तक हो तो भी $\sqrt{x + \frac{1}{4}}$ रूपान्तरण \sqrt{x} से उत्तम है।

इस रूपान्तरण में और अधिक परिष्कार महत्त्वपूर्ण नहीं है यद्यपि कुछ अन्य सुधार भी सुझाये गये हैं जैसे यदि संख्याएँ लघु हों तो कभी-कभी रूपान्तरण $\sqrt{X+1}$ या $\sqrt{X} + \sqrt{X+1}$ अधिभ्रम प्रभावित रूप में प्रसरण की स्थिरता प्रदान करते हैं। इस प्रकार रूपान्तरण के अन्तर्गत चरों के प्रसरणों में सार्थक अन्तर नहीं रहता है।

उदाहरण 22.1 मक्का के प्रजाति-परीक्षण के लिए किये गये एक प्रयोग में पेठा की संख्या तथा जड़ों के गिरन (root lodging) की संख्या दी गई है।

प्रजाति	वेडों की संख्या			जड़ से पर गिरने की संख्या		
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3
401	9	24	23	0	2	4
402	16	23	23	1	2	1
403	21	28	21	2	3	2
404	13	22	16	1	1	0
405	16	21	22	11	2	1
406	14	24	14	12	3	0
407	23	14	22	1	1	1
408	16	21	20	4	0	0
409	26	24	22	1	1	2
410	22	24	21	2	3	3

यदि लक्षण जड़ से वेडा की गिरने के प्रति प्रजातियों में अन्तर की परीक्षा करनी हो तो विश्लेषण करने से पूर्व दी गई वेडों की संख्या का रूपान्तरण करना आवश्यक है ग्यास को देखने से स्पष्ट है कि इसमें प्रेक्षण 0-12 तक है अतः इसके लिए रूपान्तरण $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$ उपयुक्त है।

प्रायः ग्यास को समान वेडों की संख्या के आधार पर परिवर्तित करने, रूपान्तरण $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$ का प्रयोग करना अच्छा है क्योंकि इस प्रकार प्रजातियों की तुलना विरवसनीय होती है।

यहाँ केवल रूपान्तरण का प्रदर्शन करने के हेतु ग्यास का रूपान्तरण करके दिखाया गया है।

रूपान्तरित ग्यास $\sqrt{X+\frac{1}{2}}$

प्रजाति	जड़ से वेड गिरने की संख्या		
	R_1	R_2	R_3
401	0.707	1.581	2.121
402	1.225	1.581	1.225
403	1.581	1.871	1.581
404	1.225	1.225	0.707
405	3.391	1.581	1.225
406	1.581	1.871	0.707
407	1.225	1.225	1.225
408	2.121	0.707	0.707
409	1.225	1.225	1.581
410	1.581	1.871	1.871

उपयुक्त सारणी में दिया न्यास प्रसरण-विश्लेषण के लिए उपयुक्त है।

चापज्या या कोणीय रूपान्तरण

इस प्रकार रूपान्तरण मुख्यतया अनुपात या प्रतिशत के लिए अत्यन्त उपयुक्त है। यदि चर द्विपद बंटन का पालन करता हो तो चापज्या रूपान्तरण करना चाहिए। यह पहले खण्ड में बताया जा चुका है कि प्रसरण npq माध्य np का फलन है। चापज्या रूपान्तरण माध्य व प्रसरण को एक-दूसरे से स्वतन्त्र बना देता है। वास्तव में प्रसरण की सन्नतिपता को बनाये रखने के लिए भी रूपान्तरण $\theta = \arcsin \sqrt{p}$ का प्रयोग करना चाहिए। शब्द चापज्या या ज्या⁻¹ समानार्थक (synonymous) हैं। इन प्रकार θ वह कोण है कि जिसकी ज्या p के समान है। θ को रेडियन (radian) में भी नाप सकते हैं इस रूपान्तरण को सुगम करने के हेतु फिशर व येट्स (Fisher & Yates) द्वारा दी गई सारणी में p के विभिन्न मानों के लिए डिग्री θ में परिवर्तित मान दिये हुए हैं जिनका सीधा प्रयोग किया जा सकता है जैसे $\arcsin .472 = 43.39^\circ$ या $\sin^{-1} 43.39 = .472$

चापज्या रूपान्तरण की विशेषता यह है कि यह बंटन की दोनों पुच्छों को खींचता है और बीच में भाग को दबाता है अर्थात् बक्र के रूप को लगभग प्रसामान्य कर देता है रूपान्तरित चर के बंटन का प्रत्याघित प्रसरण

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{(180)^2}{4\pi^2 n} = \frac{8208}{n} \quad \dots (22.3)$$

जबकि प्रत्येक प्रतिशत स्वतन्त्र प्रेक्षणों की बृहत् सख्या पर आधारित है। यदि रेडियन (radians) में नापा गया हो तो

$$\sigma_{\theta}^2 = \frac{1}{4n} \quad \dots (22.4)$$

यह ध्यान रहे कि माध्य की ज्ञात करने के लिए चापज्या द्वारा प्राप्त मान को फिर अनुपात में परिवर्तित करना होता है। जबकि $\sin^2 \theta = p$ यदि न्यास में प्रतिशत 30 और 70 के बीच विचरते हो तो चापज्या रूपान्तरण करने की आवश्यकता नहीं है।

उदाहरण 22.2 जैसा कि उदाहरण (22.1) में कहा गया है कि जड़ से पेड़ गिरने की सख्या को नमान आधार पर परिवर्तित करना चाहिए। अतः पहले पेड़ों के गिरने की सख्या का पेड़ों की सख्या के प्रतिशत के रूप में रच दिया क्योंकि प्रतिशत में दिये हुए न्यास के लिए चापज्या रूपान्तरण उपयुक्त होता है, प्रतिशतों को चापज्या में रूपान्तरित करने सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए प्रयोग में लाया जाता है।

तीनों पुनरावृत्तियों के लिए जड़ से पेड़ गिरने की प्रतिशत सख्या तथा तदनुसार चापज्या (कोणीय) मान निम्न सारणी में दिये गये हैं। चापज्या मान फिशर व येट्स द्वारा दी गई सारणी (परि० प-17) का प्रयोग करके लिखे गये हैं।

जट में पेह गिरने की प्रतिगत संख्या व चापग्या मान

प्रकारित संख्या	पुनरावृत्ति-1 (R ₁)		पुनरावृत्ति-2 (R ₂)		पुनरावृत्ति-3 (R ₃)	
	प्रतिशत	चापग्या मान	प्रतिशत	चापग्या मान	प्रतिशत	चापग्या मान
401	0.0	0.0	8.3	16.74	14.7	24.65
402	6.2	14.42	8.7	17.15	4.3	11.97
403	9.5	17.95	10.7	19.9	9.5	17.95
404	7.7	16.00	4.5	12.25	0.0	0.0
405	68.7	55.98	9.5	17.95	4.5	12.25
406	14.3	22.22	12.5	20.70	0.0	0.0
407	4.3	11.97	7.1	15.45	4.5	12.25
408	25.0	30.06	0.0	0.0	0.0	0.0
409	38.6	38.06	4.2	11.83	9.1	17.56
410	9.1	17.56	2.5	20.70	14.3	22.22

चापग्या मान को लेकर ही विनियमन किया जाता उचित है।

दुगुणम रूपान्तरण

बहुत सी दर सम्बन्धी घटुभूतियों में प्रेशण किट्टीं किरावों में इकाई समय के लिए या धा समय के प्रति घण के लिए होते हैं। जैसे एन बिदिवा उठते समय एन मिनिट में बितनी बार पत्र बजानी है, प्रात सुर्गी प्रति माम बितने घण्टे देनी है, एन घण्टे में एन निकली एन पून पर बितनी बार बेंडनी है इत्यादि। इस प्रकार के प्रेशणों को पात्र देवर पर प्रातिनित किया जाये तो वक्र प्रतिपरवलय (Hyperbola) के समरूप होता है। एन धरा X और Y में गणितीय सम्बन्ध $XY=C$ या $(a+BX)Y=1$ के अनुसार होता

है इस प्रकार $Y=C \cdot \frac{1}{X}$ या $X=C \cdot \frac{1}{Y}$ और $Y=\frac{1}{a+BX}$ या $a+BX=\frac{1}{Y}$

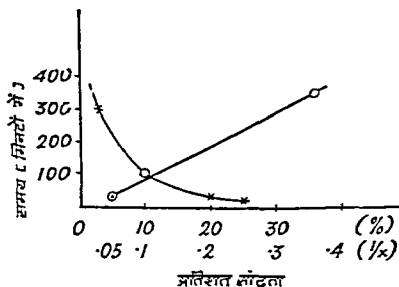
सम्बन्ध प्राप्त होते हैं। यदि धर Y का दुगुणम रूपान्तरण कर दें धर्या $\mu=\frac{1}{Y}$ मान लें

तो $X=C\mu$ या $a+BX=C\mu$ के रूप में सम्बन्ध प्राप्त हो जाते हैं जो कि रैखिक है। एन उर्युक्त रूपान्तरण द्वारा रैखीय समाधरण प्राप्त किया जा सकता है या इसके लिए किमी भी प्रकार का उर्युक्त विनियमन किया जा सकता है।

उदाहरण 22.3 : पैरामेसियम (paramcium) के संकुन विनामीतना को कम करने के लिए फार्मेन (formalin) का प्रभाव देखा गया। फार्मेन की सांद्रता तथा धर्यामोक्षता के समय विभिन्न प्रकार के —

पारमैलीन की मात्रा प्रतिशत (X)	प्रक्रियाशीलता का समय (Y) (मिनट में)	चर X का व्युत्क्रम रूपान्तरण (1/X)
3	300	33
10	100	10
20	30	05
25	15	04

यदि चर X और Y बिन्दुओं को घानेखित करके मिलामें तो चित्र का रूप घायता-कार प्रतिपरवलय जैसा होता है किन्तु X का (या Y का) व्युत्क्रम रूपान्तरण करने पर सम्बन्ध लगभग सरल रेखीय हो जाता है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



चित्र 22-1 व्युत्क्रम रूपान्तरण का चित्रीय निरूपण

प्रतिपरवलयिक ज्या व्युत्क्रम रूपान्तरण

किसी अभिकल्प में यदि उपचारों के माध्य और प्रसरण अनुपाती नहीं हो अर्थात् $\frac{s^2}{X}$ का मान लगभग समान न हो तो प्रसरणों को सजानीय बनाने के लिए पहले दिये गए रूपान्तरणों का प्रयोग हर स्थिति में उचित नहीं है जैसे कभी-कभी ऐसी स्थिति भी आती है कि अभिकल्प के किसी खण्डक में बृहत् माध्य के लिए लघु प्रसरण हो या लघु माध्य के लिए बृहत् प्रसरण हो तो इसके लिए प्रतिपरवलयिक ज्या व्युत्क्रम रूपान्तरण (\sinh^{-1}) उपयुक्त है। यदि एक खण्डक में एक उपचार के लिए एक ही प्रेक्षण दिया गया हो तो खण्डक के प्रसरण को प्रयोग में लाया जाता है। यदि एक खण्डक में एक उपचार के प्रति

कई प्रेक्षण प्राप्त किये हों तो अवशिष्ट माध्य वर्गों योग का प्रयोग किया जाता है। प्रसरण या माध्य वर्गों योग s^2 के सघुणनक अर्थात् $\log_e s^2$ का चर के माध्य \bar{X} के सघुणनक $\log_e \bar{X}$ पर समाश्रयण ज्ञात कर लिया जाता है। माना कि समाश्रयण गुणांक β है तो इस स्थिति में रूपान्तरण $(\sinh^{-1} \beta \sqrt{\bar{X}}) / \beta$ का प्रयोग करना चाहिए।

यदि प्रेक्षण गणना पर आधारित हों और भविष्य हो तो रूपान्तरण $(\sinh^{-1} \beta \sqrt{\bar{X} + \frac{1}{2}}) / \beta$ का प्रयोग करते हैं। इसके अनिश्चित यदि प्रसरण, माध्य के पदों में सम्बन्ध $(\bar{X} + \beta^2 \bar{X}^2)$ के रूप में दिया जा सकता हो तो β को सीधे इस सम्बन्ध द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं अर्थात् समाश्रयण गुणांक का परिकल्पन करने की आवश्यकता नहीं रहती है। इस प्रकार का रूपान्तरण न्यास के ऋणात्मक द्विपद बटित होने की स्थिति में उचित है। इस रूपान्तरण पर के बटा का प्रसरण 0.25 के समान होता है।

सांगिट रूपान्तरण

यदि किसी प्रयोग के स्वतन्त्र प्रेक्षण द्विपद अनुपात के रूप में हों और यह एक $(r \times C)$ त्रय की सारणी में दिये हों तो इनके लिए पापज्या रूपान्तरण सभी उपयुक्त है जबकि प्रेक्षणों की सख्या प्रत्येक गणना या समूह में लगभग समान हो। किन्तु ऐसी स्थिति में व्यवहार में बहुत कम पाई जाती है घन उस स्थिति में सांगिट रूपान्तरण उचित होता है। यह रूपान्तरण है,

$$\text{logit } X_{ij} = \log_e (P_{ij}/q_j) \quad \dots (22.5)$$

$$\text{जहाँ } P_{ij} = o_{ij}/n_{ij} \quad q_j = (1 - p_{ij})$$

फिशर का Z रूपान्तरण

इस रूपान्तरण का विवरण अध्याय (14) में दिया जा चुका है।

□ □ □

पिछले अध्याय में प्रयोग या सर्वेक्षण द्वारा किसी चर (कारक, उपचार या लक्षण) के प्रति सग्रहित न्याय का प्रसरण विश्लेषण अथवा आकलन करने की विधियाँ दी गई हैं। यदि इस चर पर किसी अन्य चर का प्रभाव न हो तो ये विधियाँ उपयुक्त हैं। इसी उद्देश्य से सजातीय सण्डकों की रचना पर जोर दिया गया और अन्य सभी कारकों (लक्षण) को नियंत्रित करने का प्रयत्न किया गया जो अध्ययन के हेतु लिए गये चर को प्रभावित करते हैं। कि तु कुछ ऐसे लक्षण (चर) होते हैं जिनका प्रयोग में नियंत्रण करना सम्भव नहीं होता है और यह प्रयोगगत एक्क के परिणामों को प्रभावित करते हैं अर्थात् एक्क को द्वारा प्राप्त परिणाम में केवल उपचार का प्रभाव न होकर, किसी अन्य चर का भी परिणाम सम्मिलित होता है। इस अन्य चर को सहवर्ती चर (concomitant variable) सहायक चर (ancillary variable) या सम्बद्ध चर (associated variable) कहते हैं। जैसे

(1) किसी प्रयोग द्वारा कई कीटनाशियों की क्षमता की तुलना करने के हेतु इन्हें अनेक प्रयोगगत एक्क पर निश्चित अभिकल्पना के अन्तर्गत प्रयुक्त किया जाता है। किन्तु हम जानते हैं कि प्रत्येक एक्क में विनाशिता केवल उस उपचार पर निर्भर नहीं होती है क्योंकि कीटा की प्रारम्भिक जनसंख्या अधिक होने पर मृत्यु-दर भी अधिक होती है। अतः प्रारम्भिक कीटा संख्या को सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग किया जाता है।

(2) यदि विभिन्न अध्यापन विधियों का तुलनात्मक प्रभाव जानना है तो यह विदित है कि शिक्षा लेने वालों के प्रारम्भिक ज्ञान का शिक्षा ग्रहण करने पर अधिक प्रभाव पड़ता है। अतः इस प्रारम्भिक ज्ञान को, किन्हीं अर्थों में मापकर, सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग करना होता है।

(3) यदि किसी प्रयोग में अनेक प्रकार के भोजनों का चूहों की भार वृद्धि के प्रति प्रभाव देखना हो तो उनके प्रारम्भिक भार की ओर ध्यान देना अत्यन्त आवश्यक है। यदि उनके प्रारम्भिक भारों में पर्याप्त अन्तर है तो निश्चित ज्ञान के पश्चात् अन्तिम भारों में अन्तर प्रारम्भिक भारों के अन्तर से प्रभावित होता है। अतः इस प्रयोग में प्रारम्भिक भारों का सहवर्ती चर के रूप में प्रयोग करना आवश्यक है। इसी प्रकार अनेक अन्य उदाहरण दिये जा सकते हैं। व्यवहार में अधिकतर अन्तिम प्रेक्षणों को Y-मानों से (चर Y) और सहवर्ती चर पर प्रेक्षणों को X-द्वारा निरूपित करते हैं।

सहवर्ती चर सम्बन्धी न्याय का प्रयोग करके अन्तिम मानों से सहवर्ती चर के प्रभाव का निरसन सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा किया जाता है जिससे कि प्रयोग त्रुटि कम हो जाती है। सहप्रसरण विधि इस दृष्टि से अत्यधिक उपयोगी है कि प्रायः कुछ विचरण-स्रोत जिनका प्रयोग विधि द्वारा नियंत्रण नहीं हो सकता है, उनके प्रभाव को सहवर्ती चर

पर प्रेक्षण लेकर, सहप्रसरण-विश्लेषण द्वारा दूर कर दिया जाता है। यह ध्यान प्रवण्य रखना चाहिए कि सहवर्ती चर दम प्रसार का होना चाहिए कि जिसका उपायों में कोई सम्बन्ध न हो।

सहप्रसरण विश्लेषण का सिद्धान्त

अध्यायों (13) व (21) में दो महत्वपूर्ण विधियों, जिनके नाम हैं समाश्रयण विश्लेषण और प्रसरण-विश्लेषण, का विधिपूर्वक वर्णन दिया गया है। सहप्रसरण विश्लेषण में इन दोनों विधियों को समन्वित किया गया है। समाश्रयण विश्लेषण में धातिल चर के वर्ग योग में से समाश्रयण के कारण वर्ग योग को घटाकर शेष वर्ग योग प्राप्त कर लेते हैं। इसी सिद्धान्त का सहप्रसरण विश्लेषण में प्रयोग करते हैं अर्थात् अन्तिम चर पर लिये गये प्रेक्षणों में से समाश्रयण द्वारा सहवर्ती चर के प्रभाव का निरसन कर दिया जाता है। इस प्रिया के हेतु प्रत्येक विचरण स्रोत के लिए सहघातों $\sum y_i^2$, $\sum x_i y_i$ व $\sum x_i^2$ का निरसन करना होता है।

जबकि छोटे प्रसार y_i व x_i अपने माध्य से विचलित प्रेक्षित मानों को निरूपित करते हैं। अनुसूचन 1, प्रेक्षणों की संख्या के अनुसार विचरण करता है। यह ज्ञात है कि समाश्रयण के कारण वर्ग-योग $(\sum x_i y_i)^2 / \sum x_i^2$ के समान होता है। इस सहघातों $\sum y_i^2$ में से

घटा देने पर सहवर्ती चर के प्रभाव से मुक्त वर्ग योग प्राप्त हो जाता है। इसके अतिरिक्त समाश्रयित चर Y' के लिए वर्ग योग की पूर्ण स्व० को० में से समाश्रयण के कारण 1 स्व० को० कम कर देते हैं। इसी सिद्धान्त का प्रयोग करके निम्न सहप्रसरण-विश्लेषण सारणी तैयार कर ली जाती है। यह सारणी किसी भी अभिव्यक्तता या वर्गीकरण के लिए तैयार की जा सकती है। अभिव्यक्तता या वर्गीकरण के अनुसार विचरण स्रोतों में अंतर करना होता है।

टिप्पणी - (1) उपर्युक्त विचरण में यह बख्यता की गई है कि चर Y तथा X में सम्बन्ध रैखिक है।

(2) यदि रैखिक सम्बन्ध न हो तो वक्र रेणीय समाश्रयण के प्रति सूत्रों का प्रयोग करके उपर्युक्त विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

(3) यदि अन्तिम चर को प्रभावित करने वाले चरों की संख्या दो हो तो चर Y में सहवर्ती चरों X_1 व X_2 के कारण समाश्रयण वर्ग-योग $(b_1 \sum x_{1i} y_i + b_2 \sum x_{2i} y_i)$ को $\sum y_i^2$ से घटाकर शेष वर्ग योग $(\sum y_i^2 - b_1 \sum x_{1i} y_i - b_2 \sum x_{2i} y_i)$ प्राप्त करते हैं।

यदि सहवर्ती चरों की संख्या दो से अधिक हो तो इसी सूत्र को और विस्तृत किया जा सकता है। जिनमें सहवर्ती चर होते हैं उतनी ही संख्या को समाश्रयित चर Y' के पूर्ण स्व० को० की कुल स्व० को० में से घटा दिया जाता है।

सहस्रतरण-विरलेषण सारणी की रूपरेखा
(सारणी 23.1)

विरण स्रोत	स्व. को०	$\sum_i x_i^2$	$\sum_i x_i y_i$	$\sum_i y_i^2$	स्व. को०	$\sum_i y_i'^2$	मा० व० य०	F-मान
A		A_{xx}	A_{xy}	A_{yy}		$R_{A+E} - S_{ee}$		
T		T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}		$S_{T+E} - S_{ee}$		
C		C_{xx}	C_{xy}	C_{yy}				
प्रयोग नुटि	f_0	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	f_0'	$E_{yy} - \frac{E_{xy}^2}{E_{xx}} = S_{ee}$		
	$(n-1)$				$(n-2)$			
समायोजित उपचारों के लिए (T+नुटि)		$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx}$	$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}$	$S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$		$S_{T+E} = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}$		
समायोजित A भाष्यो के लिए (A+नुटि)		$R_{xx} = A_{xx} + E_{xx}$	$R_{xy} = A_{xy} + E_{xy}$	$R_{yy} = A_{yy} + E_{yy}$		$R_{A+E} = R_{yy} - \frac{R_{xy}^2}{R_{xx}}$		

$$\text{जहाँ } \sum_i y_i'^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i x_i y_i)^2}{\sum_i x_i^2}$$

इसी प्रकार फारक A के लिए समायोजित व० य०

$\sum y_i^2$, संख्या $(S_{A+E} - S_{00})$ द्वारा परिवर्तित कर सकते हैं। अन्य विमी कारक के

लिए समायोजित व० य० ज्ञान करने की विधि यही रहती है।

माना कि प्रयोग या सर्वेक्षण द्वारा प्राप्त n युगल प्रेक्षण,

$$Y : Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

$$X : X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

हैं तो सम्बन्धों,

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}$$

$$\sum_i y_i^2 = \sum_i Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

सारणी में विचरण स्रोत अभिव्यक्तता या वर्गीकरण के अनुसार होते हैं। माध्य वर्ग-योग तथा F-मान सामान्य रूप में ज्ञान किये जाते हैं और विभिन्न कारकों या उपचारों के प्रति परिवर्तनात्मों के विषय में नियमानुसार निर्णय ले लिये जाते हैं।

सहप्रसरण के लिए सांख्यिकीय प्रतिरूप

अनेक सांख्यिकीय प्रतिरूप विभिन्न वर्गीकरण या अभिव्यक्तताओं के हेतु अध्याय 21 में दिये जा चुके हैं। सहप्रसरण की स्थिति में भी प्रतिरूप सगमग बनी रहना है। यहाँ एक पद प्रत्येक प्रतिरूप में सहवर्ती चर के लिए और बढ़ा दिया जाता है। इन प्रतिरूपों में अध्याय 21 की तुलना में इतना ही अंतर किया गया है कि X के स्थान पर अनिम्न चर के लिए सन्वेतन Y का प्रयोग किया गया है और सन्वेतन X, सहवर्ती चर के लिए लिया गया है।

पूर्ण माहच्छिदीकृत अभिव्यक्तता के लिए सहप्रसरण में सांख्यिकीय प्रतिरूप निम्न हैं:—

$$Y_{ij} = \mu + T_i + CX_{ij} + e_{ij} \quad \dots (23.1)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, r$$

माहच्छिदीकृत पूर्ण सहप्रसरण अभिव्यक्तता के लिए प्रतिरूप निम्न है:—

$$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + CX_{ij} + e_{ij} \quad \dots (23.2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, r$$

लेटिन वर्ग अभिव्यक्तियों के लिए प्रतिरूप,

$$Y_{ij} = \mu + T_i + \beta_j + \rho_i + CX_{ij} + e_{ij} \quad \dots (23.3)$$

है। इसी प्रकार अन्य किसी भी अभिव्यक्तियों के हेतु प्रतिरूप दिया जा सकता है। जैसा कि पहले दिया जा चुका है कि महप्रसरण विश्लेषण का प्रयोग किसी भी अभिव्यक्तियों की स्थिति में यदि आवश्यकता हो तो किया जा सकता है। नारणी (23.1) में दिखाया गया है कि किसी भी कारक या उपचार के लिए समायोजित वर्ग-योग, $\sum y_i'^2$, (वाक्य-1)

त्रुटि के लिए $\sum y_i'^2$ में से, त्रुटि के $\sum y_i'^2$ को घटाकर ज्ञात किये जाते हैं।

माध्य त्रुटि समाश्रयण गुणांक C का आवलित मान,

$$C = E_{xy} / E_{xx} \quad \dots (23.4)$$

1वें उपचार का समायोजित माध्य,

$$\bar{Y}_i' = \frac{T_{i.}}{r_i} - C \left(\frac{T_{i.}}{r_i} - \bar{X} \right) \quad \dots (23.5)$$

जबकि 1वें उपचार का प्रभाव $T_{i.}$ है और तदनुसार X चर पर 1वें उपचार के लिए मान $T_{i.}$ है। r_i , 1वें उपचार की पुनरावृत्ति संख्या है और C समाश्रयण गुणांक है जिसको सूत्र (23.4) द्वारा ज्ञात किया जाता है। \bar{X} , समस्त X मानों का माध्य है। प्रतिरूप (23.2) व (23.3) में सब उपचारों की पुनरावृत्ति-संख्या समान होती है।

किसी एक समायोजित उपचार माध्य \bar{Y}_i' (जबकि $\bar{Y}_i' = \bar{Y} - C(\bar{X}_i - \bar{X})$) का प्रसरण निम्न है —

$$v(\bar{Y}_i') = \frac{S_{ee}}{f_e'} \left\{ \frac{1}{r_i} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X})^2}{E_{xx}} \right\} \quad \dots (23.6)$$

दो समायोजित माध्यों में अन्तर को निम्न रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं:—

$$(\bar{Y}_i' - \bar{Y}_j') = (\bar{Y}_i - \bar{Y}_j) - C(\bar{X}_i - \bar{X}_j) \quad \dots (23.7)$$

जबकि $i \neq j$

दो समायोजित माध्यों में अन्तर का प्रसरण,

$$v(\bar{Y}_i' - \bar{Y}_j') = \frac{S_{ee}}{f_e'} \left\{ \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} + \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_j)^2}{E_{xx}} \right\} \quad \dots (23.8)$$

है। जबकि S_{ee} समायोजित त्रुटि वर्ग योग है

r_i व r_j , 1वें और j वें उपचार की क्रमशः पुनरावृत्ति संख्याएँ हैं। E_{xx} चर X के लिए त्रुटि वर्ग योग है। अतः किन्हीं दो उपचार माध्यों की समानता के प्रति निराकरणपरिणाम परिकल्पना की परीक्षा करने में महप्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि सूत्र (23.8) द्वारा प्राप्त मान के वर्गमूल के समान होती है। किन्तु सब

सम्भव युगल माध्यों में अन्तर के लिए सूत्र (23 8) द्वारा पृथक् पृथक् प्रसरण ज्ञात करना कठिन गणना है। अतः इन प्रसरणों के माध्य प्रसरण को सब युगल माध्यों में अन्तर के प्रसरण के लिए प्रयोग किया जाना पर्याप्त है। इस माध्य प्रसरण को निम्न सूत्र द्वारा सीधे परिकलित कर सकते हैं। इस माध्य प्रसरण की वर्गमूल लेकर माध्यों में अन्तर की मानक त्रुटि ज्ञात हो जाती है।

घन मानक त्रुटि,

$$V (md) = \frac{2S_{xx}}{f_0' r} \left(1 + \frac{1}{k-1} \frac{T_{xx}}{E_{xx}} \right) \quad (23 9)$$

$$SE (md) = \sqrt{\frac{2S_{xx}}{f_0' r} \left(1 + \frac{1}{k-1} \frac{T_{xx}}{E_{xx}} \right)} \quad \dots(23 9 1)$$

उदाहरण 23 I बाजरे की उपज पर 25 उपचारों का प्रभाव जानने के हेतु प्रयोग किया गया। माटृच्छिद्रीकृत पूर्ण खण्डक अभिव्यक्त्या के प्रयोग विन्यास किया गया। साथ ही यह विचार था कि प्रति भूखण्ड में पौधों की संख्या (plant population per plot) का उपज पर प्रभाव पड़ता है। अतः प्रत्येक भूखण्ड में पौधों की संख्या की गणना की गई। 25 उपचारों के लिए और 4 पुनरावृत्तियों के निम्न प्रेषण प्राप्त हुए। प्रायेण भूखण्ड का क्षेत्र = 8मी० × 4 मी०

पर Y = प्रति भूखण्ड उपज (किलोग्राम)

पर X = प्रति भूखण्ड पौधों की संख्या

उपचार संख्या	पुनरावृत्तियाँ								योग	
	R ₁		R ₂		R ₃		R ₄		X	Y
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y		
1	541	2.46	278	3.49	246	3.08	227	3.74	1292	12.77
2	517	4.47	235	3.36	258	3.80	152	3.59	1162	15.22
3	408	3.41	201	3.46	257	4.11	174	2.96	1040	13.94
4	458	2.26	296	3.80	264	3.72	187	3.93	1205	13.71
5	460	2.69	287	2.79	269	4.25	132	3.03	1148	12.76
6	220	3.46	184	2.79	152	3.81	118	2.44	674	11.50
7	304	4.05	305	3.58	177	3.53	174	2.73	960	13.89
8	228	2.88	226	3.17	153	2.91	124	1.92	731	10.88
9	236	4.06	286	3.29	162	3.82	133	1.93	817	13.10
10	235	3.56	185	2.77	176	3.51	175	3.23	771	13.07
11	252	2.85	257	4.19	301	4.30	181	3.06	991	14.40
12	308	3.43	227	4.08	312	3.29	151	3.07	998	18.86
13	204	3.37	247	3.49	253	4.03	138	2.98	842	13.87

14	281	4 20	183	3 16	311	3 72	115	2 05	790	13 13
15	292	3 48	255	3 65	307	4 06	172	3 25	1026	14 44
16	316	2 70	259	2 50	258	4 00	179	3 68	1012	12 88
17	487	4 31	323	3 26	281	5 01	221	3 66	1312	16 24
18	254	3 24	241	3 39	246	4 28	180	3 73	921	14 64
19	475	3 39	272	3 25	227	3 96	151	2 66	1125	3 26
20	265	3 52	277	3 05	178	2 84	133	3 25	853	12 67
21	362	2 97	282	3 11	203	3 37	123	3 04	970	12 49
22	471	3 13	279	2 57	254	4 05	124	2 80	1128	12 55
23.	385	2 22	237	2 47	219	4 46	204	3 60	1041	12 75
24	457	2 92	244	3 26	214	3 94	191	3 53	1106	13 65
25	522	3 08	246	2 63	204	4 00	201	3 72	1173	13 43

योग 8938 82 11 6308 80 57 5882 95 85 4060 77 57 25188 33 10

उपचारों में अंतर की मापकता-परीक्षा, सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा निम्न प्रकार कर सकते हैं।

सहप्रसरण विश्लेषण करने के लिए मारणी (23 1) के अनुसार निम्न सख्याओं का परिकलन करना होता है—

चर X के लिए,

$$\text{संका०} = \frac{(25188)^2}{100}$$

$$= 6344353 4$$

$$\text{पूर्ण व० य०} = (541^2 + 517^2 + \dots + 191^2 + 201^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 905998 6$$

$$\text{उपचार व० य०} = \frac{1}{4} (1292^2 + 1162^2 + \dots + 1106^2 + 1173^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 170177 1$$

$$\text{पुनरावृत्ति व० य०} = \frac{1}{25} (8938^2 + 6308^2 + 5882^2 + 4060^2) - \text{सं० का०}$$

$$= 486055 9$$

$$\text{त्रुटि व० य०} = 249765 6$$

चर Y के लिए,

$$\text{सं० का०} = \frac{(336 10)}{100}$$

$$= 11296$$

$$\text{पूर्ण व०य०} = (246^2 + 447^2 + \dots + 353^2 + 372^2) - \text{स० व०}$$

$$= 3572$$

$$\text{उपचार व०य०} = \frac{1}{2}(1277^2 + 1522^2 + \dots + 1365^2 + 1343^2) - \text{स० व०}$$

$$= 678$$

$$\text{गुनराश्रुति व०य०} = \frac{1}{25}(8211^2 + 8057^2 + 9585^2 + 7775^2) - \text{स० व०}$$

$$= 789$$

$$\text{त्रुटि व०य०} = 2106$$

अब XY के लिए,

$$\text{स० व०} = \frac{25188 \times 33610}{100}$$

$$= 8465687$$

$$\text{पूर्ण गुणनफल योग} = (541 \times 246 + 517 \times 447 + \dots + 191 \times 353 + 201 \times 372) - \text{स० व०}$$

$$= 54126$$

$$\text{उपचार गुणनफल योग} = \frac{1}{2}(1292 \times 1277 + 1162 \times 1522 + \dots + 1106 \times 1365 + 1173 \times 1343) - \text{स० व०}$$

$$= 48574$$

$$\text{गुनराश्रुति गुणनफल योग} = (8938 \times 8211 + 6308 \times 8057 + 6882 \times 9585 + 4060 \times 7775) - \text{स० व०}$$

$$= 17747$$

$$\text{त्रुटि व०य०} = -12195$$

समाप्तोक्ति वगैरे योग $\sum y_i^2$ निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं :-

$$\text{त्रुटि व०य०} = E_{yy} - \frac{E_y^2}{E_{xx}}$$

$$= 2106 - \frac{(-12195)^2}{24976360}$$

$$= 2106 - 059$$

$$= 2100$$

यदि पुनरावृत्तियों में अधिक अनिश्चि हो तो, उनके लिए भी मान इसी प्रकार प्राप्त कर सकते हैं अतः सहस्ररण विश्लेषण सारणी बनाई :—

विवरण स्रोत	स्व. शो.	स्व. शो.				मा.स.स. F-मान		
		$\sum x_i^2$	$\sum x_i y_i$	$\sum y_i^2$	$\sum y_i'^2$			
पुनरावृत्ति	3	486055.9	177.47	7.89	3	7.90	2.76	9.32**
उपचार	24	170177.1	485.74	6.78	24	6.52	0.271	0.916
त्रुटि	72	249765.9	-121.95	21.06	71	21.00	0.296	
पूर्णा	99	905998.6	541.26	35.72	98	35.42		
उपचार + त्रुटि	96	419943.0	363.79	27.84	95	27.52		
पुनरावृत्ति + त्रुटि	75	735821.8	55.52	28.95	74	28.90		

** $\alpha = 0.01$ पर पुनरावृत्तियों में सार्थक अन्तर है।

$$\begin{aligned} (\text{उपचार + त्रुटि}) \text{ के लिए } \sum y_i'^2 &= 27.84 - \frac{(363.79)^2}{419943.0} \\ &= 27.84 - .32 \\ &= 27.52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उपचार के लिए } \sum y_i'^2 &= 27.52 - 21.00 \\ &= 6.52 \end{aligned}$$

सहस्ररण सारणी द्वारा प्राप्त उपचारों के लिए F का मान 1 से कम है अतः इसके निष्कर्ष निकलता है कि उपचारों में कोई सार्थक अन्तर नहीं है। पुनरावृत्तियों के लिए वर्ग योग, उपचारों के लिए वर्ग योगों की भाँति ही परिकल्पित किये गये हैं।

सूत्र (23.4) द्वारा,

$$\begin{aligned} C &= \frac{E_{xy}}{E_{xx}} \\ &= -\frac{121.95}{249765.9} \\ &= -.00049 \\ \bar{X} &= 251.88 \end{aligned}$$

क्रमांक	Y_1	X_1	$(X_1 - \bar{X})$	$C(X_1 - \bar{X})$	समन्वित मान
संख्या					$\bar{Y}_1 - \bar{Y}_1 - C(X_1 - \bar{X})$
1.	3.19	323.00	71.12	-0.35	3.225
2.	3.81	290.50	38.62	-0.19	3.829
3.	3.48	260.00	8.12	-0.04	3.484
4.	3.43	301.25	49.37	-0.24	3.454
5.	3.19	287.00	35.12	-0.17	3.207
6.	3.13	168.50	-83.38	+0.41	3.089
7.	3.47	240.00	-11.88	+0.06	3.464
8.	2.72	182.75	-69.13	0.34	2.686
9.	3.28	204.25	-47.63	0.23	3.257
10.	3.27	192.75	-59.13	0.29	3.241
11.	3.60	247.75	-4.13	0.02	3.588
12.	3.46	249.50	-2.38	0.01	3.459
13.	3.47	210.50	-41.38	0.20	3.450
14.	3.28	222.50	-29.38	0.14	3.276
15.	3.61	256.50	4.62	0.02	4.608
16.	3.22	253.00	1.12	0.01	3.219
17.	4.06	328.00	76.12	-0.37	4.097
18.	3.66	230.25	-21.63	0.11	3.649
19.	3.32	281.25	29.37	-0.14	3.334
20.	3.17	213.25	-38.63	0.19	3.151
21.	3.12	242.50	-9.38	0.05	3.115
22.	3.14	282.00	30.12	-0.15	3.155
23.	3.19	260.25	8.37	-0.04	3.194
24.	3.41	276.50	24.62	0.12	3.398
25.	3.36	293.25	41.37	0.20	3.340

सूत्र (23.9.12) द्वारा उपचारों के अन्तर की मानक त्रुटि

$$S.E. (md) = \sqrt{2 \times \frac{0.296}{4} \left(1 + \frac{1}{24} \times \frac{1701771}{2497656} \right)}$$

$$\begin{aligned} S.E. (md) &= \sqrt{0.148(1+0.0283)} \\ &= \sqrt{0.152188} \\ &= 0.39 \end{aligned}$$

यहाँ माध्यों के युग्म बनाकर तुलना करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि F-परीक्षा द्वारा उपचार माध्यों में अन्तर निरर्थक सिद्ध हुआ है।

अप्राप्त प्रेक्षण मानों की स्थिति में सहप्रसरण विश्लेषण

एक अप्राप्त मान की स्थिति में, इसका आकलन करके प्रसरण-विश्लेषण करने की विधि का वर्णन अध्याय 21 में किया गया है, यदि दो या दो से अधिक मान अप्राप्त हों तो उनका आकलन करके प्रसरण विश्लेषण करने की कुछ अन्य विधियाँ भी उपलब्ध हैं। किन्तु बार्टलेट (Bartlett) ने सहप्रसरण विश्लेषण का प्रयोग करके अप्राप्त मान होने की स्थिति में विश्लेषण की एक उत्तम विधि को दिया। इस विधि के अन्तर्गत सहवर्ती चर, जिस कभी-कभी मूक सहवर्ती चर (dummy variate) भी कहते हैं, को मानना होता है। प्रयोग अभिकल्पना में समस्त विद्यमान प्रेक्षणों से सम्बद्ध सहवर्ती चर को शून्य (0) मान लिया जाता है और अप्राप्त मानों के तदनुसार सहवर्ती चर को एक (1) मान लिया जाता है। अप्राप्त मानों के स्थान पर शून्य रख दिया जाता है और फिर सामान्य रूप में Y वा X_1, X_2, \dots पर सहप्रसरण विश्लेषण कर लिया जाता है और समायोजित वर्ग योग बहुचर समाश्रयण द्वारा जान कर लिये जाते हैं। कुछ व्यक्ति अप्राप्त मानों से सम्बद्ध सहवर्ती चर का -1 भी मानते हैं क्योंकि यह परिवर्तन की दृष्टि से सुगम है।

केवल एक अप्राप्त मान की स्थिति में, इसका आकलित मान,

$$\hat{X} = Y_0 - CX_0 = -C = \frac{-E_{xy}}{E_{xx}} \quad \dots (23.10)$$

क्योंकि $Y_0=0$ और $X_0=1$

अप्राप्त मान का (23.10) द्वारा प्राप्त आकलित मान वही है जो कि अध्याय 21 में दिये गये सूत्रों द्वारा प्राप्त होता है। इनके साथ-साथ सहप्रसरण विश्लेषण द्वारा प्राप्त त्रुटि माध्य वर्ग योग और अप्राप्त मानों के आकलित मानों का प्रयोग करके प्रसरण विश्लेषण के अन्तर्गत प्राप्त त्रुटि माध्य वर्ग योग अमान होने हैं। सहप्रसरण विश्लेषण की सहायता में प्रसरण विश्लेषण एवं अप्राप्त मानों का आकलन करने की विधि को स्पष्ट करने के हेतु उदाहरण (21.7) में दिये गये प्रयोग के आधारों की एक अप्राप्त मान लेकर यहाँ पुनः प्रस्तुत किया गया है।

उदाहरण 23.2 :

स्तम्भ

	A 42	B 38	C 50	D 46
पंक्ति	C 46	D 42	A 42	B 42
	D 46	C *	B 42	A 46
	B 38	A 54	D 38	C 46

उपर्युक्त न्यास का विश्लेषण निम्न प्रकार से कर सकत हैं —

जैसा कि पिछले सखंड में दिया गया है कि एक अज्ञान मान की स्थिति में मूक सहवर्ती घर लेकर सहप्रसरण की सहायता से अज्ञान मान का आकलन तथा उपचारों के प्रति परीक्षा कर सकते हैं। अतः उपर्युक्त न्यास सहवर्ती घर के महित निम्न रूप में लिख सकते हैं —

	Y		X		Y		X		योग	
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X
A	42	0	B 38	0	C 50	0	D 46	0	176	0
C	46	0	D 42	0	A 42	0	B 42	0	172	0
D	46	0	C 0	1	B 42	0	A 46	0	134	1
B	38	0	A 54	0	D 38	0	C 46	0	176	0
योग	172	0	134	1	172	0	180	0	658	1

उपचारों के योग,

$$\begin{aligned}
 & Y \quad X \\
 A &= 184 \quad 0 \\
 B &= 160 \quad 0 \\
 C &= 142 \quad 1 \\
 D &= 172 \quad 0
 \end{aligned}$$

घर XY के लिए;

पूर्ण गुणनफल-योग,

$$\begin{aligned}
 &= (42 \times 0 + 46 \times 0 + \dots \dots 46 \times 0 + 46 \times 0) - \frac{658 \times 1}{16} \\
 &= -41.125
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पक्ति गुणनफल-योग} &= \frac{1}{4} (176 \times 0 + 172 \times 0 + 134 \times 1 + 176 \times 0) \\
 &\quad - \frac{658 \times 1}{16} \\
 &= 335 - 41125 \\
 &= -7625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{स्तम्भ गुणनफल-योग} \\
 &= \frac{1}{4} (172 \times 0 + 134 \times 1 + 172 \times 0 + 180 \times 0) - \frac{658 \times 1}{16} \\
 &= 335 - 41125 \\
 &= -7625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{उपचार गुणनफल-योग} \\
 &= \frac{1}{4} (184 \times 0 + 160 \times 0 + 142 \times 1 + 172 \times 0) - \frac{658 \times 1}{16} \\
 &= 355 - 41125 \\
 &= -5625
 \end{aligned}$$

इसी प्रकार घर X के लिए,

$$\text{पूर्ण व० य०} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\text{पक्ति व० य०} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\text{स्तम्भ व० य०} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

घर Y के लिए,

$$\text{स० का०} = 2706025$$

$$\begin{aligned}
 \text{पूर्ण व० य०} &= (42^2 + 46^2 + \dots + 46^2 + 46^2) - \text{स० का०} \\
 &= 291480 - 2706025 \\
 &= 208775
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पक्ति व० य०} &= \frac{1}{4} (176^2 + 172^2 + 134^2 + 176^2) - \text{स० का०} \\
 &= 2737300 - 2706025 \\
 &= 31275
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{स्तम्भ व० य०} &= \frac{1}{4} (172^2 + 134^2 + 172^2 + 180^2) - \text{स० का०} \\
 &= 2738100 - 2706025 = 32075
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{उपचार व० य०} &= \frac{1}{4} (184^2 + 160^2 + 142^2 + 172^2) - \text{स० का०} \\
 &= 2730100 - 2706025 \\
 &= 24075
 \end{aligned}$$

(4 × 4) सदिश वर्ग के लिए सदृशप्रसरण विश्लेषण सारणी

विवरण श्रेणियाँ (i)	सं. शो. k (ii)	$\sum x_i^2$ (iii)	$\sum x_i y_i$ (iv)	$\sum y_i^2$ (v)	सं. शो. (vi)	$\sum y_i'^2$ (vii)	सांख्यिक (viii)	F-मान (ix)
बकि	3	3/16	-7.625	312.75	3			
लाम्ब	3	3/16	-7.625	320.75	3			
उपचार	3	3/16	-5.625	240.75	3	143.00	47.66	1.98
मुट	6	6/16	-20.250	1213.75	5	120.25	24.05	
मूल	15	15/16	-41.125	2087.75	14			
उपचार + मुट	9	9/16	-25.875	1454.50	8	263.25		

$$S_x'^2 = 1213.75 - \frac{(-20.25)^2}{.375}$$

$$= 1213.75 - 1093.50$$

$$= 120.25$$

(उपचार + द्रुति) के लिए,

$$\sum y_i'^2 = 1454.50 - \frac{(-25.875)^2}{5625}$$

$$= 1454.50 - 1190.25$$

$$= 263.25$$

उपचार-समायोजित व० य० = 263.25 - 120.25 = 143.00 सारणी (परि० च-52) द्वारा $\alpha = .05$ और (3, 6) स्व० स० के लिए F का मान उपचारा के लिए F के परिवर्तित मान से अधिक है।

अतः हमसे यह निष्कर्ष निकलता है कि उपचारों में कोई साधक अन्तर नहीं है।

सूत्र (23.10) द्वारा अप्रप्त मान या आकलित मान,

$$\hat{X} = - \frac{(-20.25)}{6/16}$$

$$= \frac{324}{6}$$

$$= 54.00$$

यहाँ युग्म उपचार माध्यों में साधकता-परीक्षा करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि F-परीक्षा द्वारा उपचारों में अन्तर निरर्थक सिद्ध हुआ है।

दो मिश्रित प्रेक्षणों की स्थिति में सहप्रसरण विश्लेषण

कभी-कभी द्रुति संबंधी प्रयोगों में यह कठिनाई सामने आती है कि किन्हीं दो निकटवर्ती क्षेत्रों की उपज प्राप्त में मिल गई हो। इस स्थिति में दोनों भूखण्डों (एकको) की कुल उपज तो जान होती है किन्तु उनका अलग-अलग मान जानना सम्भव नहीं है। अतः इस स्थिति में सांख्यिकीय विश्लेषण करने में सहप्रसरण विश्लेषण अत्यन्त सहायक है। इसकी विधि इस प्रकार है :—

दोनों क्षेत्रों की सम्मिलित उपज को स्वेच्छा में दो भागों में विभाजित करके प्रति-स्थापित कर देते हैं। इन स्वेच्छ मानों में एक आधे से कम और दूसरा आधे से अधिक होता है अर्थात् कुल मान का आधा मान नहीं लेना चाहिये। फिर इन दो भूखण्डों (प्रयोग-गत एकको) के लिए मूक सहवर्ती चर (dummy covariables) के मान 1 और -1 तथा अन्य भूखण्डों के लिए मूक-सहवर्ती चर 0 मान लिये जाते हैं। फिर सामान्य रूप से सह-प्रसरण विश्लेषण करते हैं और मिश्रित मांगों के पृथक्-पृथक् आकलित मान प्राप्त कर लिए जाते हैं।

सारांश

महप्रसरण विश्लेषण निम्नी उपचारों के प्रभाव से अन्य किसी सहचर का प्रभाव दूर करने तथा विश्वसनीय सार्थकता परीक्षा करने में अत्यन्त उपयोगी है। उन सब परिस्थितियों का बताना तो असम्भव है जिनमें महप्रसरण का प्रयोग किया जा सकता है किन्तु स्वयं के विचार में कोई भी स्थिति, जो दिख हुए सिद्धता के अनुकूल है सहप्रसरण विश्लेषण के लिए उपयुक्त है। प्रसरण विश्लेषण की अपेक्षा, सहप्रसरण विश्लेषण क्रिया विधि में कठिन है अतः अनावश्यक रूप से इसका प्रयोग अनुचित है अर्थात् नहीं करना चाहिये।

प्रश्नावली

- 1 महप्रसरण विश्लेषण का विवेचन कीजिये।
- 2 किसी महप्रसरण विश्लेषण में किन कल्पनाओं को करना होता है? परिणामों का निर्वन्धन करने में किन किन बातों का विचार करना चाहिये?
- 3 कुछ ऐसी स्थितियों का विवेचन कीजिये जिनमें उपचारों या बारकों में सार्थकता-परीक्षा के लिए सहचरों चर का लेना आवश्यक हो।
- 4 मूक सहचरों चर की कब आवश्यकता होती है और इन्हे विभिन्न स्थितियों में किस प्रकार माना जाता है?
- 5 बाजरे की प्रजाति (k-16) की उपज पर तीन शावनाशियों (herbicides), (H₁, H₂, H₃) का प्रभाव चार विभिन्न समयों (t₁, t₂, t₃, t₄) पर जानने के लिए प्रयोग किया गया। प्रयोग का दार्ढ्य-छकीकृत खण्डक अभिकल्पना में विन्यास किया गया और इसमें दो खण्डकों को लिया गया। प्रत्येक खण्डक में 12 उपचार-समय तथा एक नियंत्रण भूखण्ड को लिया गया क्योंकि खरपतवार (weeds) की सख्या का उपज पर प्रभाव पड़ता है, पटाई के समय इनकी प्रत्येक भूखण्ड में प्रति वर्ग मीटर सख्या के प्रति भी प्रेक्षण लिये गए जिनको सहचरों चर के रूप में प्रयोग किया गया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त उपज (Y) किलो प्रति हेक्टर तथा खर-पतवार की सख्या (X) निम्न प्रकार थी —

उपचार	R ₁		R ₂	
	Y	X	Y	X
H ₁ t ₁	310.34	1.87	743.96	2.44
H ₁ t ₂	536.34	3.53	415.23	2.54
H ₁ t ₃	730.99	3.53	147.06	2.44
H ₁ t ₄	562.30	2.91	582.84	2.44
H ₂ t ₁	564.46	1.73	689.90	2.34
H ₂ t ₂	497.42	3.24	598.82	1.58
H ₂ t ₃	497.42	3.24	699.63	0.70
H ₂ t ₄	329.81	1.41	629.34	3.46
H ₃ t ₁	515.80	2.34	595.82	3.16
H ₃ t ₂	310.34	2.73	966.72	2.73
H ₃ t ₃	520.12	2.84	610.96	1.58
H ₃ t ₄	669.35	2.00	471.46	2.44
H ₃ t ₄	512.55	1.58	192.48	4.12
नियंत्रण	216.27	4.63		

उपर्युक्त न्यास का विश्लेषण करके, परिणामों का निर्वचन कीजिये। (प्रश्न 5 का न्यास श्री एम० के० माथुर, राज० वृषि महाविद्यालय, उदमपुर, के मौखिक में प्राप्त हुआ)।

- 6 उपचारों का प्रभाव जानने के लिए एक प्रयोग को यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना में चार खण्डक लेकर व्यवस्थित किया गया। प्रत्येक उपचार के लिए प्रति हैक्टर उपज का आर्थिक मान ज्ञात किया गया। किन्तु कटाई के समय दो त्रिहटवर्ती भूखण्डों की उपज मिल गई थी अतः इन दो भूखण्डों का सम्मिलित आर्थिक मान ही ज्ञात किया। इस प्रयोग द्वारा प्राप्त आर्थिक मान निम्न सारणी के अनुसार थे —

उपज का आर्थिक मान (रुपयों में)

उपचार क्रमांक	खण्डक			
	1	2	3	4
1.	273 08	600 35	407 66	505 84
2	439 45	341 25	466 15	535 15
3	585 43	128 02	537 31	357 05
4	462 81	502 11	427 07	583 16
5.	457 72	539 26	460 32	490 54
6	401 17	1012 66	390 25	615 43
7.	272.76		662 52	555 04
8	419 61	512 87	369 48	392.19
9	266 60	523 52	446 48	411 44
10	422 41	764 60	496 32	486 16
11.	558 34	494 44	449 07	416 63
12	417 49	397 27	325 96	427 79
13.	205 45	183 50	123 42	416 15

उचित मूल महत्वों पर का प्रयोग करके उपर्युक्त न्यास का सहप्रसरण विश्लेषण कीजिये और उपचारों के प्रभाव की मार्पकता परीक्षा कीजिये।

परिशिष्ट-क

घाट्यूह सिद्धान्त का परिचय

यदी घाट्यूह सिद्धान्त का वर्णन शोध में दिया गया है। अधिकतर स्थितियों में जो भी प्रमेय दिये गये हैं उनको सिद्ध नहीं किया गया है। साथ ही वर्णन करते समय घाट्यूह का तात्त्विक रूप की भी प्रयोग किया है।

परिभाषा

संज्ञा a_{ij} के आयताकार विन्यास को घाट्यूह कहते हैं। यदि आयताकार विन्यास में m पंक्ति हो और n स्तम्भ हो तो घाट्यूह $(m \times n)$ विमिति का कहलाता है। माना कि घाट्यूह 'A' द्वारा निरूपित किया गया हो तो,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv ((a_{ij}))$$

जहाँ $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$

टिप्पणी : संज्ञा a_{ij} में अनुक्रम i उस पंक्ति संख्या और j उस स्तम्भ संख्या को निरूपित करते हैं जिसमें यह स्थित है।

घाट्यूह के कुछ गुण

(क-1) यदि घाट्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या के समान हो, अर्थात् $m = n$ तो इसे वर्ग घाट्यूह कहते हैं।

(क-2) यदि घाट्यूह में (i, j) वां घन बराबर हो जो (j, i) वां घन है, अर्थात् $a_{ij} = a_{ji}$ हो तो इसे सममित (symmetric) घाट्यूह कहते हैं।

(क-3) यदि घाट्यूह में $a_{ij} = -a_{ji}$ हो तो इसे असममित (asymmetric) घाट्यूह कहते हैं।

(क-4) यदि घाट्यूह A की विमिति $(m \times 1)$ हो तो इसे स्तम्भ वेक्टर (column vector) कहते हैं और $(1 \times n)$ में ता इसे पंक्ति वेक्टर कहते हैं। प्रायः स्तम्भ वेक्टर को \underline{u} और पंक्ति वेक्टर को \underline{v} से निरूपित करते हैं।

$$\underline{a}' = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \underline{a} = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$$

(क-5) यदि आव्यूह को एक अदिश राशि (scalar quantity) c से गुणा कर दें तो आव्यूह का प्रत्येक अंश c से गुणा हो जाता है। माना $cA = B$ तो B का प्रत्येक अंश $b_j = c a_j$ माथ ही $C \times A = A \times C = B$

(क-6) दो आव्यूह A और B समान कहलाते हैं जब कि दोनों की विभिति एक समान हो और प्रत्येक (i, j) के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

(क-7) एक वर्ग आव्यूह A जिसमें विकर्ण के अंशों के प्रतिरिक्त अन्य अंश शून्य हों विकर्ण आव्यूह कहलाता है।

(क-8) यदि एक विकर्ण आव्यूह में विकर्ण का प्रत्येक अंश 1 हो तो इस आव्यूह को ऐकिक आव्यूह कहते हैं और इसे I से सूचित करते हैं।

(क-9) एक आव्यूह A जिसके सब अंश शून्य व समान हों उसे शून्य आव्यूह (null matrix) कहते हैं और इसे (0) से निरूपित करते हैं।

आव्यूहों पर कुछ क्रियाएँ

(क-10) यदि आव्यूह A में पंक्तियों को स्तम्भों के रूप में और स्तम्भों को पंक्तियों के रूप में लिख दें अर्थात् $a'_{ij} = a_{ji}$ तो प्राप्त आव्यूह को A का परिवर्त (transpose) आव्यूह कहते हैं और इसे A' से निरूपित करते हैं, यदि A की विभिति $(m \times n)$ है तो A' की विभिति $(n \times m)$ हो जाती है जैसे,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad (3 \times 2)$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \quad (2 \times 3)$$

(क-11) दो आव्यूह A तथा B तभी जोड़े जा सकते हैं जब कि A और B की विभिति समान हो और यदि $A = ((a_{ij}))$, $B = ((b_{ij}))$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (m \times n) & (m \times n) \end{matrix} \\ \text{तो } (A+B) &= ((a_{ij} + b_{ij})) \\ & \begin{matrix} m \times n \end{matrix} \\ (A+B)' &= A' + B' \end{aligned}$$

(क-12) दो घाब्यूह A तथा B का गुणनफल AB तभी सम्भव है जब कि पूर्व गुणन (Pre-multiplying) घाब्यूह A में स्तम्भों की संख्या उत्तर गुणन (Post-multiplying) घाब्यूह B में पक्तियों की संख्या के समान हो। यदि A व B के विभिति क्रमशः $(m \times n)$ और $(n \times p)$ हो तो घाब्यूह AB की विभिति $(m \times p)$ होगी।

माना $AB = C = (C_{ij})$, तो

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

यदि A का B से गुणा AB हो सकता है तो यह आवश्यक नहीं है कि B का A से गुणा BA भी सम्भव हो।

गुणनफल AB तथा BA यदि दोनों सम्भव हों तो आवश्यक नहीं कि वे समान हों।

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad (4 \times 3); \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \quad (3 \times 2)$$

तो

$$AB = \begin{bmatrix} (a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}) & (a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32}) \\ (a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31}) & (a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32}) \\ (a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31}) & (a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32}) \\ (a_{41} b_{11} + a_{42} b_{21} + a_{43} b_{31}) & (a_{41} b_{12} + a_{42} b_{22} + a_{43} b_{32}) \end{bmatrix} \quad (4 \times 2)$$

$$(क-13) (AB)' = B' A'$$

$$(क-14) \text{ यदि } A \text{ एक वर्ग घाब्यूह है तो } A^2 = AA \text{ और } A^3 = AAA.$$

सारणिक

(क-15) परिभाषा . एक वर्ग घाब्यूह के प्रयोगों में एक वास्तविक मान फलन (real valued function) को सारणिक कहते हैं।

यदि A एक $(m \times m)$ विभिति का घाब्यूह है तो सारणिक को $|A|$ द्वारा निरूपित करते हैं।

$$\text{यदि } A = \begin{matrix} (m \times m) \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mm} \end{array} \right] \end{matrix}$$

तो

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mm} \end{vmatrix}$$

(क-16); यदि

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

तो $|A| = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$ है।

(क-17) यदि किसी वर्ग आव्यूह की दो पंक्ति या दो स्तम्भ आपस में बदल-बदल गए हों तो सारणिक का चिह्न बदल जाता है। स्पष्ट है कि यदि इन परिवर्तनों की संख्या सम हो तो सारणिक का चिह्न वही रहता है और विषम हो तो चिह्न बदल जाता है।

(क-18) यदि सारणिक में एक पंक्ति में से दूसरी पंक्ति या एक स्तम्भ में से दूसरे स्तम्भ को घटा या जोड़ दें तो इसके मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

(क-19) यदि सारणिक में कोई दो पंक्ति या स्तम्भ सर्वसम (identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(क-20) यदि सारणिक में किसी एक पंक्ति या स्तम्भ के सभी अंश शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

(क-21) यदि किसी दो वर्ग आव्यूहों A व B का गुणनफल $AB=C$ है तो

$$|A| \times |B| = |C|$$

(क-22) एक सारणिक में यदि किसी अंश में सम्बद्ध पंक्ति और स्तम्भ को बाट दें तो शेष सारणिक की उस अंश का माइनर (minor) बहते हैं। जैसे,

$$|A|_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

है तो a_{11} का माइनर, मारणिक $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ होता है।

इसी प्रकार

$$a_{22} \text{ का माइनर } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ है।}$$

(क-23) किसी घन a_{ij} के माइनर को उचित चिह्न के साथ रख देने पर यह a_{ij} का सहसङ्क (cofactor) कहलाता है। माइनर का चिह्न $(-1)^{i+j}$ द्वारा जान सकते हैं। सहसङ्क को A_{ij} द्वारा निरूपित करते हैं।

अतः (क-24) के अनुसार a_{11} का सहसङ्क

$$= (-1)(1+1) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{और } a_{23} \text{ का सहसङ्क} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(क-25) एक घाब्यूह A के मारणिक के मान का परिवर्तन निम्न सूत्र द्वारा

कर सकते हैं —

$$|A| = \sum_{j=1}^m a_{ij} (\text{cofactor } a_j),$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$= \sum_{i=1}^m a_{ij} (\text{cofactor } a_j)$$

स्पष्ट है कि एक पंक्ति या स्तम्भ के घातों की घनने सहसङ्कों में गुना का योग मारणिक के मान के समान होता है।

(क-26) एक वर्ग आव्यूह जिसके सारणिक का मान शून्य हो अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (singular matrix) कहलाता है अन्यथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह (non-singular matrix) कहलाता है।

(क-27) यदि एक व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह A के लिए एक ऐसा अन्य व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह B ज्ञात कर सकते हैं कि $AB=I$ हो तो B को आव्यूह A का प्रतिलोम आव्यूह (inverse matrix) कहते हैं।

यदि $A = ((a_{ij}))$ एक व्युत्क्रमणीय वर्ग-आव्यूह हो तो उसके प्रतिलोम आव्यूह $A^{-1} = ((a^{ij}))$ के घंटा a^{ij} को निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

$$a^{ij} = \frac{\text{cofactor } a_{ji}}{|A|} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करने की दो विधियाँ जो व्यापक रूप में प्रयोग की जाती हैं यहाँ दी गई हैं।

प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करने की विधियाँ

(1) कोलकीय संघनन-विधि

यदि A एक साधारण वर्ग आव्यूह है जिसका घंटा a_{ij} है तो इसका प्रतिलोम आव्यूह कोलकीय विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं। सिद्धान्त रूप में यह विधि इस प्रकार है।

पहले A के तुल्य रख दिया जब कि I की विमिति वही है जो A की है। फिर A पर विभिन्न क्रियाएँ इस प्रकार करते हैं कि A, I में परिवर्तित हो जाये। A पर की गई सभी क्रियाओं को I पर भी साय-साय करते जाते हैं। इस प्रकार जब A, I में परिवर्तित हो जाता है तो I, A^{-1} में परिवर्तित हो जाता है।

यहाँ इस विधि को (4×4) त्रय के एक आव्यूह को लेकर स्पष्ट किया गया है।

शक्ति सभ्यता

1.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0
2.	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0
3.	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0
4.	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1
5.	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	d_{11}	0	0	0
								I कोलकीय शक्ति
6.	0	$b_{12} \cdot 1$	$b_{13} \cdot 1$	$b_{14} \cdot 1$	$-a_{21}d_{11}$	1	0	0
7.	0	$b_{12} \cdot 2$	$b_{13} \cdot 2$	$b_{14} \cdot 2$	$-a_{31}d_{11}$	0	1	0
8.	0	$b_{12} \cdot 3$	$b_{13} \cdot 3$	$b_{14} \cdot 3$	$-a_{41}d_{11}$	0	0	1
								II कोलकीय शक्ति

9.	1	b_{23}	b_{24}	d_{21}	d_{22}	0	0
10.	0	$b_{23\ 1}$	$b_{24\ 1}$	$d_{21\ 1}$	$-b_{12\ 2}$ $\times d_{22}$	1	0
11.	0	$b_{23\ 2}$	$b_{24\ 2}$	$d_{21\ 2}$	$-b_{12\ 2}$ d_{22}	0	1
III कीसकीय पक्ति							
12.		1	b_{35}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	0
13		0	$b_{34\ 1}$	$d_{31\ 1}$	$d_{32\ 1}$	$-d_{33}$	1
$b_{23\ 2}$ IV कीसकीय पक्ति							
14.			1	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}
15	1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	d_{11}	0	0
16.	0	1	b_{23}	b_{24}	d_{21}	d_{22}	0
17.	0	0	1	b_{34}	d_{31}	d_{32}	d_{33}
18.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}
19.	1	0	$b_{53\ 1}$	$b_{54\ 1}$	$d_{51\ 1}$	$-d_{23}$	0
20.	0	1	0	$b_{61\ 1}$	$d_{61\ 1}$	$d_{62\ 1}$	$-d_{23}$
21.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}
22	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}
23	1	0	0	$d_{91\ 1}$	$d_{91\ 1}$	$d_{91\ 2}$	$d_{73\ 1}$
24.	0	1	0	0	c_{21}	c_{22}	c_{23}
25.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}
26.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}
27.	1	0	0	0	c_{11}	c_{12}	c_{13}
28.	0	1	0	0	c_{21}	c_{22}	c_{23}
29.	0	0	1	0	c_{31}	c_{32}	c_{33}
30.	0	0	0	1	c_{41}	c_{42}	c_{43}

श्रिया विधि

(1) पहली पक्ति को इसके पहले घन a_{11} से भाग दिया जिससे यह घन 1 हो जाये। इस प्रकार प्रत्येक पक्ति को प्रथम कीसकीय पक्ति कहते हैं। जबकि $b_{12} = \frac{b_{12}}{a_{11}}$

$$b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, b_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}, d_{11} = \frac{1}{a_{11}} \text{ यदि प्रथम पंक्ति का प्रथम अंश शून्य हो तो अन्य}$$

पंक्तियों को बदल कर ऊपर ले जाना चाहिये। जिससे पहली पंक्ति का पहला अंश शून्य न हो।

(2) प्रथम कोलकीय पंक्ति (5) को a_{21} से गुणा करके, दूसरी पंक्ति के तदनुसार अंशों में से घटा देते हैं। जिससे पहले स्तम्भ का दूसरा अंश शून्य हो जाये जबकि

$$b_{12} = a_{22} - a_{21}b_{12}, b_{13} = a_{23} - a_{21}b_{13}, b_{14} = a_{24} - a_{21}b_{14}$$

(3) इसी प्रकार a_{31} व a_{41} में क्रमशः पंक्ति (5) को गुणा करके पंक्ति (3) व (4) में से घटा देते हैं जिनमें पहले स्तम्भ के 1 को छोड़कर अन्य अंश शून्य हो जाते हैं। पंक्तियों (7) व (8) के अंश पंक्ति (6) की भाँति ज्ञात किये गये हैं।

(4) अब पंक्ति (5) व पहले स्तम्भ को छोड़ दिया जाता है इस प्रकार एक 3×3 विभक्ति का रह जाता है, ऊपर दो दृढ़ क्रियाओं को फिर से दोहराते हैं, जिसके परिणामस्वरूप 2×2 विभक्ति का एक आव्यूह पंक्ति (9) व दूसरे स्तम्भ को छोड़ने पर प्राप्त होता है।

(5) इसे 2×2 विभक्ति के आव्यूह पर पहली तीन क्रियाओं को दोहराते हैं जिसके परिणामस्वरूप पंक्ति (12) व तीसरे स्तम्भ को जाड़ 1×1 विभक्ति का एक आव्यूह प्राप्त हो जाता है।

(6) b_{34} से पंक्ति (13) को भाग करने पर IV कोलकीय पंक्ति प्राप्त हो जाती है। इसके अंशों को $c_{41}, c_{42}, c_{43}, c_{44}$ मान लिया गया है। कोलकीय पंक्तियों की सख्या आव्यूह में पंक्तियों की सख्या के समान होती है।

(7) अब केवल कोलकीय पंक्तियों को निम्न दिया। इसे देखने में स्पष्ट है कि दायाँ ओर के आव्यूह में निम्न त्रिभुज के अंश 0 हैं। अब फिर ऊपरी त्रिभुज के अंशों को शून्य करना है जिससे बायाँ ओर का आव्यूह ऐंकिव आव्यूह 1 में परिवर्तित हो जाता है।

(8) पहले पंक्ति (16) को b_{12} से गुणा करके पंक्ति (15) में से घटाया फिर पंक्ति (17) को b_{23} से गुणा करके पंक्ति (16) में से घटाया, इसी प्रकार पंक्ति (18) को b_{34} से गुणा करके पंक्ति (17) में से घटाया। इस प्रकार तीन अंश शून्य हो जाते हैं जबकि $b_{53} = b_{13} - b_{12}b_{23}, b_{54} = b_{14} - b_{12}b_{24}, d_{51} = d_{11} - b_{12}d_{21}, \dots, c_{31} = d_{31} - b_{34}c_{41}$.

(9) इसी प्रकार पंक्ति (21) व b_{53} से गुणा करके पंक्ति 19 में से घटाया, पंक्ति (22) को b_{64} से गुणा करके पंक्ति 20 में से घटाया।

(10) पंक्ति (26) को b_{91} से गुणा करके, पंक्ति 23 में से घटा दिया।

(11) दायाँ ओर का आव्यूह जिसके अंश c_{ij} हैं आव्यूह A के प्रतिलोम आव्यूह A^{-1} को निरूपित करता है। इस विधि का पहला लाभ यह है कि इसके द्वारा समीकरणों को नो ह्व किया जा सकता है। यदि आव्यूह समीकरणों में अज्ञात मानों के गुणाकों द्वारा है तो कोलकीय पंक्तियों की सहायता से अज्ञात मान ज्ञात हो जाते हैं।

दूसरा लाभ यह है कि इस विधि द्वारा ब्राब्यूह के सारणिक का मान कीलकीय पक्तियों के प्रथम घशो को गुणा करने पर शात हो जाता है ।

कीलकीय सघनन विधि किसी भी अव्युत्क्रमणाय वर्ग ब्राब्यूह के लिए उपयुक्त है । इस विधि में श्रुटि न होने की जांच करने का भी साधन है । प्रत्येक पक्ति के योग को घत में एव स्तम्भ में रख लिया जाता है । इस स्तम्भ के घशो पर वही क्रिया करते रहते हैं जो उसके घश के तदनुसार पक्ति पर की गई है । इस प्रकार सदैव किसी भी पक्ति का योग, उसके अन्तिम स्तम्भ में घश के समान होता है । यदि ऐसा न होता भी समझ लेना चाहिये कि कही परिकलन में श्रुटि हो गई है । इन्ही कारणों से कीलकीय सघनन विधि का प्रयोग बहुधा किया जाता है ।

संक्षिप्त डूलिटिल विधि

इस विधि का प्रयोग केवल अव्युत्क्रमणीय, सममित, वर्ग ब्राब्यूह का प्रतिलोम शात करने के हेतु ही किया जाता है । माना कि वर्गों के योग तथा गुणनपला के योग द्वारा रचित (3×3) विमितिका ब्राब्यूह S है जिसके घश S_{ij} हैं । S का प्रतिलोम ब्राब्यूह S^{-1} संक्षिप्त डूलिटिल विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं । इस विधि के अन्तर्गत पहले S को समान विमतीय ऐकिक ब्राब्यूह I के तुल्य रख दिया जाता है फिर पक्तियों पर विभिन्न क्रियाओं को किया जाता है जिनका वर्णन नीचे दिया गया है —

पक्ति	स्तम्भ						योग
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
R_1	S_{11}	S_{12}	S_{13}	1	0	0	T_1
R_2	S_{12}	S_{22}	S_{23}	0	1	0	T_2
R_3	S_{13}	S_{23}	S_{33}	0	0	1	T_3
R_4	S_{11}	S_{12}	S_{13}	1	0	0	T_1
R_5	1	S_{12}	S_{13}	d_{11}	0	0	$T_{1,1}$
R_6	0	S_{22}	S_{23}	d_{12}	1	0	$T_{2,1}$
R_7	0	1	S_{23}	d_{12}	d_{22}	0	$T_{2,2}$
R_8	0	0	S_{33}	d_{12}	d_{23}	1	$T_{3,1}$
R_9			1	d_{12}	d_{23}	d_{33}	$T_{3,2}$

प्रतिलोम ब्राब्यूह के घश हैं ।

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= 1 \times d_{11} + d_{11,1} d_{11,2} + d_{11,3} d_{11,4} \\
 C_{12} &= 1 \times 0 + d_{11,1} d_{22} + d_{11,3} d_{23} \\
 C_{13} &= 1 \times 0 + d_{11,1} \times 0 + d_{11,3} d_{33} \\
 C_{22} &= 0 \times 0 + 1 \times d_{22} + d_{22,1} d_{22,2} \\
 C_{23} &= 0 \times 0 + 1 \times 0 + d_{22,1} d_{33} \\
 C_{33} &= 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times d_{33}
 \end{aligned}$$

क्रिया विधि

(1) पक्ति R_1 को पक्ति R_4 में फिर से लिख दिया।

(2) पक्ति R_4 के प्रत्येक अंश को इसके पहले अंश S_{11} से भाग दिया अर्थात् R_4 S_{11} क्रिया को किया और प्राप्त अंशों का R_6 में रख दिया।

(3) पक्ति R_5 को S_{12} से गुणा करके, पक्ति R_2 में घटा दिया अर्थात् $R_2 - R_{42} R_5$ क्रिया को किया। इस प्रकार अंश है, $S_{22\ 1} = S_{23} - S_{12} S_{22\ 1} S_{23\ 1}$ और $d_{11\ 1} = 0 - S_{12} d_{11\ 1}$, $T_{2\ 1} = T_2 - S_{12} T_{1\ 1}$ इन अंशों को R_6 में रखा गया है।

(4) पक्ति R_3 में स S_{13} और पक्ति R_5 के अंशों को गुणा करके और $S_{23\ 1}$ को R_7 के अंशों से गुणा करके घटा दिया अर्थात्

$$R_3 - R_{41} R_{13} - R_{61} R_{73}$$

इस प्रकार अंश है,

$$S_{22\ 1} = S_{33} - S_{13} S_{13\ 1} - S_{23\ 1} S_{23\ 2}$$

$$d_{11\ 3} = 0 - 1 S_{13\ 1} - d_{11\ 1} S_{23\ 2}$$

(5) पक्ति R_8 के अंशों को $S_{33\ 1}$ से भाग कर दिया। यदि आव्यूह की विभक्ति (4×4) या अधिक क्रम की हो तो डूलिटिल विधि को विस्तारित करके ऊपर की भाँति प्रयोग कर सकते हैं।

□ □ □

परिशिष्ट-ख

कुछ उपयोगी सूत्र

सघुगणक सम्बन्धी सूत्र

हम जानते हैं कि

$$10^2 = 100 \quad (\text{स 1})$$

इसी को लघु के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\log_{10} 100 = 2 \quad (\text{स 1 1})$$

इसी प्रकार यदि

$$e^x = a \quad (\text{स 2})$$

तो लघुगणक के रूप में

$$\log_e a = x \quad (\text{स 2 1})$$

व्यक्त (स 1 1) या (स 2 1) में 10 या e लघुगणक का आधार है। यदि a और b दो संख्याएँ हैं और आधार e है तो

$$\log_e (ab) = \log_e a + \log_e b \quad (\text{स 3})$$

$$\log_e \left(\frac{a}{b} \right) = \log_e a - \log_e b \quad (\text{स 4})$$

$$\log_e (a)^n = n \log_e a \quad (\text{स 5})$$

यदि आधार का परिवर्तन e से 10 में या 10 से e में करना हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं —

$$\log_e a = \log_{10} a \log_e 10 \quad (\text{स 6})$$

$$\text{और } \log_e 10 = 2.3026 \quad \dots (\text{स 6 1})$$

क्रमचय और सचय सम्बन्धी सूत्र

यदि कुल वस्तुएँ n हैं और इनमें से r वस्तुओं के क्रमचयों को $(n)_r$ से निरूपित करते हैं और सचयों को $\binom{n}{r}$ से निरूपित करते हैं।

$$(n)_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \quad (\text{स 7})$$

$$\binom{n}{r} = (n)_{r/r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (\text{स 8})$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \dots (\text{स 8 1})$$

$$\text{वरिष्ठ } n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$(a+b)^n$ का द्विपद विस्तार

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n \quad \dots (\text{स.9})$$

जबकि $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, $(r+1)$ वा ध्यापक पद है। $r=0, 1, 2, \dots, n$, रखने पर द्विपद विस्तार के सब पद प्राप्त हो जाते हैं।

घातीय श्रेणी

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \dots (\text{स.2})$$

$$\text{और } e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \dots (\text{स.10.1})$$

लघुगणकीय श्रेणी

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \dots (\text{स.11})$$

और

$$\log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad \dots (\text{स.12})$$

$$\log_e \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad \dots (\text{स.13})$$

श्रेणी (स.13) में माना कि,

$$\frac{1+x}{1-x} = Z \quad x = \frac{Z-1}{Z+1}$$

$$\log_e Z = 2 \left\{ \frac{Z-1}{Z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{Z-1}{Z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{Z-1}{Z+1} \right)^5 + \dots \right\} \quad \dots (\text{स.14})$$

$n!$ के सन्निकट मान के लिए स्टर्लिंग-सूत्र

$$n! = \sqrt{2\pi} e^{-n} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \quad \dots (\text{स.15})$$

गामा-फलन

गामा फलन $G(\alpha, n)$ को α व n के वास्तविक धनात्मक मानों ($\alpha > 0$ और $n > 0$) के लिए निम्न समाकलन द्वारा दिया जाता है :-

$$G(a, n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} dx \quad \dots (\text{स 16})$$

$$= \frac{\overline{|n|}}{a^n} \quad \dots (\text{स 16.1})$$

यदि $a = 1$

$$\overline{|n|} = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad \dots (\text{स 16.2})$$

बीटा-फलन

बीटा फलन $\beta(m, n)$ को m व n के वास्तविक घनात्मक मानों $m > 0$ और $n > 0$ के लिए निम्न समाकल द्वारा दिया जाता है :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad \dots (\text{स 17})$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \dots (\text{स 17.1})$$

$$= \frac{\overline{|m|} \overline{|n|}}{\overline{|m+n|}} \quad \dots (\text{स 17.2})$$

[जबकि $\overline{|n+1|} = n \overline{|n|}$]

□ □ □

परिशिष्ट-ग

समुच्चय सिद्धान्त का परिचय

समुच्चय¹ को हम इस प्रकार समझ सकते हैं। यह उन अवयवों या घटकों (elements) का एक या एकको वा समुदाय है जो कि विचाराधीन है। जैसे यदि एक शैल पर रखी पुस्तकें एक समुच्चय हैं तो इस पर रखी प्रत्येक पुस्तक इस समुच्चय का अवयव है।

अवयव x के समुच्चय A में होने को $x \in A$ द्वारा सूचित करते हैं। अवयव x के समुच्चय A में न होने को $x \notin A$ द्वारा सूचित करते हैं।

उपसमुच्चय :—माना कि A और A_1 दो समुच्चय हैं जिनमें A का प्रत्येक अवयव A का भी एक अवयव हो तो A_1 को A का उपसमुच्चय कहते हैं। इसके लिए प्रतीक $A_1 \subset A$ है अर्थात् A_1 , A में अन्तर्विष्ट (Contains) है। या $A \supset A_1$ है अर्थात् A , A_1 को अन्तर्विष्ट करता है। इस स्थिति में $x \in A_1 \Rightarrow x \in A$ [जहाँ \Rightarrow : अन्तर्निहित] यदि दो समुच्चय A और B इस प्रकार हो कि $A \subset B$ और $B \subset A$ तो ये समुच्चय समान कहलाते हैं।

शून्य समुच्चय :—एक समुच्चय जिसमें कोई अवयव न हो तो इसे शून्य समुच्चय कहते हैं। शून्य समुच्चय को ϕ द्वारा निरूपित करते हैं। यह कह सकते हैं कि शून्य समुच्चय ϕ किसी भी समुच्चय A का उपसमुच्चय होता है।

पूरक समुच्चय :—यदि समुच्चय S का एक उपसमुच्चय A है अर्थात् $A \subset S$ तो S के उन सब अवयवों का समुदाय जो कि A में नहीं हैं A का पूरक समुच्चय कहलाते हैं और इसे \bar{A} द्वारा सूचित करते हैं।

समुच्चयों का योग :—समुच्चयों के किसी संग्रह (collection) \mathcal{C} में यदि एक ऐसा समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव उस संग्रह के कम से कम एक समुच्चय का अवयव हो तो वह समुच्चय, संग्रह के सभी समुच्चयों का योग कहलाता है और इसके लिए प्रतीक $\cup \lambda$ का प्रयोग करते हैं। समुच्चयों के योग सम्बन्धी कुछ तथ्य निम्न प्रकार हैं जिनको कि आवश्यकता पडने पर सुगमता से सिद्ध किया जा सकता है :—

$$(i) A \cup \phi = A$$

(ii) $A \cup B = B \cup A$; यह योग का क्रम विनिमेय (commutative) नियम है।

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; यह योग का साहचर्य (associative) नियम है।

$$(iv) A \subset B \text{ यदि और केवल यदि } A \cup B = B$$

समुच्चयों का प्रतिच्छेद :—समुच्चयों के प्रत्येक संग्रह λ के लिए यदि एक ऐसे समुच्चय का अस्तित्व है जिसका कि प्रत्येक अवयव कवित संग्रह के प्रत्येक समुच्चय का अवयव हो

1. समुच्चय को अन्तर्विष्ट ही छोड़ दिया गया है।

तो उस समुच्चय को संप्रह के समुच्चयों का प्रतिच्छेद कहते हैं और इसके लिए प्रतीक \cap का प्रयोग करते हैं।

प्रतिवर्त समष्टि .—किसी यादृच्छिक प्रयोग के समस्त सम्भव दृश्य-परिणामों (outcomes) के संप्रह को प्रतिवर्त समष्टि कहते हैं और इसे Ω से सूचित करते हैं।

असंयुक्त समुच्चय :—कोई भी दो समुच्चय A व B असंयुक्त रहे जाते हैं यदि इनमें कोई भी अवयव सावँ न हो अर्थात् $A \cap B = \phi$ हो। इस परिभाषा को दो से अधिक समुच्चयों के लिए विस्तारित किया जा सकता है।

बोरल क्षेत्र :—समुच्चयों का एक वर्ग 'B' बोरल क्षेत्र कहलाता है यदि इसमें निम्न गुण हों :—

(i) B एक असून्य वर्ग है और इसमें Ω अन्तर्बिष्ट है।

(ii) यदि एक समुच्चय $A \in B$ तो $\bar{A} \in B$

(iii) यदि $\{A_i\}$ गणनीयत. अनन्त समुच्चयों (countably infinite sets) का एक अनुक्रम है जबकि प्रत्येक $A_i \in B$, तो

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in B$$

□ □ □

परिशिष्ट-घ

सारणी (घ-1) प्रसामान्य बंटन की कोटियाँ

X.	·00	·01	·02	·03	·04
0·0	·3989	·3989	·3989	·3988	·3986
0·1	·3970	·3965	·3961	·3956	·3951
0·2	·3910	·3902	·3894	·3885	·3876
0·3	·3814	·3802	·3790	·3778	·3765
0·4	·3683	·3668	·3653	·3637	·3621
0·5	·3521	·3503	·3485	·3467	·3448
0·6	·3332	·3312	·3292	·3271	·3251
0·7	·3123	·3101	·3079	·3056	·3034
0·8	·2897	·2874	·2850	·2827	·2803
0·9	·2661	·2637	·2613	·2589	·2565
1·0	·2420	·2396	·2371	·2347	·2323
1·1	·2179	·2155	·2131	·2107	·2083
1·2	·1942	·1919	·1895	·1872	·1849
1·3	·1714	·1691	·1669	·1647	·1626
1·4	·1497	·1476	·1456	·1435	·1415
1·5	·1295	·1276	·1257	·1238	·1219
1·6	·1109	·1092	·1074	·1057	·1040
1·7	·0940	·0925	·0909	·0893	·0878
1·8	·0790	·0775	·0761	·0748	·0734
1·9	·0656	·0644	·0632	·0620	·0608
2·0	·0540	·0529	·0519	·0508	·0498
2·1	·0440	·0431	·0422	·0413	·0404
2·2	·0355	·0347	·0339	·0332	·0325
2·3	·0283	·0277	·0270	·0264	·0258
2·4	·0224	·0219	·0213	·0208	·0203
2·5	·0175	·0171	·0167	·0153	·0158
2·6	·0136	·0132	·0129	·0126	·0122
2·7	·0104	·0101	·0099	·0096	·0093
2·8	·0079	·0077	·0075	·0073	·0071
2·9	·0060	·0058	·0056	·0055	·0053
	·01	·1	·2	·3	·4
3·0	·0044	·0033	·0024	·0017	·0012

विस्तार सारणी (घ-1)

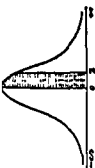
05	06	07	08	09	1	2	3	4	5
3984	3982	3980	3977	3973	0	0	-1	-1	-1
3945	3939	3932	3925	3918	-1	-1	-2	-2	-3
3867	3857	3847	3836	3825	-1	-2	-3	-4	-5
3752	3739	3725	3712	3697	-1	-3	-4	-5	-6
3605	3589	3572	3555	3538	-2	-3	-5	-6	-8
3429	3410	3391	3372	3352	-2	-4	-6	-8	-9
3230	3209	3187	3166	3144	-2	-4	-6	-8	-10
3011	2989	2966	2943	2920	-2	-5	-7	-9	-11
2780	2756	2732	2709	2685	-2	-5	-7	-9	-12
2541	2516	2492	2468	2444	-2	-5	-7	-10	-12
2299	2275	2251	2227	2203	-2	-5	-7	-10	-12
2059	2036	2012	1989	1965	-2	-5	-7	-10	-12
1826	1804	1781	1785	1736	-2	-5	-7	-9	-11
1604	1582	1561	1539	1518	-2	-4	-7	-9	-11
1394	1374	1354	1334	1315	-2	-4	-6	-8	-10
1200	1182	1163	1145	1127	-2	-4	-6	-7	-9
1023	1006	0989	0973	0957	-2	-3	-5	-7	-8
0863	0848	0833	0818	0804	-2	-3	-5	-6	-8
0721	0707	0694	0681	0669	-1	-3	-4	-5	-7
0596	0584	0573	0562	0551	-1	-2	-4	-5	-6
0488	0478	0468	4059	0449	-1	-2	-3	-4	-5
0396	0387	0397	0371	0363	-1	-2	-3	-3	-4
0317	0310	0303	0297	0290	-1	-1	-2	-3	-4
0252	0246	0241	0235	0229	-1	-1	-2	-2	-3
0198	0194	0189	0184	0180	0	-1	-1	-2	-2
0154	0151	0147	0143	0139	0	-1	-1	-2	-2
0119	0116	0113	0110	0107	0	-1	-1	-1	-2
0091	0088	0086	0084	0081	0	-1	-1	-1	-1
0069	0067	0065	0063	0061	0	0	-1	-1	-1
0051	0050	0048	0047	0046	0	0	0	-1	-1
5	6	7	8	9					
0009	0006	0004	0003	0002					

Table व-1 is taken from Table II of Fisher and Yates : Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh) and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ-2) प्रसामान्य वक्र के नीचे 0 से Z तक का क्षेत्र

Normal Curve Tables

- Z =



Areas. विम (घ 2)

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31372
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34849	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41198	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670

वित्त सारणी (ब-2)
(2)

20	47725	47784	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
21	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
22	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
23	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49080	49111	49134	49158
24	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
25	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
26	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
27	49651	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
28	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
29	49811	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
30	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900
31	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
32	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
33	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
34	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
35	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
36	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
37	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
38	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
39	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997
40	49997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
45	49997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
50	49997	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Table B-2 is taken from Table II₁ of Fisher and Yates' Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh) and by the permission of the authors and publishers.

सारणी (घ-3), t का बटन

सं. क्र० (df)	प्रक्रिया									
	5	4	3	2	1	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01
1	1 000	1 376	1 963	3 078	6 314	12 706	31 821	63 657	127 060	636 619
2	816	1 061	1 386	1 886	2 920	4 303	6 965	9 925	14 303	31 598
3	765	978	1 250	1 638	2 353	3 182	4 541	5 841	8 610	12 924
4	741	941	1 190	1 533	2 132	2 776	3 747	4 604	6 869	8 610
5	727	920	1 156	1 476	2 015	2 571	3 365	4 032	5 959	6 869
6	718	906	1 134	1 440	1 943	2 447	3 143	3 707	5 408	5 959
7	711	896	1 119	1 415	1 895	2 365	2 998	3 499	5 041	5 408
8	706	889	1 108	1 397	1 860	2 306	2 896	3 355	4 781	5 041
9	703	883	1 100	1 383	1 833	2 262	2 821	3 250	4 587	4 781
10	700	879	1 093	1 372	1 812	2 228	2 764	3 169	4 437	4 587
11	697	876	1 088	1 363	1 796	2 201	2 718	3 106	4 318	4 437
12	695	873	1 083	1 356	1 782	2 179	2 681	3 055	4 221	4 318
13	694	870	1 079	1 350	1 771	2 160	2 650	3 012	4 140	4 221
14	692	868	1 076	1 345	1 761	2 145	2 624	2 977	4 073	4 140
15	691	866	1 074	1 341	1 753	2 131	2 602	2 947	4 015	4 073
16	690	865	1 071	1 337	1 746	2 120	2 583	2 921	3 965	4 015
17	689	863	1 069	1 333	1 740	2 110	2 567	2 898	3 922	3 965
18	688	862	1 067	1 330	1 734	2 101	2 552	2 878	3 883	3 922
19	688	861	1 066	1 328	1 729	2 093	2 539	2 861	3 850	3 883
20	687	860	1 064	1 325	1 725	2 086	2 528	2 845	3 819	3 850
21	686	859	1 063	1 323	1 721	2 080	2 518	2 831	3 792	3 819
22	686	858	1 061	1 321	1 717	2 074	2 508	2 819		3 792

df	प्रतिशत									
	5	4	3	2	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
23	685	858	1060	1319	1714	2069	2500	2807	3767	
24	685	857	1059	1318	1711	2064	2492	2797	3745	
25	684	856	1058	1316	1708	2060	2485	2787	3725	
26	684	856	1058	1315	1706	2056	2479	2779	3707	
27	684	855	1057	1314	1703	2052	2473	2771	3690	
28	683	855	1056	1313	1701	2048	2467	2763	3674	
29	683	854	1055	1311	1699	2045	2462	2756	3659	
30	683	854	1055	1310	1697	2042	2457	2750	3646	
40	681	851	1050	1303	1684	2021	2423	2704	3551	
60	679	848	1046	1296	1671	2000	2390	2660	3460	
120	677	845	1041	1289	1658	1980	2358	2617	3373	
∞	674	842	1036	1282	1645	1960	2326	2576	3291	

Table q-3 is taken from Table III of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd Edinburgh) and by the permission of the authors and publishers.

सारणी (घ-4), आई वर्ग बटन

व्य० क्र० (df)	प्रक्रिया								
	50	30	20	10	05	02	01	001	
1	455	1 074	1 642	2 706	3 841	5 412	6 635	10 827	
2	1 386	2 408	3 219	4 605	5 991	7 824	9 210	13 815	
3	2 366	3 665	4 642	6 251	7 815	9 837	11 345	16 266	
4	3 357	4 878	5 989	7 779	9 488	11 668	13 277	18 467	
5	4 351	6 064	7 289	9 236	11 070	13 388	15 086	20 515	
6	5 348	7 231	8 558	10 645	12 592	15 033	16 812	22 457	
7	6 346	8 383	9 803	12 017	14 067	16 622	18 475	24 322	
8	7 344	9 524	11 030	13 362	15 507	18 168	20 090	26 125	
9	8 343	10 656	12 242	14 684	16 919	19 679	21 666	27 877	
10	9 342	11 781	13 442	15 987	18 307	21 161	23 209	29 588	
11	10 341	12 899	14 631	17 275	19 675	22 618	24 725	31 264	
12	11 340	14 011	15 812	18 549	21 026	24 054	26 217	32 909	
13	12 340	15 119	16 985	19 812	22 362	25 472	27 688	34 528	
14	13 339	16 222	18 151	21 064	23 685	26 871	29 141	36 123	
15	14 339	17 322	19 311	22 307	24 996	28 259	30 578	37 697	
16	15 338	18 418	20 465	23 542	26 296	29 633	32 000	39 252	
17	16 338	19 511	21 615	24 769	27 587	30 995	33 409	40 790	
18	17 338	20 601	22 760	25 989	28 869	32 346	34 805	42 312	

वित्त सारणी (घ-४)
(२)

परिशिष्ट-घ

645

19	18 338	21 689	23 900	27 204	30 144	33 687	36 191	43 820
20	19 337	22 775	25 038	28 412	31 410	35 020	37 566	45 315
21	20 337	23 858	26 171	29 615	32 671	36 343	38 932	46 797
22	21 337	24 939	27 101	30 813	33 924	37 659	40 289	48 268
23	22 337	26 018	28 429	32 007	35 172	38 968	41 638	49 728
24	23 337	27 096	29 553	33 196	36 415	40 270	42 980	51 179
25	24 337	28 172	30 675	34 382	37 652	41 566	44 314	52 620
26	25 336	29 246	31 795	35 563	38 885	42 856	45 642	54 052
27	26 336	30 119	32 912	36 741	40 113	44 140	46 963	55 476
28	27 336	31 391	34 027	37 9 16	41 337	45 419	48 278	56 893
29	28 336	32 461	35 139	39 087	42 557	46 693	49 588	58 302
30	29 336	33 530	36 250	40 256	43 773	47 962	50 892	59 703
32	31 336	35 665	38 466	42 535	46 194	50 487	53 486	62 487
34	33 336	37 795	40 676	44 903	48 602	52 995	56 061	65 247
36	35 336	39 922	42 879	47 212	50 999	55 489	58 619	67 985
38	37 335	42 045	45 076	49 513	53 384	57 969	61 162	70 703
40	39 335	44 165	47 269	51 805	55 779	60 476	63 691	73 402
42	41 335	46 282	49 456	54 050	58 124	62 892	66 206	76 084
44	43 335	48 396	51 639	56 369	60 481	65 337	68 710	78 750

सतत सारणी (प-4)
(3)

46	45.135	50.507	53.818	58.641	62.830	67.771	71.201	81.400
48	47.335	52.616	55.993	60.907	65.171	70.197	73.683	84.037
50	49.335	54.723	58.164	63.167	67.505	72.613	76.154	86.661
52	51.335	56.827	60.332	65.422	69.832	75.021	78.616	89.272
54	53.335	58.930	62.496	67.673	72.153	77.422	81.069	91.872
56	55.335	61.031	64.658	69.919	74.468	79.815	83.513	94.461
58	57.335	63.129	66.816	72.160	76.778	82.201	85.950	97.037
60	59.335	65.227	68.972	74.397	79.082	84.580	88.379	99.607
62	61.335	67.322	71.125	76.630	81.381	86.953	90.802	102.166
64	63.335	69.416	73.276	78.860	83.675	89.320	93.217	104.716
66	65.335	71.508	75.424	81.085	85.965	91.681	95.626	107.258
68	67.335	73.600	77.571	83.308	88.250	94.037	98.028	109.791
70	69.334	75.689	79.715	85.527	90.531	96.388	100.425	112.317

For odd values of n between 30 and 70 the mean of the tabular values for $n - 1$ and $n + 1$ may be taken. For larger values of n , the expression $\sqrt{2} \chi^2 - \sqrt{2n - 1}$ may be used as a normal deviate with unit variance, remembering that the probability for χ^2 corresponds with that of a single tail of the normal curve.

Table प-4 is taken from Table IV of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and publishers

साखी (प-5)

प्रमण मनुषात २२ के 0 1 प्रविशत बिडु

परिशिष्ट-५

647

क्र. सं० (df) μ_1/μ_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	405284	500000	540379	562500	576405	585937	598144	610667	623497	636619
2	998 5	999 0	999 2	999 2	999 3	999 3	999 4	999 4	999 5	999 5
3	167 0	148 5	141 1	137 1	134 6	132 8	130 6	128 3	125 9	123 5
4	74 14	61 25	56 18	53 44	51 71	50 53	49 00	47 41	45 77	44 05
5	47 18	37 12	33 20	31 09	29 75	28 84	27 64	26 42	25 14	23 78
6	35 51	27 00	23 70	21 92	20 81	20 03	19 03	17 99	16 89	15 75
7	29 25	21 69	18 77	17 19	16 21	15 52	14 63	13 71	12 73	11 69
8	25 42	18 49	15 83	14 39	13 49	12 86	12 04	11 19	10 30	9 34
9	22 86	16 39	13 90	12 56	11 71	11 13	10 37	9 57	8 72	7 81
10	21 04	14 91	12 55	11 28	10 48	9 92	9 20	8 45	7 64	6 76
11	19 69	13 81	11 56	10 35	9 58	9 05	8 35	7 63	6 85	6 00
12	18 64	12 97	10 80	9 63	8 89	8 38	7 71	7 00	6 25	5 42
13	17 81	12 31	10 21	9 07	8 35	7 86	7 21	6 52	5 78	4 97
14	17 14	11 78	9 73	8 62	7 92	7 43	6 80	6 13	5 41	4 60
15	16 59	11 34	9 34	8 25	7 57	7 09	6 47	5 81	5 10	4 31
16	16 12	10 97	9 00	7 94	7 27	6 81	6 19	5 55	4 85	4 06
17	15 72	10 66	8 73	7 68	7 02	6 56	5 96	5 32	4 63	3 85

सतत सारणी (घ-5)
(2)

18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	5.76	5.13	4.45	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.59	4.97	4.29	3.52
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.44	4.82	4.15	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.31	4.70	4.03	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.19	4.58	3.92	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.09	4.48	3.82	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	4.99	4.39	3.74	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	4.91	4.31	3.66	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	4.83	4.24	3.59	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	4.76	4.17	3.52	2.75
28	13.50	8.91	7.19	6.25	5.66	5.24	4.69	4.11	3.46	2.70
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.64	4.05	3.41	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.58	4.00	3.36	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.21	3.64	3.01	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	3.87	3.31	2.69	1.90
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.55	3.02	2.40	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.27	2.74	2.13	1.00

Lower 0.1 percent points are found by interchange of ν_1 and ν_2 , i.e. ν_1 must always correspond with the greater mean square.

सारणी (प-51)
 प्रमरण यनुमान e^{2z} के 1 प्रतिशत बिन्दु

परिशिष्ट-प

649

क्र.सं० (df) ν_2/ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	OC
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6234	6366
2	9850	9900	9917	9925	9930	9933	9937	9942	9946	9950
3	3412	3082	2946	2871	2824	2791	2749	2705	2660	2612
4	2120	1800	1669	1598	1522	1521	1480	1437	1393	1346
5	1626	1327	1206	1139	1097	1067	1029	989	947	902
6	1374	1092	978	915	875	847	810	772	731	688
7	1225	955	845	785	746	719	684	647	607	565
8	1126	865	759	701	663	637	603	567	528	486
9	1056	802	699	642	606	580	547	511	471	431
10	1004	756	655	599	564	539	506	471	433	391
11	965	720	622	567	532	507	474	440	402	360
12	933	693	595	541	506	482	450	416	378	336
13	907	670	574	520	486	462	430	396	359	316
14	886	651	556	503	469	446	414	380	343	300
15	868	636	542	489	456	432	400	367	329	287
16	851	623	529	477	444	420	389	355	318	275
17	840	611	518	467	434	410	379	345	308	265

सतत सारणी (घ-5.1)
(2)

18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.79	1.00

Lower 1 per cent points are found by interchange of μ_1 and μ_2 i. e. μ_1 must always correspond with the greater mean square.

सारणी (प-५२)
प्रकरण मनुष्यत ६२ व ५ प्रति-त बिन्दु

वक्र-संख्या (df) ν_2/ν_1	1	2	3	4	5	6	b	12	24	∞
1	1614	1995	2157	2246	2302	2340	2389	2439	24900	2545
2	1851	1900	1916	1925	1930	1933	1937	1941	1945	1950
3	1013	955	928	912	901	894	884	874	864	853
4	771	694	659	639	626	616	604	591	577	563
5	661	579	541	519	505	495	482	468	453	436
6	599	514	476	453	439	428	415	400	384	367
7	559	474	436	412	397	387	373	357	341	323
8	532	446	407	384	369	358	344	328	312	293
9	512	426	386	363	348	337	323	307	290	271
10	496	410	371	348	333	322	307	291	274	254
11	484	398	359	336	320	309	295	279	261	240
12	475	388	349	326	311	300	285	269	250	230
13	467	380	341	318	302	292	277	260	242	221
14	460	374	334	311	296	285	270	253	235	213
15	454	368	329	306	290	279	264	248	229	207
16	449	363	324	301	285	274	259	242	224	201
17	445	359	320	296	281	270	255	238	219	196

घनत सारणी (प-5 2)
(2)

18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.18	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.15	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.03	3.21	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.52	1.00

Lower 5 per cent. points are found by interchanging of ν_2 and ν_1 i.e. ν_1 must always correspond with the greater mean square

भारती (घ-53)
प्रकरण मनुष्यता २२ के 10 प्रतिशत बिन्दु

क्र.सं.	(d.f.) _{घ/घ}	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1		3986	4950	5359	5583	5724	5820	5944	6070	6200	6333
2		853	900	916	924	929	933	937	941	945	949
3		554	546	539	534	531	528	525	522	518	513
4		454	432	419	411	405	401	395	390	383	376
5		406	378	362	352	345	340	334	327	319	310
6		378	346	329	318	311	305	298	290	282	272
7		359	326	307	296	288	283	275	267	258	247
8		346	311	292	281	273	267	259	250	240	229
9		336	301	281	269	261	255	247	238	228	216
10		328	292	273	261	252	246	238	228	218	206
11		323	286	266	254	245	239	230	221	210	197
12		318	281	261	248	239	233	224	215	204	190
13		314	276	256	243	235	228	220	210	198	185
14		310	273	252	239	231	224	215	205	194	180
15		307	270	249	236	227	221	212	202	190	176
16		305	267	246	233	224	218	209	199	187	172
17		303	264	244	231	222	215	206	196	184	169
18		301	262	242	229	220	213	204	193	181	166

वित्त सारणी (घ-4)
(2)

19	2 99	2 C1	2 40	2 27	2 18	2 11	2 02	1 91	1 79	1 63
90	2 97	2 59	2 38	2 25	2 16	2 09	2 00	1 89	1 77	1 61
21	2 96	2 57	2 36	2 23	2 14	2 08	1 98	1 88	1 75	1 59
22	2 95	2 56	2 35	2 22	2 13	2 06	1 97	1 86	1 73	1 57
23	2 94	2 55	2 34	2 21	2 11	2 05	1 95	1 84	1 72	1 55
24	2 93	2 54	2 33	2 19	2 10	2 04	1 94	1 83	1 70	1 53
25	2 92	2 53	2 32	2 18	2 09	2 02	1 93	1 82	1 69	1 52
26	2 91	2 52	2 31	2 17	2 08	2 01	1 92	1 81	1 68	1 50
27	2 90	2 51	2 30	2 17	2 07	2 00	1 91	1 80	1 67	1 49
28	2 89	2 50	2 29	2 16	2 06	2 00	1 90	1 79	1 66	1 48
29	2 89	2 50	2 28	2 15	2 06	1 99	1 89	1 78	1 65	1 47
30	2 88	2 49	2 28	2 14	2 05	1 98	1 88	1 77	1 64	1 46
40	2 84	2 44	2 23	2 09	2 00	1 93	1 83	1 71	1 57	1 38
60	2 79	2 39	2 18	2 04	1 95	1 87	1 77	1 66	1 51	1 29
120	2 75	2 35	2 13	1 99	1 90	1 82	1 72	0	1 45	1 19
∞	2 71	2 30	2 08	1 94	1 85	1 77	1 67	1 55	1 38	1 00

Lower 10 per cent points are found by interchange of μ_1 and μ_2 i e μ_1 must always correspond with the greater mean square

Tables 11-5 are taken from Tables V of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd London (previously published by Oliver & Boyd Edinburgh), and by the permission of the authors and publishers

सारणी (घ-6)

एक प्रतिदर्श के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा में D के अधिक मानों की सारणी*

Sample size (n)	Level of significance for $D = \text{maximum } F_0(Y) - F_n(Y) $				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.21	.22	.24	.27	.32
30	.19	.20	.22	.24	.29
35	.18	.19	.21	.23	.27
Over 35	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

*Adapted from Massey, F. J., Jr 1951. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit *J Amer Statist. Ass.*, 46, 70, with the kind permission of the author and publisher.

सारणी (घ-7)

दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव परीक्षा में M_D के त्रुटिक मान
(उभय प्रतिदर्श)

n	One-tailed test*		Two tailed test**	
	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
3	3	—	—	—
4	4	—	4	—
5	4	5	5	5
6	5	6	5	6
7	5	6	6	6
8	5	6	6	7
9	6	7	6	7
10	6	7	7	8
11	6	8	7	8
12	6	8	7	8
13	7	8	7	9
14	7	8	8	9
15	7	9	8	9
16	7	9	8	10
17	8	9	8	10
18	8	10	9	10
19	8	10	9	10
20	8	10	9	11
21	9	10	9	11
22	9	11	9	11
23	9	11	10	11
24	9	11	10	12
25	9	11	10	12

26	9	11	10	12
27	9	12	10	12
28	10	12	11	13
29	10	12	11	13
30	10	12	11	13
35	11	13	12	
40	11	14	13	

* Abridged from Goodman L A 1954 Kolmogorov Smirnov tests for psychological research Psychol Bull, 51, 167, with the kind permission of the author and the American Psychological association

** Derived from Table 1 of Massey, F J Jr 1951 The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions Ann Math Statist, 22, 126-127 with the kind permission of the author and the publisher

सारणी (घ-8)

दो प्रतिदर्शों के लिए कोलमोगोरोव स्मिरनोव परीक्षा में D के त्रानिक मान
(Table of Critical Values of D in the Kolmogorov Smirnov
Two Sample Test)

बृहत् प्रतिदर्श : दो पुच्छ परीक्षा)

(Large samples two tailed test)*

Level of significance	Value of D so large as to call for rejection of H_0 at the indicated level of significance, where
	$D = \text{maximum} \left S_{n_1}(X) - S_{n_2}(X) \right $
•10	$1.22 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
05	$1.36 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
•025	$1.48 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
•01	$1.63 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
005	$1.73 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$
•001	$1.95 \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$

*Adapted from Smirnov, N 1948 Tables for estimating the goodness of fit of empirical distributions Ann Math Statist, 19,280-281 with the kind permission of the publisher

सारणी (घ-9), परम्परा परीक्षा में r के श्रुतिक मान

Given in the bodies of Table F_1 and Table F_{II} are various critical values of r for various values of n_1 and n_2 . For the one sample runs test, any value of r which is equal to or smaller than that shown in Table F_1 , or equal to or larger than that shown in Table F_2 , is significant at the 05 level. For the Wald Wolfowitz two-sample runs test, any value of r which is equal or smaller than that shown in Table F is significant at the 05 level.

TABLE F_1

n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3				2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4			2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5		2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
6	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9
11	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

* Adapted from Swed, Frieda S., and Eisenhart, C. 1943 Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternative. *Ann. Math. Statist.* 14, 83-86 with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-9-1), परस्पर परीक्षा में r के उपरि क्रान्तिक मानTABLE F₄

n_1/n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4					9	9													
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13	15	15	15	15				
7				11	12	13	13	14	14	14	14	16	16	16	16	17	17	17	17
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18	18	18	18	18
9					13	14	14	15	16	16	16	17	18	18	19	19	19	19	20
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	20	20	20	21
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	20	20	21	21	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	22
13					15	16	17	18	19	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14					15	16	17	18	19	20	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15					15	16	18	18	19	20	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16						17	18	19	20	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17						17	18	19	20	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18						17	18	19	20	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19						17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27	27
20						17	18	20	21	22	23	24	25	26	26	27	27	28	28

* Adapted from Swed, Frieda S, and Eisenhart, C 1943 Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives Ann Math. Statist., 14, 83-86 with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-10)

इसद वदन में घटना ($x < r$) की प्रायिकता यथावत् p ($x < r$)
 (TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF x
 IN THE BINOMIAL TEST*)

Given in the body of this table are one tailed probabilities under H_0 for the binomial test when $P = Q = \frac{1}{2}$.
 To save space, decimal points are omitted in the p 's

n/r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	031	188	500	812	969											
6	016	109	344	656	891	984										
7	008	062	227	500	773	938	992									
8	004	035	145	363	637	855	965	996								
9	002	020	090	254	500	746	910	980	998							
10	001	011	055	172	377	623	828	945	989	999						
11		006	033	113	274	500	726	887	967	994						
12		003	019	073	194	387	613	806	927	981	997					
13		002	011	046	133	291	500	709	867	954	989	998				
14		001	006	029	090	212	395	605	788	910	971	994	999			
15			004	018	059	151	304	500	696	819	941	982	996			
16			002	011	038	105	227	402	598	773	895	962	989	998		
17			001	006	025	072	166	315	500	685	834	928	975	994	999	
18			001	004	015	048	119	240	407	593	760	881	952	985	996	999

वित्त सारणी (घ-10)
(2)

19	002	010	032	084	180	324	500	676	820	916	968	990	998
20	001	006	021	058	132	252	412	588	784	868	942	979	994
21	001	004	013	039	095	192	332	500	668	808	905	961	987
22	002	008	026	067	143	262	416	584	738	857	933	974	974
23	001	005	017	047	105	202	339	500	661	798	895	953	953
24	001	003	011	032	076	154	271	419	581	729	846	924	924
25		002	007	022	054	115	212	345	500	655	788	885	885

* Adapted from Table IV, B, of Walker, Helan, and Lev J, 1953, Statistical inference Newyork : Holt. p 458, with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-11)

विल्कासन चिह्नित-बोटि परीक्षा मे T के क्रांतिक मान

(TABLE OF CRITICAL VALUES OF T IN THE WILCOXON MATCHED-PAIRS SIGNED-RANKS TEST*)

N	Level of significance for one-tailed test		
	025	01	005
	Level of significance for two-tailed test		
	05	02	01
6	0	—	—
7	2	0	—
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

*Adapted from Table 1 of Wilcoxon, F 1949 Some rapid approximate Statistical procedures New York American Cyanamid Company, p. 13 with the kind permission of the author and publisher.

सारणी (प-12)

मान द्विदली परीक्षा में कम से कम U के प्रेक्षित मान से सम्बद्ध प्रायिकताएँ
 (TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES
 AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE
 MANN WHITNEY TEST*)

 $n_2=3$

U/n_1	1	2	3
0	250	100	050
1	500	200	100
2	750	400	200
3		600	350
4			500
5			650

 $n_2=4$

U/n_1	1	2	3	4
0	200	067	028	014
1	400	133	057	029
2	600	267	114	057
3		400	200	100
4		600	314	171
5			429	243
6			571	343
7				443
8				557

Contd on2

* Reproduced from Mann, H B and Whitney, D R 1947. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. Ann. Math. Statist. 18, 52-54, With the kind permission of the authors and the publisher.

वित्त सारणी (घ-12)

(2)

 $n_2=5$

U/n_1	1	2	3	4	5
0	167	047	018	008	004
1	333	095	036	016	008
2	500	190	071	032	016
3	667	286	125	056	028
4		429	196	095	048
5		571	286	143	075
6			393	206	111
7			500	278	155
8			607	365	210
9				452	274
10				548	345
11					421
12					500
13					579

 $n_2=6$

U/n_1	1	2	3	4	5	6
0	143	036	012	005	002	001
1	286	071	024	010	004	002
2	428	143	048	019	009	004
3	571	214	083	033	015	008
4		321	131	057	026	013
5		429	190	086	041	021
6		577	274	129	063	032
7			357	176	089	047
8			452	238	123	066
9			548	305	165	090
10				381	214	120
11				457	268	155
12				545	331	197
13					396	242
14					465	294
15					535	350
16						409
17						469
18						531

वित्त सारणी (घ-12)

TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN-WHITNEY TEST*

$$n_2 = 7$$

U/n_1	1	2	3	4	5	6	7
0	.125	.028	.008	.003	.001	.001	.000
1	.250	.056	.017	.006	.003	.001	.001
2	.375	.111	.033	.012	.005	.002	.001
3	.500	.167	.058	.021	.009	.004	.002
4	.625	.250	.092	.036	.015	.007	.003
5		.333	.133	.055	.024	.011	.006
6		.444	.192	.082	.037	.017	.009
7		.556	.258	.115	.053	.026	.013
8			.333	.158	.074	.037	.019
9			.417	.206	.101	.051	.027
10			.500	.264	.134	.069	.036
11			.583	.324	.172	.090	.049
12				.394	.216	.117	.064
13				.464	.265	.147	.082
14				.538	.319	.183	.104
15					.371	.223	.130
16					.438	.267	.159
17					.500	.314	.191
18					.526	.365	.228
19						.418	.267
20						.473	.310
21						.527	.355
22							.402
23							.451
24							.500
25							.549

* Reproduction from Mann, H. B. and Whitney, D R 1947. On test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other *Ann. Math. Statist.* 18, 52-54, with the kind permission of the authors and the publisher.

वित्त सारणी (घ-14)

TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS SMALL AS OBSERVED VALUES OF U IN THE MANN-WHITNEY TEST*

 $n_2 = 8$

U/n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	t	Normal
0	.111	.022	.006	002	001	.000	000	000	3 308	001
1	.222	.044	012	004	002	001	000	.000	3 203	001
2	.333	089	024	008	003	001	001	000	3 098	.001
3	.444	.133	.042	014	005	002	001	001	2 993	001
4	.556	.200	067	024	009	004	002	001	2 888	002
5		.267	097	036	015	006	003	001	2 783	003
6		.356	139	055	023	010	005	002	2 678	004
7		444	188	077	033	015	007	003	2 573	005
8		.556	248	107	.047	021	010	005	2 462	007
9			315	141	064	030	014	007	2 363	009
10			.387	184	085	041	020	.010	2 258	012
11			.461	230	111	054	.027	014	2 153	016
12			539	.285	142	071	036	019	2 048	020
13				341	177	091	.047	025	1 943	026
14				404	.217	114	060	032	1 838	033
15				467	262	141	076	041	1 733	041
16				533	311	172	095	052	1 628	052
17					362	.207	116	065	1 523	064
18					416	.245	.140	080	1 418	.078
19					.472	286	.168	097	1 313	094
20					.528	331	.198	117	1 208	.113
21						.377	232	139	1 102	135
22						426	268	.164	998	159
23						.475	.306	191	.893	.185
24						.525	.347	221	.788	215
25							.389	.253	.683	.247
26							433	287	578	.282
27							.478	.323	.473	.318
28							.522	.360	.368	.356
29								.399	263	.396
30								.439	.158	.437
31								.480	.052	.481
32								.520		

* Reproduced from Mann *H B and Whitney, D R.* 1947 on a test of whether one of two-random variables is stochastically larger than the other *Ann Math Statist*, 18, 52-54 With the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-121)

एक पुच्छ परीक्षा के लिए $\alpha = 0.25$ या दो पुच्छ परीक्षा के लिए $\alpha = 0.05$
सापेक्षता स्तर पर U के क्रिटिक मान

Tables of Critical Values of U in the Mann-Whitney Test

(Critical values of U for a one tailed Test at $\alpha = 0.25$
or for a two tailed Test at $\alpha = 0.05$)

n_1/n_2	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

* Adapted and abridged from Tables 1, 3, 5 and 7 of Aulsebrook D. 1953. Extended tables for the Mann-Whitney statistic. Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University 1 No. 2 with the kind permission of the authors and the publisher.

सारणी (घ-13),

प्रतिशत वा प्रॉबिट में रूपांतरण

%	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	2.67	2.95	3.12	3.25	3.36	3.45	3.52	3.59	3.66
10	3.72	3.77	3.82	3.87	3.92	3.96	4.01	4.05	4.08	4.12
20	4.16	4.19	4.23	4.21	4.29	4.33	4.36	4.39	4.42	4.45
30	4.48	4.50	4.53	4.56	4.59	4.61	4.64	4.67	4.69	4.72
40	4.75	4.77	4.80	4.82	4.85	4.87	4.90	4.92	4.95	4.97
50	5.90	5.03	5.05	5.08	5.10	5.13	5.15	5.18	5.20	5.23
60	5.25	5.38	5.31	5.33	5.36	5.39	5.41	5.44	5.47	5.50
70	5.52	5.55	5.58	5.61	5.64	5.67	5.71	5.74	5.77	5.81
80	5.84	5.88	5.92	5.95	5.99	6.04	6.08	6.13	6.18	6.23
90	6.28	6.34	6.41	6.48	6.55	6.64	6.75	6.88	7.05	7.33
99	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	7.33	7.37	7.41	7.46	7.51	7.58	7.65	7.75	7.88	8.09

Condensed Tables घ-13 is taken from Tables IX of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and the publishers

(सारणी प-14),

$$\text{भार गुणांक } w = \frac{Z^2}{PQ}$$

Y	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.003	0.005	0.006	0.008	0.011
2	0.015	0.019	0.025	0.031	0.040	0.050	0.062	0.076	0.092	0.110
3	0.131	0.154	0.180	0.208	0.238	0.269	0.302	0.336	0.370	0.405
4	0.439	0.471	0.503	0.532	0.558	0.581	0.601	0.616	0.627	0.634
5	0.637	0.634	0.627	0.616	0.601	0.581	0.558	0.532	0.503	0.471
6	0.439	0.405	0.370	0.336	0.302	0.269	0.238	0.208	0.180	0.154
7	0.131	0.110	0.082	0.076	0.062	0.050	0.040	0.031	0.250	0.009
8	0.015	0.011	0.008	0.006	0.005	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001

These tables are taken from Fisher and Yates' Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London (Previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), by the permission of the authors and the publishers

सारणी (घ-15),
बहु-परिस्तर परीक्षा के लिए 5% सायंकता स्तर पर सायंक परिमर

n_2/P	2	3	4	5	6	8	10	14	20	50	100
10	315	329	337	343	346	347	347	347	348	348	348
12	308	323	333	336	340	344	346	346	348	348	348
14	303	318	327	333	337	341	344	346	347	347	347
16	300	315	323	330	332	339	343	345	347	347	347
18	297	312	321	327	332	337	341	345	347	347	347
20	295	310	318	325	330	336	340	344	347	347	347
24	292	307	315	322	328	334	338	344	337	347	347
30	289	304	312	320	325	332	337	343	347	347	347
60	283	298	308	314	320	328	333	340	347	348	348
100	280	295	305	312	318	326	332	340	347	353	353
∞	277	292	302	309	315	323	329	338	347	361	367

Significant ranges for a 1% level new a multiple range test
(2)

10	4 48	4 73	4 88	4 96	5 06	5 20	5 28	5 42	5 55	5 55	5 55
12	4 32	4 55	4 68	4 76	4 84	4 96	5 07	5 17	5 26	5 26	5 26
14	4 21	4 42	4 55	4 63	4 70	4 83	4 91	5 00	5 07	5 07	5 07
16	4 13	4 34	4 45	4 54	4 60	4 72	4 79	4 88	4 94	4 94	4 94
18	4 07	4 27	4 38	4 46	4 53	4 64	4 71	4 78	4 85	4 85	4 85
20	4 02	4 22	4 33	4 40	4 47	4 58	4 65	4 73	4 79	4 79	4 79
24	3 96	4 14	4 24	4 33	4 39	4 49	4 57	4 64	4 72	4 74	4 74
30	3 89	4 06	4 16	4 25	4 32	4 41	4 48	4 58	4 65	4 72	4 72
60	3 76	3 92	4 03	4 12	4 17	4 27	4 34	4 44	4 53	4 66	4 66
100	3 71	3 86	3 98	4 06	4 11	4 21	4 29	4 38	4 48	4 64	4 65
∞	3 64	3 80	3 90	3 98	4 04	4 14	4 20	4 31	4 41	4 60	4 68

Using special protection levels based on degrees of freedom.

This table was reproduced with the permission of the editor of Biometrics from the paper by D B Duncan, Biometrics 11 11-42, 1955

सारणी (ब-16)

र से 2 में स्थानांतरण

परिशिष्ट-घ

673

Z	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	Mean	Diff.
0	0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	100	
1	0997	1090	1194	1293	1391	1489	1586	1684	1781	1877	98	
2	1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	94	
3	2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	89	
4	3800	3885	3969	4053	4136	4219	4301	4382	4462	4542	82	
5	4621	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	75	
6	5370	5441	5511	5580	5649	5717	5784	5850	5915	5980	68	
7	6044	6107	6169	6231	6291	6351	6411	6469	6527	6584	60	
8	6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	53	
9	7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	46	
10	7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	39	
11	8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	33	
12	8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	28	
13	8617	8643	8668	8692	8717	8741	8764	8787	8810	8832	24	

वित्त सारणी (घ-16)

(2)

14	8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	20
15	9051	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9201	17
16	9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9341	14
17	9354	9366	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	12
18	94681	94783	94884	94983	95080	95175	95268	95359	95449	95537	95
19	95624	95709	95792	95873	95953	96032	961009	96185	96259	96331	79
20	96403	96473	96541	96609	96675	96739	96803	96865	96926	96986	65
21	97045	97103	97159	97215	97269	97323	97375	97426	97477	97526	53
22	97574	97622	97668	97714	97759	97803	97846	97888	97929	97970	44
23	98010	98049	98087	98124	98161	98197	98233	98267	98301	98335	36
24	98367	98399	98431	98462	98492	98522	98551	98579	98607	98635	30
25	98661	98688	98714	98739	98764	98788	98812	98835	98858	98881	24
26	98903	98924	98945	98966	98987	99007	99026	99045	99064	99083	20
27	99101	99118	99136	99153	99170	99186	99202	99218	99233	99248	16

बिस्त सरणी (घ-16)
(3)

28	99263	99278	99292	-99306	99320	-99333	99346	-99359	99372	99384	13
29	99396	99408	99420	99431	99443	99454	99464	99475	99485	99495	11
0	1	-2	3	-4	-5	6	7	8	9		
3	99505	99595	99668	99728	99777	99818	99851	99878	99900	99918	
4	99933	99945	99955	99963	99970	99975	99980	99983	99986	99989	

Table घ-16 Gives the transformation $r = (e^{2z} - 1)/(e^{2z} + 1)$ or $z = \frac{1}{2} \log_e (1+r) - \log_e (1-r)$ with n defined as above z is distributed approximately normally with variance $1/(n-1)$ For exact work correct for bias in z by subtracting $r/2 (n+1)$ from z

Table घ-16 is taken from Tab'e VIII, of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, Published by Longman Group Ltd, London. (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), and by the permission of the authors and the publishers

सारणी (प-17)
क्षेत्रीय हस्तान्तरण

P%	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.00	1.81	2.56	3.14	3.63	4.05	4.44	4.80	5.13	5.44
1	5.74	6.02	6.29	6.55	6.80	7.03	7.27	7.49	7.71	7.92
2	8.13	8.33	8.53	8.72	8.91	9.10	9.28	9.46	9.63	9.80
3	9.97	10.14	10.30	10.47	10.61	10.78	10.94	11.09	11.24	11.39
4	11.54	11.68	11.83	11.97	12.11	12.25	12.38	12.52	12.66	12.79
5	12.92	13.05	13.18	13.31	13.44	13.56	13.69	13.81	13.94	14.06
6	14.18	14.30	14.42	14.54	14.65	14.77	14.89	15.00	15.12	15.23
7	15.34	15.45	15.56	15.68	15.79	15.89	16.00	16.11	16.22	16.32
8	16.43	16.54	16.64	16.74	16.85	16.95	17.05	17.15	17.26	17.36
9	17.46	17.56	17.66	17.76	17.85	17.95	18.05	18.15	18.24	18.34
10	18.43	18.53	18.63	18.72	18.81	18.91	19.00	19.09	19.19	19.28
11	19.37	19.46	19.55	19.64	19.76	19.82	19.91	20.00	20.09	20.18
12	20.27	20.36	20.44	20.53	20.62	20.71	20.79	20.88	20.96	21.05
13	21.13	21.22	21.30	21.39	21.47	21.56	21.61	21.72	21.81	21.89
14	21.97	22.06	22.14	22.22	22.30	22.38	22.4	22.54	22.63	22.71
15	22.79	22.87	22.95	23.03	23.11	23.18	23.26	23.34	23.42	23.50
16	23.58	23.66	23.73	23.81	23.89	23.97	24.04	24.12	24.20	24.27
17	24.35	24.43	24.50	24.58	24.65	24.73	24.80	24.88	24.95	25.03

बिगत सारणी (प-17)
(2)

18	2510	2518	2525	2533	2540	2547	2555	2562	2570	2677
19	2584	2591	2599	2606	2613	2621	2628	2635	2642	2649
20	2657	2664	2671	2678	2685	2692	2692	2706	2713	2720
21	2727	2735	2742	2749	2756	2762	2769	2776	2783	2790
22	2797	2803	2811	2818	2825	2832	2839	2845	2852	2859
23	2866	2873	2879	2886	2893	2900	2906	2913	2920	2927
24	2933	2940	2947	2953	2960	2967	2973	2980	2987	2993
25	3000	3007	3013	3020	3026	3033	3040	3046	3053	3059
26	3066	3072	3079	3085	3092	3098	3105	3111	3118	3124
27	3131	3137	3144	3150	3156	3163	3169	3176	3182	3188
28	3195	3201	3208	3214	3220	3227	3233	3239	3246	3252
29	3258	3265	3271	3277	3283	3290	3296	3302	3309	3315
30	3321	3327	3334	3340	3346	3352	3358	3365	3371	3377
31	3383	3390	3396	3402	3408	3414	3420	3427	3433	3439
32	3445	3451	3457	3463	3470	3476	3482	3488	3494	3500
33	3506	3512	3518	3524	3530	3537	3543	3549	3555	3561
34	3567	3573	3579	3585	3591	3597	3603	3609	3615	3621
35	3627	3633	3639	3645	3651	3657	3663	3669	3675	3681

वित्त सारणी (प-17)
(3)

36	36.87	36.93	36.99	37.05	37.11	37.17	37.23	37.29	37.35	38.41
37	37.46	37.52	37.58	37.64	37.70	37.76	37.82	37.88	37.94	38.00
38	38.06	38.12	38.17	38.23	38.29	38.35	38.41	38.47	38.53	38.59
39	38.65	38.70	38.76	38.82	38.88	38.94	39.00	39.06	39.11	39.17
40	39.23	39.29	39.35	39.41	39.47	39.52	39.58	39.64	39.70	39.76
41	39.82	39.87	39.93	39.99	40.05	40.11	40.16	40.22	40.28	40.34
42	40.40	40.45	40.51	40.57	40.63	40.69	40.74	40.80	40.86	40.92
43	40.98	41.03	41.09	41.15	41.21	41.27	41.32	41.38	41.44	41.50
44	41.55	41.61	41.67	41.73	41.78	41.84	41.90	41.96	42.02	42.07
45	42.13	42.19	42.25	42.30	42.36	42.42	42.48	42.53	42.59	42.65
46	42.71	42.76	41.82	42.88	42.94	42.99	43.05	43.11	43.17	43.22
47	43.28	43.34	43.39	43.45	43.51	43.57	43.62	43.68	43.74	43.80
48	42.85	43.91	43.97	44.03	44.08	44.14	44.20	44.26	44.31	44.37
49	44.43	44.48	44.54	44.60	44.66	44.71	44.77	44.83	44.89	44.94
50	45.00	45.06	44.11	44.17	45.23	45.29	44.34	45.40	45.46	45.52
51	45.57	45.63	45.69	45.74	45.80	45.86	45.92	45.97	46.03	46.09
52	46.15	46.20	46.26	46.32	46.38	46.43	46.49	46.55	49.61	46.66
53	46.72	46.78	46.83	46.89	46.95	47.01	47.06	47.12	47.18	47.24

वित्त सारणी (घ-17)

(4)

54	47 29	47 35	47 41	47 47	47 52	47 58	47 64	47 70	47 75	47 81
55	47 87	47 93	47 98	48 04	48 10	48 16	48 22	48 27	48 33	48 39
56	48 45	48 50	48 56	48 62	48 68	48 73	48 79	48 85	48 91	48 97
57	49 02	49 08	49 14	49 20	49 26	49 31	49 37	49 43	49 49	49 55
58	49 60	49 66	49 72	49 78	49 84	49 89	49 95	50 01	50 07	50 13
59	50 18	50 24	50 30	50 36	50 42	50 48	50 53	50 59	50 65	50 71
60	50 77	50 83	50 89	50 94	51 00	51 06	51 12	51 18	51 24	51 30
61	51 35	51 41	51 47	51 53	51 59	51 65	51 71	51 77	51 83	51 88
62	55 94	52 04	52 06	52 12	52 18	52 24	52 30	52 36	52 42	52 48
63	52 54	52 59	52 65	53 71	52 77	52 83	52 86	52 95	53 01	53 07
64	53 13	53 19	53 25	53 31	53 37	53 43	53 49	53 55	53 61	53 67
65	53 73	53 79	53 85	53 91	53 97	54 03	54 09	54 15	54 21	54 27
66	54 33	54 39	54 45	54 51	54 57	54 63	54 70	54 76	54 82	54 88
67	54 94	55 00	55 06	55 12	55 18	55 24	55 30	55 37	55 43	55 49
68	55 55	55 61	55 67	55 73	55 80	55 86	55 92	55 98	56 04	56 10
69	56 17	56 23	56 29	56 35	56 42	56 48	56 54	56 60	56 66	56 73
70	56 79	56 85	56 91	56 98	57 04	57 10	57 17	57 23	57 29	57 35
71	57 42	57 48	57 54	57 61	57 67	57 73	57 80	57 86	57 93	57 99

वित्त सारणी (घ-17)
(5)

72	58 05	58 12	58 18	58 24	58 31	58 37	58 44	58 50	58 56	58 63
73	58 69	58 76	58 82	58 89	58 95	59 02	59 08	59 15	59 21	59 28
74	59 34	59 41	59 47	59 54	59 60	59 67	59 74	59 80	59 87	59 93
75	60 00	60 07	60 13	60 20	60 27	60 33	60 40	60 47	60 53	60 60
76	60 67	60 73	60 80	60 87	60 94	61 00	61 07	61 14	61 21	61 27
77	61 34	61 41	61 48	61 55	61 61	61 68	61 75	61 82	61 89	61 96
78	62 03	62 10	62 17	62 24	62 31	62 38	62 44	62 51	62 58	62 65
79	62 73	62 80	62 87	62 94	63 01	63 08	63 15	63 22	63 29	63 36
80	63 43	63 51	63 58	63 65	63 72	63 79	63 87	63 94	64 01	64 09
81	64 16	64 23	64 30	64 38	64 45	64 53	64 60	64 67	64 75	64 82
82	64 90	64 97	65 05	65 12	65 20	65 27	65 35	65 42	65 50	65 57
83	65 65	65 73	65 80	65 88	65 96	66 03	66 11	66 19	66 27	66 34
84	66 42	66 50	66 58	66 66	66 74	66 82	66 89	66 97	67 05	67 13
85	67 21	67 29	67 37	67 46	67 54	67 62	67 70	67 78	67 86	67 94
86	68 03	68 11	68 19	68 28	68 36	68 44	68 53	68 61	68 70	68 78
87	68 87	68 95	69 04	69 12	69 21	69 30	69 38	69 47	69 56	69 64
88	69 73	69 82	69 91	70 00	70 09	70 18	70 27	70 36	70 45	70 54
89	70 63	70 72	70 81	70 91	71 00	71 09	71 19	71 28	71 37	71 47

90	71 57	71 66	71 76	71 85	71 95	72 05	72 15	72 24	72 34	72 44
91	72 54	72 64	72 74	72 85	72 95	73 05	73 15	73 26	73 36	73 46
92	73 57	73 68	73 78	73 89	74 00	74 11	74 21	74 32	74 44	74 55
93	74 66	74 77	74 88	75 00	75 11	75 23	75 35	75 46	75 58	75 70
94	75 82	75 94	76 06	76 19	76 31	76 44	76 56	76 69	76 82	76 95
95	77 08	77 21	77 34	77 48	77 62	77 75	77 89	78 03	78 17	78 32
96	78 46	78 61	78 76	78 91	79 06	79 22	79 37	79 53	79 70	79 86
97	80 03	80 20	80 37	80 54	80 72	80 90	81 09	81 28	81 47	81 67
98	81 87	82 08	82 29	82 51	82 73	82 97	83 20	83 45	83 71	83 98
99	84 26	84 56	84 87	85 20	85 56	85 95	86 37	86 86	87 44	88 19

Tables 2-17 is taken from Table X of Fisher and Yates Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research Published by Longman Group Ltd, London (previously published by Oliver & Boyd Publishers) and by permission of the authors and the publishers.

FURTHER READ IN

1. Anderson, R. L., and Bancroft, T. A. (1952), *Statistical Theory in Research*, Mc Graw Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapters 5, 11, 13, 21)
2. Anderson, T. W. (1958), *An Introduction to Multivariate Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York (For Chapters 18)
3. Anderson, T. W. (1971), *The Statistical Analysis of Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., New York. (for Chapter 16)
4. Arley, Niels and Buch, K. R. (1953), *Introduction to the Theory of Probability and Statistics* John Wiley & Sons, Inc., New York, (For Chapters 5, 8)
5. Bliss, C. L. (1970), *Statistics in Biology*, Vol. II, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapter 20)
6. Budid, Moris (1962), *Statistical Measurements for Economics and Administration*, Asia Publishing House, Bombay (For Chapters 15, 16)
7. Cochran, William G. (1959), *Sampling Techniques*, Asia Publishing House, Bombay (For Chapter 12)
8. Cochran W. G., and Cox, G. M. (1959), *Experimental Designs* Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 21)
9. Crammer, HARALD (1958) *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton. (For Chapters 5, 6, 7, 8, 9, 14)
10. Croxton, F. E. and Cowden, D. J. (1939), *Applied General Statistics*, Princeton Hall, New York. (For Chapters 2, 3, 4).
11. Des Raj (1968), *Sampling Theory*, Tata McGraw Hill Publishing Company Ltd, Bombay (For Chapter 12)
12. Dixon, W. J., and Massey, F. J., Jr. (1957), *Introduction to Statistical Analysis*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 9, 21, 23)
13. Federer, Walter T. (1955), *Experimental Design*, Oxford & IBH Publishing Company, Calcutta. (For Chapters 21, 22, 23).
14. Feller, William (1968), *An Introduction to Probability Theory and its applications*, Vol. I, (Third Edn.) John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 5, 6, 8).
15. Finney, D. J. (1964), *Probit Analysis*, University Press, Cambridge. (For Chapter 20)
16. Fish, Marek, (1963) *Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc. New York. (For Chapters 5, 6, 7, 8)
17. Fisher, R. A., and Frank Yates (1963), *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (Sixth Edition),

- Oliver and Boyd Ltd, Edinburgh (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21-23)
- 18 Goufden Cyril H (1952) *Methods of Statistical Analysis*, John Wiley & Sons Inc, New York (For Chapters 12, 19)
- 19 Graybill Franklin A (1961), *An Introduction to Linear Statistical Models Vol I*, McGraw-Hill Book Co, Inc New York (For Chapter 18)
- 20 Hansen Morris H HURWITZ WILLIAM N and Madow, William G (1956), *Sample Survey Methods and Theory Vol I II*, John Wiley & Sons Inc, New York (For Chapters 12)
- 21 Hoel, Paul G (1961), *Introduction to Mathematical statistics*, John Wiley & Sons Inc New York (For Chapters 6, 10)
- 22 Hogg, Robert V, Craig, Allen T. (1972), *Introduction to Mathematical Statistics*, Third Edition, Amerind Publishing Co Pvt Ltd, New Delhi (For Chapters 5, 6, 7, 10)
- 23 Kapur, J N, and Saxena H C (1960), *Mathematical Statistics*, S Chand & Co, New Delhi (For Chapters 4, 5, 6, 7)
- 24 Kempthorne, Oscar (1952), *The design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Inc, New York (For Chapter 21).
- 25 Kenny, J F, and Keeping, E S (1951), *Mathematics of Statistics, Part One*, D Von Nostrand Company, Inc, New-York (For Chapters 2, 3, 4-5).
- 26 Kenny, J F, and Keeping E S (1951), *Mathematics of Statistics Part two*, D Von Nostrand Company, Inc, New York (For Chapters 5, 14)
- 27 Kshirsagar A M, (1972), *Multivariate Analysis*, Marcel Dekker, Inc, New York (For Chapter 18)
- 28 Mood, A M (1950), *Introduction to the theory of Statistics*, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York (For Chapters 10, 11).
- 29 Mudgett, Bruce D (1951), *Index Numbers*, John Wiley & Sons Inc, New York, (For Chapter 15)
- 30 Ostle, Bernard (1966), *Statistics in Research*, Oxford & IBH Publishing Co Calcutta (For Chapters 9, 13, 14, 21)
- 31 Parzen, E, (1960), *Modern Probability theory and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc, New York (For Chapters 3, 6, 8)
- 32 Panse V G, and Sukhatme P V (1967), *Statistical Methods for Agricultural Workers* Indian Council of Agricultural Research, New Delhi (For Chapter 21)
- 33 Pearson, Frank A, and Bennet Kenneth R (1955) *Statistical Methods*, John Wiley & Sons, Inc, New York (For chapters 15-16)

34. Pearson, E. S. and Hartley's H. O. (1970), *Biometrics Tables for Statisticians*, Vol. I, Lower and Brydone (Printers) Ltd, London. (For Chapters 9, 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 23).
35. Rao C R. (1952), *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*, John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapters 9, 11, 19).
36. Rao C. R. (1967), *Linear Statistical Inference and its Application*, John Wiley & Sons, Inc, New York. (For Chapters 8, 18)
37. Searle, S. R. (1971), *Linear Models*, John Wiley & Sons, Inc., New York. (For Chapter 21)
38. Siegel, Sidney (1956), *Nonparametric Statistics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York. (For Chapter 10).
39. Snedecor, George W., and William G Cochran (1968), *Statistical Methods*, Oxford & IBH Publishing Co, Calcutta. (For Chapters 9, 13, 14, 21)
40. Spear Mary Eleanor (1952), *Charting statistics*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York (For Chapter 2)
41. Steel, Robert G. D, and Torrie, James H. (1960), *Principles and procedures of Statistics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (For Chapters 4, 21, 23, 23).
42. Sukhatme, P. V. and Sukhatme, B. V. (1970), *Sampling Theory of Surveys with application*, Asia Publishing House, Bombay. (For Chapter 12)
43. Walker, Helen M and Lev, Joseph (1953), *Statistics as Applied to Economics and Business*, Holt Rinehart and Winston, New-York. (For Chapters 6, 7, 9, 10).
44. Walker, Helen M and Lev Joseph (1953), *Statistical inference*, Henry Holt and Company, New York (For Chapters 6, 7, 9, 10)
45. Wessel, R H and Willet, E R (1963), *Statistics as applied to Economics and Business*, Holt Rinehart and Winston New York. (For Chapters 15, 16, 17).
46. Wilks, S S (1962), *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc, New York. (For Chapters 5, 6, 7, 11).

अनुक्रमणिका

अ	आपूर्ति जनक कर्म	86, 95
अमेरिकीय बंटन,	आधुनिक नियमन	248
काई बर्ग	आवत विन	7
I	आवनाकार बंटन	110
P	आधुनिक,	
अतिगुणोत्तर बंटन	परिभाषा	623
अतिरक्षकविक्रम यथा अनुक्रम	गुण	623
अपारण	विषयों	624
अधिकतम तापमानविना विधि	प्रतिशत	628
	आमंत्रण गुणोत्तर	177
अतिभंगता	आमंत्रण मारणी	165
अनुक्रमणम गुच्छ परिमाण	(2 × 2) का बी	170
अनुक्रमणम नियमन	उ	
अन्तरवर्ग सहसम्बन्ध	उपप्रतिफल	544-48, 580
अन्तर्वेगन धीर बहिर्वेगन	उपान बंटन	81, 457
बलनाश	उपादान-उत्पन्न वरीक्षा	375
अन्तर्वेगन धीर बहिर्वेगन की विधियाँ	ख	
रेखाचित्रकीय विधि	खण्डित द्विपद बंटन	99
रेखा वा वक्र मार्गक्रम विधि	खण्डित वक्रवर्तन समष्टि	418
द्विपद विस्तार विधि	खण्डित विचरण	404
अन्तर्वेगन	उपनिबन्धित विधि	405
अन्तर्वेगन घटनाएँ	उपनिबन्धित अनुमान विधि	406
- नियमन युक्ति	परिमाण माध्य विधि	406
अन्तर्वेगन मान 331, 349-52, 557, 616	श्रुतिगत मापन विधि	411-17
अन्तर्वेगन कर्म 87, 93, 97, 109	घ	
अन्तर्वेगन की परिभाषा	घ घुम्त वरीक्षा	143
आ	घ समान समान वरीक्षा	226
आंशिक संकरण	घाट गुण	505
आंशिक समाधान गुणांक	क	
आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक	कटुता	57
आकर्मन की अनुमान विधि	काई बर्ग वरीक्षा	163
आकर्मन की समाधान विधि	काई बर्ग बंटन	111
आपूर्ति	काम घेनी	
		52, 84

विश्लेषण	390	व	
अनियमित विचरण	420	दण्ड आरेख	12
कालोत्क्रमण परीक्षा	374	दशमक	35
बीलकीय मघनन विधि	628	द्विघात या उच्चतर घात समीकरण	292
कीकरान-प्रमेय	468	द्विघात रूपों का सम्बन्धित बटन	467-68
कोटि महसम्बन्ध	343-45	द्विचर प्रसामान्य बटन	456
कौशी बटन	111	द्विचरण प्रतिचयन	257-59
क्रमचय	633	द्विघा वर्गीकरण	531
क्रमबद्ध प्रतिचयन	251	द्विपद बटन	90
क्रम सांख्यिकी	125-28	द्विपद विस्तार	634
	ख	दीर्घकालिक उपनति,	
खिचिन-प्रमेय	132	रेखनी या घागे से	391
	ग	अर्ध माध्य विधि	392
गणितोय प्रत्याशा	84	माध्य विधि	393
गामा फलन	634-35	गतिमान माध्य विधि	394-99
गामा बटन	112	न्यूनतम वर्ग विधि	399-400
ग्रीसीय-लैटिन वर्ग अभिकल्पना	560-61	देशराज आकलन	265
गुच्छ प्रतिचयन	254	दो आकलकों की आर्पेक्षिक दक्षता	220
गुणोत्तर माध्य	28	दो पुच्छ परीक्षा	143
	घ	दो या अधिक अज्ञान मानों का आकलन	
घटना	69	(अन्तर्वेशन या बहिर्वेशन)	432
घातीय श्रेणी	634	न्यूनतम की अग्रगामी अन्तर विधि	433-36
	च	न्यूनतम-गाम की अग्रवर्ती विधि	436-39
चक्रीय विचरण का पृथक्करण	419-20	न्यूनतम-गाम प्रत्यक्ष विधि	439-43
चक्रीय विचरण मापन	418	लघुच विधि	444
चतुर्थक	34	दो सहसम्बन्धित चरों के प्रसरणों की	
चरघाताकी समाश्रयण वक्र	289	तुलना	351-53
चापग्या रूपान्तरण	602		
चिह्न परीक्षा	203	न	
चेबीचेफ असमिका	130	निराकरण क्षेत्र	142
	ड	निर्धारण गुणांक	326
डकन-ब्रह्मपरास परीक्षा	520	नेत्र समजन विधि	490-98
डाडेकर-शुद्धि	173	न्यास का सहेतीकरण	59
डाक द्वारा पूछनाछ	272	न्यास का सग्रह	269
	त	न्यूनतम वर्ग विधि	276, 399, 534
तोरण वक्र	11		

प		प्रसामान्य विवर	162
पदानुक्रमानुसार वर्गीकरण	526	प्राचल	2
परम्परा परीक्षा	198-99	प्राबिंट विद्यलेपण	486
परिवर्तन	139	प्राबिंट समाश्रयण रेल्वे का समजन	
निराकरणीय	140	नेत्र समजन विधि	490-98
बैकल्पिक	140	अधिष्ठित सम्भावित विधि	498
परिमाण के समानुपातिक प्रायिकता		प्रायिकता की परिमाया	162
प्रतिशत	259	बिन्दुप्रतिष्ठित	70
परिसर	44	सांख्यिकीय	72
परीक्षा निबन्ध	144	अभिगृहीतीय	73
परीक्षा में नुटि	141	प्रायिकता बटन सिद्धान्त	79
परीक्षा सामर्थ्य	141	प्लासो बटन	96
पर्याप्त मात्रक	219		
पाई धारित	18	फ	
पूर्ण संकरण	582	क्रियर Z बटन	122
पूर्णांकन	65	क्रियर Z रूपांतरण	338, 340, 605
प्रतिशत डाँचा	286	घ	
प्रतिशत नुटि	233	बटन,	
प्रतिशत यूनिट (एक)	235	द्विपद	90
प्रतिदर्श	2	बरनूली	94
प्रतिदर्श परिमाण	240-43	प्लासों	96
प्रतिशत माध्य	628	शृणालय द्विपद	99
प्रयोग अभिव्यक्ति	510	प्रतिशुणोत्तर	100
प्रसरण	48	प्रसामान्य	104
प्रसरण विद्यलेपण,		घायताकार	110
सरल रैखीय समाश्रयण के लिए	282	बीसी	111
रैखिक बहुसमाश्रयण के लिए	309	बाई वर्ग	111
एकसा वर्गीकरण	514	गामा	112
पूर्णतया यादृच्छिकीय अभि- कल्पना	515	घनेन्द्रीय बाई वर्ग	115
यादृच्छिक पूर्ण संयुक्त अभि- कल्पना	544-48	स्टुडेन्ट t	116
संदिग्ध वर्ग अभिव्यक्ति	553-57	घनेन्द्रीय t	117
वेद विधि द्वारा	577	F	118
विस्तारित क्षेत्र अभिव्यक्ति	584	घनेन्द्रीय F	121
प्रसामान्य बटन	104	क्रियर Z	122, 338
		बीटा	122
		बरनूली प्रमेय	94
		बिन्दु	426

बहु-उपादानोप प्रयोग	561	र	
बहुक्रम प्रतिचयन	257	रूपान्तरण,	
बहुचर प्रसामान्य बटन	456	लघुगणकीय	599
बहुपद बटन	468	वर्गमूल	600
बहुभुज	9	आपज्या या कोणीय	602
बहुलक	39	धुत्क्रम	603
बहुसमाश्रयण रेखा	302	अतिपरबलयिक ज्या धुत्क्रम	604
बहुसम्बन्ध	353-58	लागिट	605
बारम्बारता	3	फिशर Z	338, 605
बारम्बारता बटन	3	स	
बोटा फलन	635	लम्बकोणीय बहुपद बिधि	294
बेज का प्रमेय	76	लघुगणकीय वृद्धि नियम	291
बृहत सख्या का नियम	131, 132	लघुगणकीय रूपान्तरण	599
म		लघुगणकीय श्रेणी	634
महालानबीस व्यापकीकृत दूरी (D^2)	465-66	लघुगणक सम्बन्धी सूत्र	633
माध्य प्रॉबिट अन्तर	509	लागिट रूपान्तरण)	605
माध्य वर्ग योगो का प्रत्याशित मान	535-40	लिमिटापुनोव प्रमेय	135
माध्य बिचलन	46	लिडवर्ग लेवी प्रमेय	132
माध्यिका	28-32	लेखा चित्र	15
माध्यिका परीक्षा	208	लैटिन वर्ग अभिकल्पना	553
मान-ह्लिटनी (J) परीक्षा	211	ब	
मिथ्या सट्सम्बन्ध	353	वक्र समजन	275
मिश्रचरितस वक्र	290	वर्गमूल रूपान्तरण	603
मिश्रित प्रभाव प्रतिरूप	524	Y की मानक त्रुटि	288
य		विचरण गुणाक	48
यादृच्छिक घर	78	विपाटित खण्डक अभिकल्पना	592
यादृच्छिक (प्रायिकता) प्रतिचयन	234	विपाटित क्षेत्र अभिकल्पना	584
यादृच्छिक प्रभाव प्रतिरूप	524	विल्क A निरूप	474-76
यादृच्छिक सख्या मारणी का उपयोग	236	विल्कावमन चिह्नित कोटि परीक्षा	206-7
युगल t-परीक्षा	154	द्विविक्तकर फलन	471-74
येट्म विधि	577	विश्वाहयना सीमाएँ व अन्तराल	151-54, 155, 282, 239
येट्म श्रुद्धि	171	समाश्रयण गुणाक	286, 308
योग प्रमेय	73	$\mu_{Y/X}$	288
		सट्सम्बन्ध गुणाक	339

विशाल बटन	462-63	सरल समाश्रयण रेखा	276
विषम बटन वक्र	55	सहस्रांतरण विरलेयण	606
चतुर्थी त्रिमंडल प्रतिचयन	252	सहस्रम्बन्ध	323
चतुर्थी परीक्षा	376	सहस्रम्बन्ध अनुपात	349-50
वैषम्य	564	सहस्रम्बन्ध गुणांक	323, 330
वैषम्य-गुणांक	56	सहस्रम्बन्ध गुणांक का	
व्यक्तिगत पूछ-ताछ	270	समाश्रयण गुणांक का सम्बन्ध	325
		ज्यामितीय निरूपण	326-30
शततमक	36	प्राधिकता घनरत्न पमन	332-34
		सहस्रम्बन्ध गुणांक पर सरेतीकरण	
शुद्धता सूचकांक	383-85	का प्रभाव	334-35
		गोमितीय प्रतिरूप,	
सकरण,		रिपर प्रभाव	523
पूर्ण	582, 593	याहच्छिक प्रभाव	524
घांशिक	583	मिश्रित प्रभाव	524
सक्षिप्त डमिटिल विधि	631-32	सांख्यिकीय स्वतन्त्रता	76
सगति	217	सापेक्ष घनत गति	508
सचय	633	सामग्रस्य गुणांक	347-49
सचयी बारम्बारता	3	सारणिक	628
सचयी योग विधि	259	सार्यरता परीक्षा,	
सजातीयता त्रुटि	382	दो समग्र माध्यों की समानता	146-51
सप्रतिबन्ध प्राधिकता	75	बारम्बारताओं में घनतर	157
सप्रतिबन्ध बटन	82, 459-61	प्रतिशतो में घनतर	157
समजन-सुप्टुता	178	अनुपातों में घनतर	157
(सासजन सौष्टव)		दो से अधिक समग्र माध्यों की	
समजन-सुप्टुता की परीक्षा	178	समानता	159
समग्र	2, 235	डिपर के लिए	163
समान्तर भार मर्कित सूत्र	377	दो समान्तर प्रतिदर्शों की	
समान्तर माध्य	24	सजातीयता	167
समाश्रयण	274	K वर्गों की स्थिति में	175
समाश्रयण गुणांक	279	दो वर्गों की स्थिति में	176
समाश्रयण वक्र	461-62	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	181
समुष्णय सिद्धान्त	637-38	दो समग्र प्रसरणों की समानता	184
सम्भावना अनुपात	227	K समग्र प्रसरणों की समानता	186
सरल धारितक समाश्रयण	289	समाश्रयण गुणांक	285, 388
सरल धारितिक प्रतिचयन	236	β_0 की	287

सहसम्बन्ध गुणांक	336-43	सजातीयता त्रुटि	382
कोटि सहसम्बन्ध गुणांक	345-47	सूची पत्रक	270
प्राणिक सहसम्बन्ध गुणांक	359-62	स्टुडेंट-t	116, 144
सार्थकता स्तर	141	स्तरित प्रतिचयन	243
सूचकांक	368-69	स्थिर प्रभाव प्रतिरूप	523
सूचकांक रचना की विधियाँ,		स्वतन्त्र घटनाएँ	71
मूल्यों के योग के अनुपात द्वारा	370	स्वतन्त्रता कोटि (स्व० को०)	142
सापेक्ष मूल्यों के माध्य द्वारा	370-71	(स्वतन्त्र सख्या)	
भारित सापेक्ष द्वारा	371-73	ह	
सूचकांक रचना में त्रुटियाँ,		हूरविट्ज-थामसन आवलक	264
सूत्र त्रुटि	381	होर्टलिंग T ² -बटन	463-65
प्रतिचयन त्रुटि	381		

पारिभाषिक शब्दावली

(सांख्यिकीय शब्दों का अंग्रेजी अनुवाद)

(अ)

अंग element, numerator
 अग्रगामी advancing
 अग्रवर्ती forward
 अतिशुणोत्तर hypergeometric
 अतिरसतयिक hyperbolic
 अदिश scalar
 अनुसूतम optimum
 अनुक्रम sequence
 अनुसन्ध suffix
 अनुक्रिया response
 अनेकधा (बहु) multiple
 अन्तराल interval
 अन्तरवर्ष intra-class
 अन्तर्वेशन interpolation
 अनन्तसम्पत्ती asymptotic
 अन्तरवर्षयुक्त inter-quartile
 अपरिचाली exclusive
 अपरिचाल non parametric
 अस्पष्ट missing
 अभिकल्पना design
 अभिपूहोनीय axiomatic
 अभिधारणा assumption
 अभिविधि bias
 अभिलक्षण characteristic
 अभिसरण convergence
 अरकल differential
 अवशिष्ट residual
 अद्रुत्व non-central
 अलग discrete
 असमिका inequality

(आ)

अवलिप्त (अवलिप्त) estimated
 आघूर्ण moment
 आनुपातिक proportional
 आस-विश्रि wistogram
 आयताकार rectangular

अरिथ diagram, graph
 आसन्न plotting
 आस्यूड matrix
 आसन्न contingency
 आसन्न सौठव goodness of fit
 (समयन सुधुता)

(इ)

उपचार (रोधन) treatment
 उरनति brand
 उपसंतिषयन subsampling
 उररि upper
 उरलण approach
 उरल marginal

(इ)

ऋषारक negative
 ऋमुनिष्ठ seasonal

(ए)

एक (युनिट) unit, individual
 एरुध one-way
 एक समान uniformly

(ए)

एतुरना kurtosis
 कारक factor
 कालोपमन time reversal
 कीलकीय समयन विधि pivotal condensa-
 tion method

केन्द्रीय central
 कोरि rank
 कोरि-वश ordinate
 कोनीय angular
 क-रुधला cell
 कन order

कमयन permutations
 कसुध systematic

(ए)

कसुध block

	(ग)	न्यास data	
गणना चिह्न tally marks			(ष)
गणितीय mathematical		पंक्ति row	
गतिमान moving		पदानुक्रमानुसार hierarchical	
गुच्छ cluster		परम्परा run	
गुणांक coefficient		परस्पर mutual	
	(घ)	परस्पर-क्रिया interaction	
घटना event		परिकल्पना calculation	
घनत्व density		परिकल्पना hypothesis	
घात power		परिष्पन्द enumeration	
घातीय exponential		परिमाण size	
	(ङ)	परिमित finite	
चक्रीय cyclical		परिसर range	
चतुष्टय quartiles		परीक्षा test	
चर variable		पुच्छ tail	
चरघाताङ्की exponential		पुनरावृत्ति replication	
चान्ज्या arcsin		पूर्णांक rounding of numbers	
चिह्नप्रतिष्ठित classical		पूरक complementary	
चिह्न sign		प्रक्रिया processing	
	(च)	प्रतिबन्धन sampling	
जनक generating		प्रतिबन्धन अनुपात sampling fraction	
	(छ)	प्रतिदर्श sample	
त्रिचरण three stage		प्रतिरूप model	
तोरण ogive		प्रतिव्योम inverse	
	(ढ)	प्रतिस्थापन substitution	
दण्ड bar		प्रत्यक्ष backward	
दशमक decile		प्रत्याशा expectation	
द्विचरण two stage		प्रमेय theorem	
द्विघा two way		प्रवृत्ति tendency	
द्विधर्मी binary		प्रस्तावना questionnaire, exercise	
दीर्घकालिक secular		प्रचरण variance	
	(ढ)	प्रसामान्य normal	
निरूपक criterion		प्रेक्षण observation	
निम्न lower			(ञ)
निर्दिष्टन allocation		फलन function	
निराकरण क्षेत्र critical region			(त)
निराकरणहीन null		पटन distribution	
निरूपक representation		बहिर्वेशन extrapolation	
निर्धारक गुणांक coefficient of determination		बहुज्यासादीय factorial	
		बहुक्रम multistage	
निर्बन्ध interpretation		बहुचर multivariate	

बहुभुज polygon
 बहुमक mode
 बहुसमश्रयन multiple regression
 बारम्बारता frequency
 बीजीय algebraical
 बृहत् large
 (ष)
 भूखण्ड plot
 भेदकर्ता investigator
 (य)
 यादृच्छिक random
 युग्म paired
 यूनिट (एकक) unit
 (र)
 रचान्तरण transformation
 (ल)
 लघुगणक logarithm
 लघुगोण orthogonal
 लघुचित्र graph
 (व)
 वक्र curve
 वर्ग class, square
 वर्ग योग (सं. व.सं.) sum of squares
 वर्गीकरण classification
 विचर deviate
 विचरस्रोत source of variation
 विचलन deviation
 विजातीय heterogeneous
 विनिमय commutative
 विन्यास arrangement
 विपाटित split
 विभक्तकर discriminant
 विश्लेषण analysis
 विश्वास्यता confidence
 विषम skew, asymmetric
 विक्षेप dispersion
 वैकल्पिक alternative
 वैपरीत्य contrast, comparison
 वैपरीत्य-गुणांक coefficient of skewness
 व्यञ्जक expression
 व्युत्क्रमणीय reciprocal

व्युत्पन्न derive
 (ङ)
 शक्ततम most powerful
 शततमक percentile
 शुद्धि correction
 शून्य null, zero
 (ध)
 शृङ्खला chain
 (ञ)
 सङ्करण confounding
 सङ्केतीकरण coding
 सङ्गणक calculator
 सङ्घन combination
 सङ्घयी cumulative
 सतत continuous
 संपाती coincident
 सम्युक्त composite
 समीक्षण कारक correction factor
 समजातीय homogeneous
 सदिश vector
 सन्निकट approximate
 संप्रतिबंध conditional
 समग्र population
 समंजन fitting
 समंजन सुष्ठुता goodness of fit
 (कार्मन्जन सौष्ठव)
 सममित symmetrical
 समाकलन integration
 समायोजन adjustment
 समावेशी nested
 समाप्ययन regression
 समुच्चय set
 सम्बन्ध associated
 सम्भावना likelihood
 सर्वेक्षण survey
 सहस्रक cofactor
 सहस्रक covariate
 सहस्रकरण covariance
 सहस्रणी concomitant
 सहसम्बन्ध correlation
 सहायक ancillary

सहिष्णुता tolerance	सूची-यन्त्र schedule
सापेक्ष relative	स्तम्भ column
साम्य-सूचक coefficient of concordance	स्तर level
सामर्थ्य power	स्तरण stratification
साधक determinant	स्फीति inflation
सारणी table	स्वतन्त्रता-कोटि degrees of freedom (स्वतन्त्रता-संख्या)
सारणीयन tabulation	(ह)
सापेक्षता significance	हर denominator
साहचर्य associative	(स)
सीमा limit	क्षेत्र plot, area
सूचकांक index number	

□ □ □

शुद्धि-पत्र

पृष्ठ-संख्या	पंक्ति या सूत्र में	मधुद	शुद्ध
27	(3 4)	$f_i y_i$	$f_i Y_i$
34	* ↑ 13	उदाहरण (3 1)	उदाहरण (2 1)
39	** ↓ 5	30 35	20 35
39	↓ 6	49 45	46 34
40	↓ 18	[3 - 4]	(3 - 3)
40	चित्र (3 - 3)		अक्षर क, ख, ग, घ और न लिख दें।
41	↓ 1	(3,14)	(3 13)
46	↓ 12	उदाहरण (3.1)	उदाहरण (4.1)
46	↑ 10	सूत्र (3.5)	सूत्र (4.4)
49	↑ 13	\bar{X}	\bar{A}
66	↓ 7	संख्या	यह शब्द छोड़ दें।
101	(6-21)	हर में (n)	(n)
101	↑ 2 व ↑ 11	प्यासों व प्यासों	प्यासों
105	चित्र (7-3)	रेखांककालित क्षेत्र बायें पृष्ठ पर दिया है	यह क्षेत्र बायें पृष्ठ पर समझिये।
117	↓ 8	सामान्य	प्रसामान्य
132	↓ 2	6 3	8 3
135	↑ 3 व ↑ 7	अभिलक्षणिक	अभिप्रेतन]
138	↓ 1	$O(n^{\frac{3}{2}})$	$O(n^{-\frac{3}{2}})$
140	↑ 3	$H_0 : \sigma^2 > 0, H_1 : \sigma^2 > 0$	$H_0 : \sigma^2 < 0, H_1 : \sigma^2 > 0$
149	↓ 4	से अधिक	में कम
155	↓ 5	$\frac{1}{n-1} \left\{ \sum_i d_i - \frac{(\sum_i d_i)^2/n}{n} \right\}$	$\frac{1}{n-1} \left\{ \sum_i d_i^2 - \frac{(\sum_i d_i)^2/n}{n} \right\}$
167	↑ 5	स्वरूप	समरूप
171	↓ 3	(9.26)	(9.31)

पृष्ठ-संख्या	पंक्ति या सूत्र में	प्रयुक्त	शुद्ध
172	↑ 5	5 जोड़कर	·5 घटाकर
172	↑ 5	132 में से ·5 घटाने	132 में ·5 जोड़कर
174	↓ 4	(9·12)	(9·13)
175	↓ 10	(9·12)	(9·13)
183	चित्र (9·4)	(x - 1)	(n - 1)
183	↑ 4 व ↑ 5	$\sum_i X_i^2$	$\sum_i x_i^2$
185	↑ 2	(9·40)	(9·41)
199	↓ 7	a b aaa bb aa bbb aa b	b a bbb aaa b aaa bb a
200	↓ 10	स्वीकार	प्रस्वीकार
206	↓ 17	1, 2, -3, 4 व 5	1, -2, 3, 4 व 5
208, 209, व 215	↑ 3, 5, 7, 8 व ↓ 2 व ↓ 1	और	और
217	↑ 8	$\psi(\hat{\Omega})$	$\psi(\hat{\omega})$
230	↓ 6	$L = \left\{ \frac{1}{\quad} \right\}$	$L = \left\{ \frac{1}{\quad} \right\}^{n/2}$
231	↓ 14	$\sqrt{n(n-1)}$	$\sqrt{n(n-1)}$
285	(13·22)	$\sum_i y_i$	$\sum_i y_i^2$
286	↑ 6	स्वीकार	प्रस्वीकार
291	↑ 15	2	1·8
302	↑ 2	प्राचलों	प्रान्तकों
305	↑ 12	(c_{ij}) है तो b_i 's	((c_{ij})) है तो b_i 's
309	↓ 3	$R \sum_i Y_i^2, R^2 \sum_i y_i/K$	$R^2 \sum_i y_i^2, R^2 \sum_i y_i^2/K$
330	↑ 9	प्रतिदर्श	प्रतिदर्श
335	↓ 7 हर में	$\sqrt{\sum_i \{(-) - ()^2\} \sum_i \{(-) - ()^2\}}$	$\sqrt{\sum_i \{(-) - ()^2\} \sum_i \{(-) - ()^2\}}$
348	↑ 11	$\frac{pX(n+1)}{1}$	$\frac{pX(n+1)}{2}$

पृष्ठ संख्या	शक्ति या सूत्र में	धनुः	गुण
356	↓ 1 हर में	Σ^2	ΣX_j^2
377	↓ 10	मान	भार
401	↓ 2	Y	Y
414	↑ 5 हर में	180	100
433	↑ 13 व 12	1122 व $\frac{386}{5} = 60.6$	1289 व $\frac{553}{5} = 110.6$
437	↑ 3	$\Delta^2_0 = 3.7$	$\Delta^2_0 = -3.7$
464	(18 26)	$(\bar{X} - \mu_0)$	$(\bar{X}_i - \mu_0)$
487	↓ 2 व 3	वा. LD S_0	वा. LD 50
488	↓ 7	घोर	घोर
516	↓ 4	$S_{EE} n - K$	$S_{EE}/n - K$
533	↑ 1	$\sum \sum c_{ij}$	$\sum \sum c_{ij}^2$
535	(21 19)	$\sum \sum (X_{ij} \bar{X}_j - \bar{X}_i + X)$	$\sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + X)^2$
536	↓ 13	$\sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j + \bar{X}_i + X)$	$\sum \sum (X_{ij} - \bar{X}_j - \bar{X}_i + X)$
536	↑ 5	$c_{ij} व - 2c_{ij} - \bar{c}_i$	$c_{ij} व - 2c_{ij} - \bar{c}_i$
541	सारणी (21 9)	प्रत्याशित मा० व० य० के स्वरूप व =	हटावार या लगाएँ
554	↑ 10	ρ_j, β_j	ρ_j^2, β_j^2
569	सारणी (21 14) ↓ 3	एक शक्ति बढ़ाये $A p - 1 A_{XX} A_{XX} p - 1 = A' A' / s_0^2 F_A$	
572	↑ 11	3359 3	3357 2
576	↓ 6 हर में	$r \times q$	$r \times q \times p$
584	↓ 7	23	2 ²
590	↑ 4	=	उपवार व० य० =
592	↑ 1	R	P
623-32		विनिर्दिष्ट	विनिर्दिष्ट

पृष्ठ संख्या	शक्ति या सूत्र में	घुड़	घुड़
625	↓ 6	$a_k b_{kj}$	$a_k b_{kj}$
628	↓ 17	A के तुल्य रख दिया	A के तुल्य I रख दिया
630	↓ 6	$b_{13 1} - a_{21} b_{13}$	$b_{13 1} = a_{23} - a_{21} b_{13}$
630	↑ 15	दायी	बायी
633-34		r1 व 2/ प्रादि	r1 व 2' प्रादि
635	↓ 7	जिनमें A	जिनमें A_2

* ↑ नीचे से ऊपर की ओर

** ↓ ऊपर से नीचे की ओर

□ □ □

GREEK ALPHABETS

α	alpha		ν	nu
β	beta		ξ	xi
Γ γ	gamma		ο	omicron
Δ δ	delta		π	pi
ε	epsilon		ρ	rho
ζ	zeta		σ	sigma
η	eta		τ	tau
θ	theta		υ	upsilon
ι	iota		φ	phi
κ	kappa		χ	chi
λ	lambda		ψ	psi
μ	mu		Ω ω	omega